「行列」ってなに？ おもしろいの？

牛腸(ごちょう) 徹(とおる)　　(東京大学大学院数理科学研究科)

目 次

第 I 部　「行列」と「連立 1 次方程式」 2

1　はじめに 2

2　「連立 1 次方程式」とは 3

3　「行列」とは 8

4　「行列」を用いて、「連立 1 次方程式」を見直すと 12

5　「行列」の「足し算」、「定数倍」、「掛け算」について 17

6　「行列」の「逆数」とは 26

7　「行列」の「逆数」を求めるには 35

8　「基本変形」のコツ 40

9　「基本変形」を用いて、直接、「連立 1 次方程式」を解くには 50

第 II 部　「行列」と「数列」の「漸化式(ぜんかしき)」 58

10　「数列」に対する「漸化式」とは 58

11　「行列」を用いて、「漸化式」を見直すと 64

12　「ケーリー・ハミルトンの定理」とは 67

13　A^n を求めるには 75

14　高校数学の解法と比べると 87

15　おわりに 102

第I部
「行列」と「連立1次方程式」

1 はじめに

皆さんも、毎日、学校で、数学を始め、色々なことを学ばれているのではないかと思いますが、そうした皆さんに対して、何か数学のおもしろい話をしてほしいという依頼が、突然、私のもとに降ってきました。そこで、あれこれと考えてみたのですが、数学の専門的な知識の中から話題を選んで「だいたいこんな雰囲気ですよ。」という感じの話をするよりも、皆さんが普段学ばれている数学の少しだけ先の数学を選んで、「数学にはこんな概念もあって、例えば、こんなふうに活躍しますよ。」という概略を講演ではご説明して、それと同時に、「もし、ご興味があるようでしたら、今日、自宅に戻られてから、早速勉強を始めてみることもできますよ。幸い学校もお休み期間中ですし。(塾で忙しいという方もいらしゃるかもしれませんが … 。)」という感じで、**もう少し詳しく数学的な内容をご説明した冊子を「おみやげ」としてお渡ししてみる**のはどうかなと思いました。

そうした考えを、何人かの人に話したところ、「それは講演会の趣旨とは違う。参加者は、数学の授業を受けることを期待してやって来るのではないのだから … 。」と、親切にも、私の無謀な試みを止めようとしてくれた人もいるのですが、幸か不幸か、今回の講演会の責任者である高木寛通さんには、「それはおもしろいのではないか。」と賛同の言葉をいただきました。私としては、「数学のおもしろさを伝えるためには、やはり数学自身に語ってもらうのが一番なのではないかな。」と思っているのですが、そうした私の考えが、どこまで妥当な考えなのかを皆さんを通して「実験」してみようと思いました。

そこで、以下では、**「行列」**という概念を選んで、「行列」とは何かということから始めて、「行列」を用いることで色々な数学的な事柄が理解しやすくなるという一端を、具体的な例を通してご説明してみようと思います。その過程で、「一番簡単な場合のイメージで、より複雑な場合も理解しようとする」という現代数学の「やり方」[1]にも少しだけ触れることができるのではないかなと思います。

なお、皆さんの中には、いきなり教科書よりも厚い「おみやげ」を渡されて、少なからず、たじろがれていらっしゃる方も多いのではないかと思います。私としても、一度に全部を読んでいただくということは全く想定していませんし、ご興味を持たれた方が、ご興味を持たれた部分を、ご自分のペースで読み進めていただければ、それで良いのではないかなと思っています。

実は、今回の講演会の一週間ほど前に、高木さんに、私の書きかけの長大な原稿に二度までも目を通していただいて、色々と有益な助言をいただきました。中でも、文章に小見出しを付けた方が、読み手にとってずっと読みやすくなるのではないかというご指摘をいただき、私としても「なるほど、その通りだな。」と思いましたので、早速、高木さんのご

[1]これを、専門用語では「一般化」とか「抽象化」とか言ったりします。

意見を取り入れて、小見出しを付けてみました。私としては、他に何か教科書などを参照しなくとも、焦らずに、ご自分のペースで読み進んでいただければ、中学生の皆さんにも、かなりの程度分かっていただけるのではないかなと思っていますが、最初から順番に読んで行くのは「しんどい」と思われる方は、小見出しを参考にしながら、ご自分の興味に応じて拾い読みしてみるという読み方もできるのではないかなと思います。

数学に限らず、新しい考え方や概念が頭に馴染んでいくには、それ相応の時間が掛かるものですから、私としては、「分かったこと」を大切にしながら、ご自分のペースで、少しずつ、少しずつ、前に進んで行かれるのが良いのではないかと思います。それから、数学をより良く理解するためには、頭で考えるだけでなく、「手で考える」ということも、とても大切なことですから、ご自分のペースで、じっくりと取り組みたいと思われる方は、紙やノートを用意して、ご自分の手を動かしながら、計算などを一緒に「追体験」してみると、「なるほど、昔の数学者も、なかなか面白いことを考えましたね。」と、知らず知らずのうちに、口もとに笑みが浮かんでいるということもあるかもしれません。

なお、話の構成としては、6 節までが「行列」に関する基本事項ですので、そこまでは順番に読んでいただくのが良いのではないかなと思いますが、その後は、引き続き、連立 1 次方程式の話を読み進めたい方は、7 節に進み、先に「数列」の話を読みたい方は、7 節以下を飛ばして、10 節に進むという読み方もできるのではないかと思います。

2　「連立 1 次方程式」とは

さて、「行列」とは何かということをご説明するためには、「行列」の「ふるさと」である「連立 1 次方程式」に結び付けてご説明するのが良いように思います。そこで、すでにご存じの方も多いと思いますが、まずは、**「連立 1 次方程式」とは何か**ということからご説明してみることにします。

