S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その 2)

問 1. 指数関数の「多項式の姿」を用いて, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

と定める. (取りあえず, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, (1) 式の右辺の「無限和」の値がきちんと定まることは認めることにする.) このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z, w \in \mathbb{C}$ として,

$$e^{z+w} = 1 + (z+w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \frac{(z+w)^3}{3!} + \cdots$$

と

$$e^z \cdot e^w = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \cdot \left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots \right)$$

という二つの式を z, w のべきの形に展開してみたときに, $k, l \in \mathbb{N}$ として, $z^k w^l$ の係数が, それぞれ何になるのかということと比較してみることで,

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (2)$$

となることを示せ. (取りあえず, 「無限和」に関する細かい考察は気にせず, 大らかに考えてみることにする.)

(2) (2) 式と Euler の公式

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta \quad (3)$$

を用いて考察することで, $x, y \in \mathbb{R}$ として, 勝手な複素数 $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ に対して, $e^z = e^{x+\sqrt{-1}y} \in \mathbb{C}$ を複素平面上で 図示せよ.

(3) $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ として, Euler の公式を用いて,

$$e^{\sqrt{-1}(\theta+\eta)} = e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot e^{\sqrt{-1}\eta} \quad (4)$$

という式を書き直せ. すなわち, (4) 式の両辺の実部と虚部を求めて, それらを等式で結んでみよ.

♣ 裏もあります.

問2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数とする. このとき, 以下の間に答えよ.

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, 微積分学の基本定理より,

$$\int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0)$$

となることが分かるので,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \quad (5)$$

と表わせることが分かる. このとき, $C \in \mathbb{R}$ を定数として, (5) 式の左辺の積分を,

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t)dt &= \int_0^x 1 \cdot f'(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{d}{dt}\{(t+C)\} \cdot f'(t)dt \end{aligned}$$

と考えると, 部分積分を試みることで,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \quad (6)$$

と表わせることを示せ. (与えられた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 定数 C をどのような値に選べば, (6) 式が得られることになるのかを考えてみよ.)

(2) 全く同様にして, さらに, 部分積分を試みることで,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!} \int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt$$

と表わせることを示せ.

(3) 必要ならば, さらに部分積分を繰り返した結果を具体的に求めてみることで, 同様の操作を n 回繰り返したときに, どのような式が得られることになるのか「予想」を立ててみよ. そして, 予想が立ったなら, 数学的帰納法を用いて, その予想が正しいことを確かめてみよ.

[参考: 部分積分の公式]

何度でも微分できる二つの関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $g(t)h(t)$ という積の微分は,

$$(g(t)h(t))' = g'(t)h(t) + g(t)h'(t) \quad (7)$$

というように計算できる. このとき, $a, b \in \mathbb{R}$ として, (7) 式の両辺を a から b ま
で積分した式を適当に移項すると,

$$\int_a^b g'(t)h(t)dt = [g(t)h(t)]_a^b - \int_a^b g(t)h'(t)dt \quad (8)$$

という式が得られる. この (8) 式を「部分積分の公式」という.