S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題（その１）

問 1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = \cos x$ のとき, 三角関数の加法定理を用いて, $f(x+h) = \cos(x+h)$ を書き直すことで,

$$(\cos x)' = \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

と表わせることを示せ.

(2) $f(x) = \sin x$ のとき, 三角関数の加法定理を用いて, $f(x+h) = \sin(x+h)$ を書き直すことで,

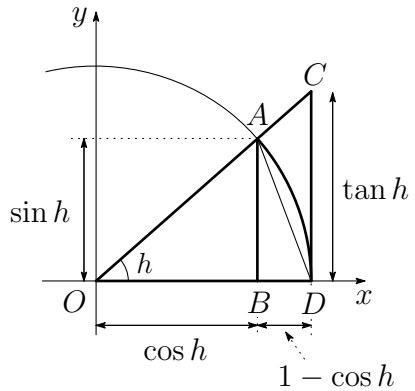
$$(\sin x)' = \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

と表わせることを示せ.

(3) 図のように, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点を,

$$O = (0,0),\ A = (\cos h, \sin h),\ B = (\cos h, 0),\ C = (1, \tan h),\ D = (1,0)$$

と定める. このとき,



$$(\triangle OAB \text{ の面積}) \leq (\text{扇形 } OAD \text{ の面積}) \leq (\triangle OCD \text{ の面積})$$

となることに注意して,

$$\frac{1}{2} \cos h \sin h \leq \frac{1}{2} h \leq \frac{1}{2} \tan h$$

となることを示せ.

(4) (3) の結果を用いて,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

を求めよ. また, この結果と,

$$\begin{aligned}\cos h - 1 &= \cos\left(2\cdot\tfrac{h}{2}\right) - 1\\ &= \cos^2\tfrac{h}{2} - \sin^2\tfrac{h}{2} - 1\\ &= -2\sin^2\tfrac{h}{2}\end{aligned}$$

となることを用いて,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$$

を求めよ.

(5) (1), (2), (4) の結果を合わせて,

$$\begin{cases}(\cos x)' = -\sin x,\\ (\sin x)' = \cos x\end{cases}$$

となることを示せ.

(6) $0 < a \in \mathbb{R}$ を正の実数として, 指数関数 $f(x) = a^x$ を考える. このとき, 指数法則を用いて,

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x \cdot a^h$$

と書き直して考えることにより,

$$C = \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

として,

$$(a^x)' = Ca^x$$

となることを示せ.

(7) (6) で現われた定数 C は, $f(x) = a^x$ として,

$$C = f'(0)$$

と解釈できることを示せ.

♣ 特に, $C = 1$ となるような a の値を, すなわち, $f(x) = a^x$ の原点 $x = 0$ における接線の傾き $f'(0)$ が $f'(0) = 1$ となるような a の値を**自然対数**と呼び, e と表わす. このとき,

$$(e^x)' = e^x$$

というように微分の結果が最も簡明な形となる.

問 2.

(1) 何度でも微分できる関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

というように「(次数が無限大の) 多項式の姿」に「化ける」としたら, どのような姿に「化ける」のがもっともらしいか「当たり」をつけてみよ. すなわち, (1) 式の両辺を x に関して何度か微分してから, $x = 0$ とすることで, それぞれの係数 a_n がどのような値になるのがもっともらしいのか「当たり」をつけてみよ.

(2) (1) の結果を用いて, $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ が「(次数が無限大の) 多項式の姿」に「化ける」としたら, どのような姿に「化ける」のがもっともらしいか「当たり」をつけてみよ.

(3) (2) で「当たり」を付けた $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ の「多項式の姿」について,

$$\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x \end{cases}$$

という関係式が成り立っていることを確かめてみよ. ただし, 変数 x に関する微分を $(\cdot)'$ と表わした.

(4) 「多項式の姿」を用いることで, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対しても, e^z という値を,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad \in \mathbb{C}$$

という式によって定める. このとき, $z = \sqrt{-1}\,\theta$, $(\theta \in \mathbb{R})$ を純虚数として, $e^{\sqrt{-1}\,\theta}$ の実部と虚部がどうなるかを考えることにより,

$$e^{\sqrt{-1}\,\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta$$

となることを確かめてみよ.