- **何で、「行列」ってカギカッコが付いているの？**

ここまで読んできて、皆さんの中には、「「行列」、「行列」と、何で毎回、毎回、カギカッコ「　」が付いているの？」と気になっている方もいらっしゃるのではないかなと思います。

実は、だいぶ前に、高木さんの方から、「ポスターを作らないといけないので、とにかく、講演のタイトルだけでも早く決めて欲しい」という依頼があって、「行列って何？ おもしろいの？」というのではどうでしょうかと、取りあえず、講演タイトルを紙に書いて高木さんの部屋まで持って行ったことがありました。そのとき、高木さんは、私の方の講演の意図などを忍耐強く聞いて下さった上で、紙の上に書かれたタイトルを見ながら、しばし身じろぎもせずに熟考し、何も言わずに、行列という文字に、カギカッコ「　」を加えられて、「行列」というように「赤ペン」を入れられました。

高木さんのご指摘は、行列のままでは、例えば、ディズニーランドのアトラクション待ちの長い行列というように、日常用語の行列と勘違いされる可能性もあるのではないかということでした。私の講演タイトルにある行列は、数学用語としての行列のことですから、カギカッコ「　」を付けて、「行列」とした方が勘違いが防げるのではないかということ

でした。それから、また、私の講演趣旨の「柔らかい感じ」がより出るのではないかと、「何？」の部分も「なに？」というように「赤ペン」を入れられました。

私としては、大学院生時代から落語の寄席に通われている高木さんの感性に信頼を寄せていますし、私自身も、全くご指摘通りだなと思いましたので、「「行列」ってなに？ おもしろいの？」という講演タイトルに決定したというわけです。

そのようなわけで、ここまでは、数学用語としての行列を、「行列」というようにカギカッコ「　」を付けて書いてきましたが、以下では、数学用語としての行列しか登場しませんので、本文中では、カギカッコ「　」を外して、単に、**行列**と表わすことにします。また、行列と同様に、日常用語ではなく、数学用語として使っている言葉については、その言葉が最初に登場したときに、例えば、**「変数」**というように太文字にすることで、その言葉を数学用語として使っていることを表わすことにしようと思います。なお、部や節の表題などでは、どのような数学的な概念が説明されているのかが分かりやすいように、例えば、「連立 1 次方程式」というように、数学用語にカギカッコ「　」を付けて表わそうと思います。

- **方程式の方法**

さて、皆さんの中にもご存じの方が多いように、例えば、

$$2x = 5 \tag{1}$$

というような**変数**を含む等式のことを**方程式**と呼んだりします。ここで、変数とは、(1) 式で言えば、x のことですが、方程式を解くまでは、「x は 1 かもしれない。あるいは、2 かもしれない。」というように、色々な可能性を想定して考えているので、「値が色々に変わりうる」という意味で「変数」と呼ばれます。一方、(1) 式における 2 や 5 のように、最初から、確定した値が決まっていると想定されている数のことを**係数**と呼んだりします。

例えば、ケーキを 2 つ注文したときに、料金が 5 百円だったとして、ケーキ 1 つの値段は何百円だったのだろうと思ったとします。皆さんは、普段から、そうした計算に慣れていらっしゃるので、即座に、5 百円を 2 で割って、

$$\frac{5}{2}\text{百円} = 2.5\ \text{百円} = 250\ \text{円}$$

と答えを出されるわけですが、**もう少し複雑な場合にも対処できるように、少し「愚直に」考えてみようというのが「方程式の方法」です。**

すなわち、最初の段階では、ケーキの値段は、1 百円かもしれないし、2 百円かもしれないしというように、色々な可能性が想定されますから、この色々な可能性の想定されるケーキの値段を、仮に、$\boldsymbol{x}$ 百円と表わしてみます。このとき、最初から確定した値が決まっているのは、「ケーキを **2** つ注文したときに、料金が **5** 百円だった」というときの **2** と **5** という数字ということになります。そこで、ケーキの値段 x 百円は、まだ分からないものの、取りあえず、「ケーキを 2 つ注文したときに、料金が 5 百円だった」という状況を式にして表わしてみると、

$$2x = 5 \tag{2}$$

ということになります。こうして、最初の状況が、(2) 式という変数 x を含む方程式として表わされることになります。

一旦、状況が (2) 式のように方程式で表わされると、後は、ケーキのことや、ケーキを 2 つ注文したことや、料金が 5 百円だったことなど、具体的な状況のことはすべて忘れて、**純粋に数式としての (2) 式を解く**ということを考えればよいわけです。今の場合は、(2) 式の両辺を 2 で割り算することで、

$$x = \frac{5}{2}$$

と解けるというわけです。

このように、

方程式の方法

(イ) 最終的に知りたい量を、最初の段階では色々な可能性の想定される変数として、状況を数式で表わすことで方程式を立てる。

(ロ) 最初の具体的な状況は忘れて、純粋に数式として (イ) で得られた方程式を解く。

という 2 つのステップを通して、知りたい量を求めるということが「方程式の方法」のわけです。皆さんが、現在、中学校、高校で学ばれている数学の大きな目標のひとつは、**色々な設定で、状況を数式で表わして方程式を立てることができるようになる**ということと、**純粋に数式としての方程式を解くことができるようになる**ということにあるのではないかと思います。そうした「方程式の方法」をマスターすることにより、将来、自分が知りたいと思った量を自分で求めることができるようになるというわけです。

