Sセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その１) の略解

問 1.

(1) いま, $f(x) = \cos x$ であるとすると,

$$\begin{aligned}\cos(x+h) - \cos x &= \cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x \\ &= \cos x \cdot (\cos h - 1) - \sin x \sin h\end{aligned}$$

となることが分かりますから,[1]

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(2) 全く同様に, $f(x) = \sin x$ であるとすると,

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= \sin x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \sin h\end{aligned}$$

となることが分かりますから,[2]

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} \\ &= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(3) いま, $\triangle OAB$ の面積, 扇形 OAD の面積, $\triangle OCD$ の面積は, それぞれ, $\frac{1}{2}\cos h \sin h$, $\frac{1}{2}h$, $\frac{1}{2}\tan h$ となることが分かりますから,

$$\frac{1}{2}\cos h \sin h \leq \frac{1}{2}h \leq \frac{1}{2}\tan h \tag{1}$$

[1] 二番目の等号では,「$\cos x$ の現われる項」と「$\sin x$ の現われる項」に分けてみました.

[2] 二番目の等号では,「$\sin x$ の現われる項」と「$\cos x$ の現われる項」に分けてみました.

となることが分かります.[3]

(4) いま,

$$\tan h = \frac{\sin h}{\cos h}$$

であることに注意して, (1) 式の二つの不等式を, それぞれ, $\frac{\sin h}{h}$ について解いてみると,

$$\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq \frac{1}{\cos h} \tag{2}$$

となることが分かります. よって, (2) 式で, $h \to 0$ としてみることで,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \tag{3}$$

となることが分かります. また,

$$\begin{aligned}
\cos h - 1 &= \cos\left(2 \cdot \tfrac{h}{2}\right) - 1 \\
&= \cos^2 \tfrac{h}{2} - \sin^2 \tfrac{h}{2} - 1 \\
&= -\sin^2 \tfrac{h}{2} - (1 - \cos^2 \tfrac{h}{2}) \\
&= -\sin^2 \tfrac{h}{2} - \sin^2 \tfrac{h}{2} \\
&= -2\sin^2 \tfrac{h}{2}
\end{aligned}$$

と表わせることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\
&= \frac{-2\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} \\
&= -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{4}$$

と表わせることが分かります. よって, (4) 式から,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin \frac{h}{2} \right\} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \sin \frac{h}{2}
\end{aligned}$$

[3] ここで, 扇形 OAD の面積が $\frac{1}{2}h$ となることは, 例えば, 次のように考えることで分かります. いま, 半径が 1 の円の面積は π となることに注意します. そこで, まず, $h = \pi$ のときを考えてみます. すると, 扇形は円全体の $\frac{1}{2}\left(= \frac{\pi}{2\pi}\right)$ を占めることになりますから, その面積も円の面積の $\frac{1}{2}$ 倍となり, $\frac{\pi}{2}$ となることが分かります. 全く同様にして, 扇形の頂点の角度が h であるとすると, 扇形は円全体の $\frac{h}{2\pi}$ を占めることになりますから, その面積も円の面積の $\frac{h}{2\pi}$ 倍となり, $\pi \cdot \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$ となることが分かります.

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{k \to 0} \frac{\sin k}{k} \cdot \lim_{k \to 0} \sin k \qquad (k = \tfrac{h}{2} \text{ と表わした. }) \\
&= (-1) \cdot 0 \qquad ((3) \text{ 式より}) \\
&= 0 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(5) (1), (2) の結果から,

$$
\begin{cases}
(\cos x)' = \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}, \\
(\sin x)' = \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}
\end{cases}
$$

となることが分かります. また, (4) の結果から,

$$
\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \ \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0
$$

となることが分かります. よって, これらの結果を合わせることで,

$$
\begin{cases}
(\cos x)' = -\sin x, \\
(\sin x)' = \cos x
\end{cases}
$$

となることが分かります.

(6) いま, 指数関数 $f(x) = a^x$ の指数法則に注意すると,

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= a^{x+h} - a^x \\
&= a^x \cdot a^h - a^x \\
&= a^x \cdot (a^h - 1)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かりますから,

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \right\} \\
&= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります. よって,

$$
C = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}
$$

として,

$$
(a^x)' = Ca^x
$$

となることが分かります.

(7) いま, $f(0)=a^0=1$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

問 2.

(1) いま, 何度でも微分できる関数 $f(x)$ が,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \tag{7}$$

というように表わせると仮定します. このとき, 勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して, (7) 式の両辺を n 回微分してみると,

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 2a_{n+1}x+\cdots \tag{8}$$

となることが分かります. よって, (8) 式の両辺で $x=0$ としてみることで,

$$f^{(n)}(0)=n!a_n$$

となることが分かりますから,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

となることが分かります. したがって, 関数 $f(x)$ が「化ける」べき「多項式の姿」は,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

となることがもっともらしいことが分かります.[4]

(2) それぞれの関数に対して, $f^{(n)}(0)$ という値を具体的に求めてみると,

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\cdots \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots \end{aligned}$$

という「多項式の姿」に「化ける」のがもっともらしいことが分かります.

[4] もう少し詳しいことについては「数学 IB 演習 (第 2 回) の略解：p.3, 4 節」を参照して下さい.

(3) (2) で「当たり」を付けた「多項式の姿」を微分してみると,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)' = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)' = -\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$
$$\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)' = \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

となることが分かります.

(4) 「多項式の姿」を用いて, $e^{\sqrt{-1}\,\theta}$ という値を実部と虚部に分けて考えてみると,

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\,\theta} &= 1+\sqrt{-1}\,\theta+\tfrac{(\sqrt{-1}\,\theta)^2}{2!}+\tfrac{(\sqrt{-1}\,\theta)^3}{3!}+\tfrac{(\sqrt{-1}\,\theta)^4}{4!}+\tfrac{(\sqrt{-1}\,\theta)^5}{5!}+\tfrac{(\sqrt{-1}\,\theta)^6}{6!}+\cdots \\ &= \left(1-\tfrac{\theta^2}{2!}+\tfrac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+\sqrt{-1}\,\left(\theta-\tfrac{\theta^3}{3!}+\tfrac{\theta^5}{5!}-\cdots\right) \\ &= \cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta \end{aligned}$$

となることが分かります.

三角関数や指数関数など「基本的な関数の微分」については「微分の計算法について：p.1, 1 節」を参照. また,「Taylor 展開の基本的な考え方」については,「数学 IB 演習 (第 2 回) の略解： p.3, 4 節」を参照. さらに,「三角関数や指数関数の Taylor 展開」, 及び, 関連する話題については,「数学 II 演習 (第 2 回)：p.15, 8 節；p.16, 9 節；p.18, 10 節」を参照.