• 数式を表わすときの規則

さて、変数 x を含む方程式には、例えば、

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{3}$$

という方程式のように、式の中に x だけでなく、

$$x^2 = x \cdot x \tag{4}$$

のように、x を 2 回掛けた ***x* の 2 乗**（にじょう） x^2 が登場する方程式も考えることができます。数学では、「足し算」や「掛け算」などが頻繁（ひんぱん）に登場しますが、「足し算」や「掛け算」の記号を律義（りちぎ）に書くことにすると、例えば、(3) 式も、

$$x \times x - 5 \times x + 6 = 0 \tag{5}$$

というように大変見づらい形になってしまいます。そこで、「掛け算」を「×」ではなく、単に「·」で表わすという工夫がなされました。すると、(5) 式は、

$$x \cdot x - 5 \cdot x + 6 = 0 \tag{6}$$

という形で表わされることになり、「随分、マシな」形になります。とはいえ、これでもまだ少し見づらいですから、さらに、

数式を表わすときの規則

(イ) 変数どうしの「掛け算」は、(4) 式のように変数の右上に、その変数を何回掛け算したのかを表わす数字を書いて表わす。

(ロ) (6) 式の $\boldsymbol{5 \cdot x}$ を $\boldsymbol{5x}$ と表わすというように、係数と変数の間の「$\cdot$」は省略して表わす。

という規則を導入することで、(6) 式も、

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{7}$$

というように、スッキリした形で表わすことができます。

● 方程式の次数

ここで、例えば、(4) 式の x^2 がその例になりますが、上の (イ) という規則のもとでの表わし方を**指数表示**（しすうひょうじ）と呼んだり、何回掛け算したのかを表わす変数の右上の数字を**指数**（しすう）と呼んだりします。例えば、x^2 の場合、x の右肩には 2 が乗っていますので、x^2 の指数は 2 ということになります。また、ここが少し紛らわしいところですが、x^2 を「単純に数式だ。」と思ったときには、x^2 の指数である 2 のことを x^2 の**次数**（じすう）と呼んだりもします。皆さんの中にも、(7) 式のような方程式を **2 次方程式**（にじほうていしき）と呼んだりするということをご存じの方も多いのではないかと思いますが、その意味は、**(7) 式に登場する変数 $\boldsymbol{x}$ の指数のうち、最大のものが 2 であるような方程式である**ということです。すなわち、(7) 式では、変数 x は、x^2 と「$5x$ の中の x」という形で登場していますが、x^2 の指数は 2 で、$x\,(= x^1)$ の指数は 1 ですから、最大の指数は 2 というわけです。そうした視点で、上で考えた

$$2x = 5 \tag{8}$$

という方程式を見てみると、変数 x は「$2x$ の中の x」という形でしか登場していませんから、変数 x の最大の指数は $x(= x^1)$ の 1 ということになり、(8) 式の方程式は **1 次方程式**（いちじほうていしき）ということになります。

● 連立 1 次方程式

さて、皆さんの中の多くの方がご存じのように、方程式の変数は必ずしも 1 つであるとは限りません。例えば、太郎君が、ノートを 1 冊とペンを 2 本買ったとき、料金は 4 百円になり、花子さんが、ノートを 2 冊とペンを 3 本買ったとき、料金は 7 百円になったとして、ノート 1 冊の値段とペン 1 本の値段は、それぞれ、いくらだったのだろうと思ったとします。このとき、前と同様に、「方程式の方法」にもとづいて、状況を方程式で表わしてみます。

すると前のケーキの場合と同様に、最初の段階では、ノートの値段は、「1 百円かもしれないし、2 百円かもしれないし。」というように、色々な可能性が想定されますから、この色々な可能性の想定されるノートの値段を、仮に、$\boldsymbol{x}$ 百円と表わしてみます。また、最初の段階では、ペンの値段も、「1 百円かもしれないし、2 百円かもしれないし。」という

ように、色々な可能性が想定されますから、この色々な可能性の想定されるペンの値段を、ノートの値段と区別して、仮に、$\boldsymbol{y}$ 百円と表わしてみます。このとき、最初から確定した値が決まっているのは、「太郎君が、ノートを **1** 冊とペンを **2** 本買ったとき、料金は **4** 百円になった。」というときの **1** と **2** と **4** という数字と、「花子さんが、ノートを **2** 冊とペンを **3** 本買ったとき、料金は **7** 百円になった。」というときの **2** と **3** と **7** という数字ということになります。

そこで、ノートの値段 x 百円とペンの値段 y 百円は、まだ分からないものの、取りあえず、「太郎君が、ノートを 1 冊とペンを 2 本買ったとき、料金は 4 百円になった。」という状況を式にして表わしてみると、

$$x + 2y = 4 \tag{9}$$

となり、「花子さんが、ノートを 2 冊とペンを 3 本買ったとき、料金は 7 百円になった。」という状況を式にして表わしてみると、

$$2x + 3y = 7 \tag{10}$$

ということになります。すなわち、状況は、(9) 式と (10) 式を一緒にして、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{11}$$

という二つの式で表わされることになります。このように、一つの方程式だけでなく、例えば、(9) 式と (10) 式というように、いくつかの方程式を同時に満たすような状況を考えることを**連立方程式**（れんりつほうていしき）と呼ぶことは、皆さんの中にもご存じの方が多いのではないかと思います。

また、それぞれの変数 x と y が、方程式の中で、どのような指数を持って登場しているかを見てみると、(9) 式では、変数 x は、$x\,(= x^1)$ としてだけ登場していますので、その指数は 1 で、変数 y は、「$2y$ の $y\,(= y^1)$」としてだけ登場していますので、その指数は 1 ということになります。すなわち、変数 x も変数 y も最大指数が 1 としてしか登場しませんから、(9) 式の方程式は 1 次方程式ということになります。全く同様に、(10) 式では、変数 x は、「$2x$ の $x\,(= x^1)$」としてだけ登場していますので、その指数は 1 で、変数 y は、「$3y$ の $y\,(= y^1)$」としてだけ登場していますので、その指数は 1 ということになります。すなわち、変数 x も変数 y も最大指数が 1 としてしか登場しませんから、(10) 式の方程式も 1 次方程式ということになります。したがって、(11) 式の連立方程式に現われている二つの方程式は、どちらも 1 次方程式ということになります。この (11) 式のように、それぞれの方程式が 1 次方程式であるような連立方程式を**連立 1 次方程式**（れんりついちじほうていしき）と呼ぶことも、皆さんの中にもご存じの方が多いのではないかと思います。

- **消去法**

こうした連立方程式を地道に解くためには、**消去法**（しょうきょほう）によればよいということもご存じの方が多いのではないでしょうか。すなわち、今の場合、例えば、(9) 式を、

$$x = 4 - 2y \tag{12}$$

というように、x について解いてやり、(12) 式を (10) 式に代入することで、

$$2(4 - 2y) + 3y = 7 \tag{13}$$

という式が得られます。[2] 後は、(13) 式を整理してやると、

$$8 - 4y + 3y = 7 \tag{14}$$

となりますから、

$$y = 1 \tag{15}$$

となることが分かります。そこで、(15) 式を (12) 式に代入することで、

$$x = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \tag{16}$$

となることも分かります。したがって、(15) 式と (16) 式から、(11) 式という連立 1 次方程式の**解**（かい）は、

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \tag{17}$$

となることが分かります。実際、(17) 式を、それぞれ、(9) 式、(10) 式に代入してみると、

$$2 + 2 \cdot 1 = 4$$
$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

となることが分かりますから、$x = 2$, $y = 1$ が (11) 式という連立 1 次方程式の解であることが分かります。以上より、ノート 1 冊の値段は 2 百円であり、ペン 1 本の値段は 1 百円であることが分かりました。

3　「行列」とは

さて、ここまでのお話の内容は、中学校の数学で扱われる内容ですから、皆さんの中にも、よくご存じの方が多いのではないかと思います。ここで、問題は何かというと、こうした連立 1 次方程式は、基本的には上で見たような消去法を用いて解けるわけですが、**変数の数が多くなったり、連立する方程式の数が多くなったりすると、段々と難しい方程式になるように見える**ということです。例えば、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{18}$$

[2] こうして、(12) 式を用いて、(10) 式から x という変数を**消去**できますから、このような方法を**消去法**と呼ぶわけです。

という変数が二つで二つの式からなる連立 1 次方程式に比べると、

$$\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ x+2y+2z+3w=4 \\ 2x+y+3z+2w=7 \\ 4x+3y+2z+3w=8 \end{cases} \tag{19}$$

という変数が四つで四つの式からなる連立 1 次方程式は見かけが随分（ずいぶん）と難しくなったように見えます。基本的には、(19) 式の連立 1 次方程式も、消去法を用いて、順番に変数を消去していけば、解を求めることができるわけですが、計算を進めるうちに、自分がどの変数を残して、どの変数を消去しようとしていたのか分からなくなったり、そうして次々に得られる数式の中で、どれとどれが独立な式だったのか分からなくなったりと、色々な混乱が生じてくるかもしれません。

• どうして「行列」という概念が導入されたのか

そこで、こうした混乱を防ぐために、**そもそも、連立 1 次方程式とはどのようなことを意味している方程式なのだろうか**とか、**そうした連立 1 次方程式をより効率よく解くにはどうしたらよいだろうか**ということが考えられました。そして、こうした考察を助けてくれる概念として、**行列**という概念が導入されました。

ここで、話の出発点は何かというと、**「(18) 式の連立 1 次方程式と (19) 式の連立 1 次方程式を見比べると、「明らかに」(19) 式の連立 1 次方程式の方が難しくなったように見えますが、それは本当だろうか？」**ということです。そこで、状況を慎重（しんちょう）に見直してみると、(18) 式の連立 1 次方程式より、(19) 式の連立 1 次方程式の方が難しく見えるのは、

(18) 式より (19) 式が難しそうに見える理由

(イ) 連立する方程式の数がより多い。

(ロ) ひとつひとつの方程式の形がより複雑そうに見える。

という二つの点にありそうなことが分かります。

そこで、まず、(ロ) という点について、もう少し詳しく見てみることにします。例えば、(18) 式の連立 1 次方程式に登場する

$$x+2y=4 \tag{20}$$

という方程式より、(19) 式の連立 1 次方程式に登場する

$$4x+3y+2z+3w=8 \tag{21}$$

という方程式の方がより複雑そうに見えるのはどうしてかと考えてみると、単純には、変数の数が四つに増えて、(21) 式の左辺が四つの**項**（こう）の和になったからだと考えられますが、もう少し慎重に考えてみると、**項の数が増えたことに伴って、変数 x, y, z, w と係数 $4, 3, 2, 3$ が、それぞれ、バラバラに書かれているからではないか**と思われます。

- **「行列」の「掛け算」の「ふるさと」**

そこで、1 次方程式の左辺を、**「変数は変数で、係数は係数で、まとめて表わす記法を導入したらどうだろうか。」**ということが考えられました。例えば、(20) 式の左辺には、x と y という変数と 1 と 2 というそれぞれの変数に対する係数が登場しているわけですが、これらの変数と係数を、それぞれ、ひとまとめにして、(20) 式の左辺を、

$$x + 2y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{22}$$

というように表わすという記法を導入したらどうだろうかというわけです。すなわち、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

という係数をひとまとめにした量と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という変数をひとまとめにした量を導入し、それらの間の掛け算を、

「行列」の「掛け算」の「ふるさと」

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot x + 2 \cdot y = x + 2y \tag{23}$$

と定めてみるということです。[3]　こうした記法を導入してみると、(20) 式の左辺も、

$$x + 2y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{係数}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{変数}} \tag{24}$$

というように、

「係数」×「変数」

という単純な形に表わされることになります。ここで、現われた

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

や

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{26}$$

のように、いくつかの数を縦横に並べてひとくくりにしたものを、一般に、**行列**(ぎょうれつ)と呼びます。ここで、並べる数は、(25) 式のように、きちんと値が決まっている数のこともありますし、(26) 式のように、色々な可能性を想定して考えている数である変数の場合もあります。

[3] $5 \cdot x = 5x$ というように、係数と変数の間の掛け算の場合、「$\cdot$」という記号は省略されるように、誤解が生じない場合には、「行列の世界」でも掛け算の記号「$\cdot$」は省略して表わしたりします。

- **「行列」を用いて連立 1 次方程式を表わすと**

こうした行列の記法を用いると、(18) 式の連立 1 次方程式の一番目の式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \tag{27}$$

というように表わせることになります。全く同様に考えると、(18) 式の連立 1 次方程式の二番目の式の左辺は、

$$2x + 3y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{28}$$

というように表わすことができますので、(18) 式の連立 1 次方程式の二番目の式は、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \tag{29}$$

というように表わすことができます。ここで、(27) 式と (29) 式の左辺を見比べると、二つの式で、係数の部分は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

というように、それぞれ違いますが、変数の部分は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

というように、二つの式で共通ですから、二回も書くことはないのではないかと思われます。そこで、(27) 式と (29) 式をひとつにまとめて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{30}$$

というように表わすという記法が導入されました。[4] すなわち、(30) 式の両辺の 1 行目だけを見ると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \end{pmatrix} \tag{31}$$

というように (27) 式の 1 次方程式を表わし、(30) 式の両辺の 2 行目だけを見ると、

$$\begin{pmatrix} & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 7 \end{pmatrix} \tag{32}$$

というように (28) 式の 1 次方程式を表わすというわけです。

[4] ここでも、掛け算の記号「·」は省略して表わしています。

皆さんには、まだ、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

という行列と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という行列の掛け算をどのように定めるのかということを、きちんとご説明していませんので、(30) 式、(31) 式、(32) 式が、「一体、どういう意味か、分かったような、分からないような … 。」というあやふやなお気持ちになられている方も多いかもしれません。行列の掛け算については、この後、5 節で、もう少し詳しくご説明しようと思いますので、この段階では、行列の記法を用いると、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

という連立 1 次方程式が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

というように表わせそうだということだけ分かっていただければ構わないかなと思います。

全く同様に考えると、

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x + 2y + 2z + 3w = 4 \\ 2x + y + 3z + 2w = 7 \\ 4x + 3y + 2z + 3w = 8 \end{cases}$$

という連立 1 次方程式も、行列の記法を用いると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

というように表わせることが分かります。

4　「行列」を用いて、「連立 1 次方程式」を見直すと

さて、3 節では、行列の記法を用いると、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{33}$$

という連立 1 次方程式が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{34}$$

というように表わせるということをご説明しましたが、このままの形では、(34) 式によって、(33) 式が見やすくなったという感じが余りしないのではないかと思います。

- **「行列」をひとつの「数」と思う**

そこで、なぜ、余り見やすくなったと感じないのかと反省してみると、(34) 式では、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

というように、登場する行列の「中身」がグチャグチャと書いてあるからであることが分かります。そこで、こうした点が「目くらまし」にならないように、それぞれの行列に、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

というように名前を付けてみることにします。すなわち、(34) 式の連立 1 次方程式の係数は、細かく見れば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

というように、四つの数からできているわけですが、**(35) 式の行列自体をひとつの「数」と思って、仮に、A と名前を付けた**ということです。全く同様に、(34) 式の連立 1 次方程式の変数も、細かく見れば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{36}$$

というように、二つの変数からできているわけですが、**(36) 式の行列自体をひとつの「数」と思って、仮に、$\mathbf{x}$ と名前を付けた**ということです。さらに、(34) 式の連立 1 次方程式の右辺も、細かく見れば、

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{37}$$

というように、二つの数からできているわけですが、**(37) 式の行列自体をひとつの「数」と思って、仮に、$\mathbf{b}$ と名前を付けた**ということです。

こうして、**(34) 式の連立 1 次方程式の「係数」は A というひとつの「数」であり、「変数」も $\mathbf{x}$ というひとつの「数」であり、方程式の右辺も $\mathbf{b}$ というひとつの「数」であると考えることにより、(34) 式は、**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{38}$$

というように、非常にスッキリした形で表わせることが分かります。

全く同様に、

$$\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ x+2y+2z+3w=4 \\ 2x+y+3z+2w=7 \\ 4x+3y+2z+3w=8 \end{cases} \tag{39}$$

という連立 1 次方程式も、

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

というように登場する行列を、それぞれひとつの「数」であると考えて、それぞれに名前を付けてみることで、見かけ上は (38) 式と全く同じ、

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

という形で表わせることが分かります。

より一般に、変数の数が何個であったとしても、また方程式の数が何個であったとしても、与えられた連立 1 次方程式に登場する係数を並べてできる行列を A、変数を並べてできる行列を $\mathbf{x}$、方程式の右辺に表われる数を並べてできる行列を $\mathbf{b}$ とすると、**連立 1 次方程式は、いつでも、**

「行列」の記法を用いた連立 1 次方程式の形

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{40}$$

という形で表わされることが分かります。このことは、一体、何を意味しているのでしょうか。また、こんな考え方をして、何かの役に立つのでしょうか。

• 一番簡単な場合と見比べる

さて、2 節では、

$$2x=5$$

という変数が一つの場合の 1 次方程式を考えましたが、一番簡単な場合の連立 1 次方程式を「一般的な形」で考えると、a と b を、例えば、$a=2, b=5$ など、最初から確定した値が決まっている数として、[5]

[5] こうした数を**係数**(けいすう)と呼ぶのでした。係数や変数を文字で表わして考察するときには、その文字が、最初から確定した値が決まっていると想定される数である係数を表わしているのか、色々な可能性を想定して考えている数である変数を表わしているのかを区別するために、係数に対しては $a, b, c, \cdots$ のようにアルファベットの順番が最初の方の文字を使い、変数に対しては、$x, y, z, w, \cdots$ のようにアルファベットの順番が最後の方の文字を使うのが数学の世界での習慣になっています。

一番簡単な場合の連立 1 次方程式

$$ax = b \tag{41}$$

という形の方程式であることが分かります。ここで、(40) 式と (41) 式を見比べてみると、

$$a \rightsquigarrow A, \quad x \rightsquigarrow \mathbf{x}, \quad b \rightsquigarrow \mathbf{b}$$

というように文字が置き換わってはいますが、**本質的に同じタイプの方程式である**ことが分かります。すなわち、**(41) 式では、「a 倍すると b になる数 x は何だ？」ということを尋(たず)ねているのと同様に、一般的な連立 1 次方程式である (40) 式でも、「A 倍すると $\mathbf{b}$ になる「数」 $\mathbf{x}$ は何だ？」ということを尋ねている**ということが分かります。

3 節では、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{42}$$

という連立 1 次方程式より、

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x + 2y + 2z + 3w = 4 \\ 2x + y + 3z + 2w = 7 \\ 4x + 3y + 2z + 3w = 8 \end{cases} \tag{43}$$

という連立 1 次方程式の方が難しく見えるのは、

(42) 式より (43) 式が難しそうに見える理由

(イ) 連立する方程式の数がより多い。

(ロ) ひとつひとつの方程式の形がより複雑そうに見える。

という二つの点にあるのではないかと考えましたが、こうした「見かけの複雑さ」に「目くらまし」に合わないように、**行列の記法を用いて表わしてみると、実は、両者とも「本質的に同じタイプの方程式」である**ことが分かったというわけです。

• 連立 1 次方程式の解に「当たり」を付ける

さて、皆さんの中には、「行列の記法を用いると、連立 1 次方程式を、(40) 式のように非常にスッキリした形で表わせますよ。」と説明されても、普段、学校で勉強している数学とはイメージが違い、何か、雲をつかむような抽象的な感じがして、「それで、何かいいことがあるの？」という疑問が沸々(ふつふつ)とわいてこられている方も多いのではないかと思います。そこで、どうして数学では、このような抽象的な定式化が好まれるのかという一端を、今の例にもとづいて、少しご説明してみることにします。

皆さんも、よくご存じのように、(41) 式という一番簡単な場合の連立 1 次方程式のときには、解をすぐに求めることができます。すなわち、(41) 式の両辺を a で割り算する

ことで、

$$x = \frac{b}{a}$$

と答えを求めることができるわけです。[6] もう少し正確に言うと、(41) 式の両辺に左から、a の**逆数**(ぎゃくすう) $\frac{1}{a}$ を掛け算することで、

$$\frac{1}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} x = \frac{1}{a} \cdot b$$

となりますから、

$$x = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$$

となることが分かるというわけです。

そこで、少し大らかに推論すると、**「(40) 式も、見かけ上は (41) 式と「同じ形」をしているのだから、(40) 式の両辺に左から、「係数」$\boldsymbol{A}$ の「逆数」$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}}$ を掛け算することで、**

連立 1 次方程式の解に「当たり」を付ける

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}} \cdot \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{\boldsymbol{A}}$$

というように解を求めることができるのではないか。」と作戦が立たないかというわけです。すると、「$\frac{1}{A}$ とか、$\frac{\mathbf{b}}{A}$ とかって何？」という当然の疑問が湧いてくるわけですが、6 節でご説明するように、「数の世界」と対応させながら、しかるべく「行列の世界」を探索してみると、**行列 $\boldsymbol{A}$ の「逆数」$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}}$ という概念を定式化することができる**ことが分かります。また、**「逆数」$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}}$ が存在する場合には、(40) 式という連立 1 次方程式の解は、**

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}}{\boldsymbol{A}}$$

となることも分かります。5 節でご説明するように、実際には、「行列の世界」では、$\frac{\mathbf{b}}{A}$ のような「分数表示」は不正確なところがあるために用いられることはないのですが、こうした点や、行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ とは何であって、それを具体的にどのように求めればよいのかということについては、5 節、6 節で、順番にご説明しようと思います。

- **「行列」をひとつの「数」とみなす利点**

このように、**理解の難しい一般の場合を、理解が易しい一番簡単な場合と「同じに見える」ように定式化することで、一番簡単な場合との類推で、一般の場合の様子を調べる道が開けたりすることが、数学ではよくあります。** こうしたことが、数学で抽象的な定式化が好まれる一つの大きな理由になっています。

---

[6] 細かいことを言うと、ここでは、a は 0 ではないと仮定しました。$a = 0$ のときには、(41) 式は、

$$0 \cdot x = b \tag{44}$$

ということになりますから、b が 0 ではないときには、どんな数を x に代入しても、(44) 式は成り立ちませんので、**方程式の解は存在しない**ということになります。また、$b = 0$ のときには、どんな数を x に代入しても、(41) 式が成り立ちますので、$\boldsymbol{x}$ **がどんな数でも解になる**ということになります。

もし、皆さんが、

$$\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ x+2y+2z+3w=4 \\ 2x+y+3z+2w=7 \\ 4x+3y+2z+3w=8 \end{cases}$$

という連立 1 次方程式を、行列の記法を用いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

という形に書いたままだとすれば、両辺を、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

で割り算して、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \tag{45}$$

という式を書いてみようと思われるでしょうか。また、(45) 式の右辺を「まともに考えてみよう。」と思われるでしょうか。

練習問題 1.

次の連立 1 次方程式を、行列の記法を用いて、$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ という形に表わしてみよ。

$$(1)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+4y=5 \end{cases}, \qquad (2)\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+2z=7 \end{cases}$$

5　「行列」の「足し算」、「定数倍」、「掛け算」について

さて、4 節では、連立 1 次方程式を「見やすい形」に表わそうということから、どのように行列という概念が生まれてきたのかということをご説明しましたが、連立 1 次方程

式の話を進める前に、ここで、行列に関する一番基本的な事柄をご説明しておこうと思います。

● 「行列」の「行」と「列」

4 節で見たように、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

というように、一般に、いくつかの数を縦横に並べてひとまとめにしたものを**行列**と呼びます。このとき、横に並んだ列を行列の**行**（ぎょう）と呼び、

行列の「行」

$$1\text{行目}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad 2\text{行目}\begin{pmatrix} & & & \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ & & & \end{pmatrix}, \quad 3\text{行目}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

というように、上から順に、1 行目、2 行目、3 行目などと呼びます。全く同様に、縦に並んだ列を行列の**列**（れつ）と呼び、

行列の「列」

$$\underset{1\text{列目}}{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}}, \quad \underset{2\text{列目}}{\begin{pmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\text{列目}}{\begin{pmatrix} & & 3 & \\ & & 4 & \\ & & 5 & \end{pmatrix}}, \quad \underset{4\text{列目}}{\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 2 \end{pmatrix}}$$

というように、左から順に、1 列目、2 列目、3 列目、4 列目などと呼びます。また、(46) 式の行列の例では、行の数が 3 行で、列の数が 4 列ありますが、こうした行列を **3 行 4 列の行列**などと呼んで、その形を表わしたりします。

● 「行列」の「足し算」と「定数倍」

行列の「足し算」、「定数倍（ていすうばい）」、「掛け算」は、何行何列の行列の場合でも、全く同様に定義できるのですが、以下では、話を具体的にするために、2 行 2 列の行列を例にして、ご説明することにします。そこで、いま、例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{47}$$

という 2 つの 2 行 2 列の行列を考えたとします。このとき、行列 A と行列 B の「足し算」は、

行列の「足し算」

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように、対応した場所にある数どうしを足すことにより定義されます。また、行列 A の「定数倍」は、例えば、

行列の「定数倍」

$$
\begin{aligned}
5A &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように、並んでいるすべての数を「定数倍」することにより定義されます。

ここまでの「足し算」や「定数倍」の定義は、皆さんにも、それほど違和感(いわかん)はないのではないかと思いますが、最初に形式的に定義だけを見せられたとすると、「何これ？」と激しく違和感を感じる可能性があるのが行列どうしの「掛け算」の定義です。そうした違和感を少しでも和らげて、行列どうしの「掛け算」に馴染(なじ)みを持っていただくためには、3 節でご説明しましたように、行列の「掛け算」の「ふるさと」に戻って、ご説明してみるのがよいように思われます。

練習問題 2.

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}
$$

とする。このとき、次の行列を求めよ。

(1) $A+B$,　　(2) $2A+3B$,　　(3) $3A-2B$

- **「行列」の「掛け算」の「ふるさと」**

さて、3 節でご説明しましたように、もともと行列の記法は、

$$
x+2y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{係数}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{変数}} \tag{48}
$$

というように、「連立一次方程式の左辺を、係数は係数でひとまとめにして、変数も変数でひとまとめにして表わしてみたらどうだろうか。」というところからスタートしました。すなわち、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

という 1 行 2 列の行列と

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という 2 行 1 列の行列との「掛け算」を、

行列の「掛け算」の「ふるさと」

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot x + 2 \cdot y = x + 2y \tag{49}$$

というように定めたということですが、**一般の場合の行列どうしの「掛け算」も、この (49) 式を基礎にして定義されます。** ですから、皆さんも、「あれっ、行列の「掛け算」って、どうやるんだっけ？」と分からなくなったときには、この (48) 式や (49) 式を思い浮かべてみると、「ああ。そうだった。」と思い出しやすくなるかもしれません。

- **「行列」の「掛け算」**

そこで、再び、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{50}$$

という 2 つの行列 A と B を例にして、行列どうしの「掛け算」の定義をご説明してみることにします。いま、行列 A と B の「掛け算」を形式的に書いてみると、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{51}$$

ということになります。このとき、例えば、行列 A の 1 行目、行列 B の 1 列目だけに注目すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \\ 7 & \end{pmatrix}$$

となりますが、この 2 組の数字の並びは、(49) 式の規則に従って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$$

というように「掛け算」することができます。そこで、

$$\text{1 行目}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix}\overset{\text{1 列目}}{\begin{pmatrix} 5 & \\ 7 & \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & \\ & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 + 14 & \\ & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & \\ & \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{52}
$$

というように、行列 A の 1 行目と行列 B の 1 列目を「掛け算」した結果を、1 行 1 列目に書いてみます。

全く同様に、行列 A の 1 行目と行列 B の 2 列目に注目して、

$$
\begin{aligned}
\begin{array}{l} \text{1 行目} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \text{2 列目} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 6 \\ & 8 \end{pmatrix} \end{array} &= \begin{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & 6 + 16 \\ & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & 22 \\ & \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

というように、行列 A の 1 行目と行列 B の 2 列目を「掛け算」した結果を、1 行 2 列目に書いてみます。以下同様に、行列 A の 2 行目と行列 B の 1 列目、行列 A の 2 行目と行列 B の 2 列目に注目して、それぞれを「掛け算」した結果を、

$$
\begin{aligned}
\begin{array}{l} \\ \text{2 行目} \end{array}\begin{pmatrix} & \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{1 列目} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & \\ 7 & \end{pmatrix} \end{array} &= \begin{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & \\ 15 + 28 & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & \\ 43 & \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$
\begin{array}{l} \\ \text{2 行目} \end{array}\begin{pmatrix} & \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \text{2 列目} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 6 \\ & 8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} & \\ & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & \\ & 18 + 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & \\ & 50 \end{pmatrix} \qquad (55)
\end{aligned}
$$

というように、それぞれ、2 行 1 列目、2 行 2 列目に書いてみます。

こうして得られる 2 行 2 列の行列が、行列 A と行列 B を「掛け算」した結果であると定義します。すなわち、(52) 式、(53) 式、(54) 式、(55) 式をまとめて書くと、

行列の「掛け算」の定義

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \qquad (56)
\end{aligned}
$$

と定義するというわけです。

- **AB と BA は同じ行列になるとは限らない**

ここまで、行列をひとつの「数」とみなすということでご説明してきましたが、「行列の世界」での「掛け算」と「数の世界」での「掛け算」とは少し違う側面があります。実は、そのことが、どうして「行列の世界」では「分数表示」が用いられないのかということにも関係してきますので、ここで、そうした側面について、少しだけご説明してみることにします。

上で見たように、**行列 AB の定義は、A については「行」をもとに、B については「列」をもとにというように、A と B とを非対称(ひたいしょう)に扱っている**ことに注意して下さい。したがって、A と B の順番を入れ替えて、行列 BA を考えたときには、今度は、A については「列」をもとに、B については「行」をもとに「掛け算」の結果が計算されるということになりますから、AB の計算とは、少し趣(おもむき)の違った計算をしていることになります。こうした非対称性(ひたいしょうせい)の結果として、**「一般には、AB と BA は同じ行列になるとは限らない。」**ということが起こります。実際、今の場合、BA を計算してみると、

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 + 18 & 10 + 24 \\ 7 + 24 & 14 + 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \qquad (57)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。よって、(56) 式、(57) 式から、

$$
AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}
$$

となることが分かりますから、今の場合、

$$
AB \neq BA \qquad (58)
$$

となっていることが分かります。皆さんもよくご存じのように、「数の世界」では、例えば、

$$
2 \cdot 3 = 3 \cdot 2
$$

となるように、どんな二つの数 a と b に対しても、いつでも、

$$
ab = ba \qquad (59)
$$

という等式が成り立つわけですが、(58) 式は**「行列の世界」では、必ずしも、(59) 式のような等式が成り立つとは限らない**ということを意味しています。このように、**A と B の順番を換えると掛け算の結果が一致するとは限らないという点が「行列の世界」の一番の特徴になっています。**

練習問題 3.

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}
$$

とする。このとき、次の行列を求めよ。

(1) AB, (2) BA, (3) $(A+B)(A-B)$, (4) $A^2 - B^2$

● **連立 1 次方程式の場合**

ここでは、2 行 2 列の行列どうしの「掛け算」をご説明しましたが、一般の場合の行列どうしの「掛け算」も全く同様に考えることができます。例えば、3 節では、行列の記法を用いると、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{60}$$

という連立 1 次方程式が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{61}$$

というように表わせるということをご説明しましたが、この点をもう少し細くご説明してみます。

いま、(61) 式の左辺には、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

という 2 行 2 列の行列と

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という 2 行 1 列の行列の「掛け算」が登場していますが、この場合も、A のそれぞれの「行」と $\mathbf{x}$ の「列」に注目して、A と $\mathbf{x}$ の「掛け算」が、

連立 1 次方程式の場合の「係数」A と「変数」$\mathbf{x}$ の間の「掛け算」

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{62}$$

というように計算できます。したがって、(62) 式から、左辺の「掛け算」を実行すれば、(61) 式は、

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ということになりますから、(60) 式の連立 1 次方程式と同じことを表わしているというわけです。

- **「行列」の「掛け算」はいつでもできるとは限らない**

ここで、「行列の世界」での「掛け算」と「数の世界」での「掛け算」との違いを、もうひとつご説明してみようと思います。

上では、A と $\mathbf{x}$ を「掛け算」して $A\mathbf{x}$ という行列を考えましたが、A と $\mathbf{x}$ の順番を取り替えて、$\mathbf{x}A$ という行列を考えようとすると、今度は、$\mathbf{x}$ のそれぞれの「行」と A のそれぞれの「列」に注目して、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}A &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

という計算をすればよいことになります。ところが、ここで登場した

$$\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

というような「掛け算」は、前の行列の「行」には一つしか数が並んでいないのに対して、後ろの行列の「列」には二つ数が並んでいて、並んでいる数の個数が違っていますから、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot x + 2 \cdot y = x + 2y$$

というような計算は、もはや意味をなさないということになります。したがって、**この場合には、行列の「掛け算」は定義ができない**ということになります。

このように、行列 A と行列 B の「掛け算」はいつでも定義できるというわけではなく、**A のそれぞれの「行」に並んでいる数の個数と B のそれぞれの「列」に並んでいる数の個数が等しいとき、言い換えると、A の「列」の数と B の「行」の数が等しいときに限って、A と B の「掛け算」が定義できて、AB という行列が意味を持つ**ということになります。特に、

$$\boldsymbol{A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A, \quad \cdots}$$

など、自分自身との「掛け算」を考えることができるのは、例えば、2 行 2 列の行列というように、行列 A の行の数と列の数が等しいときだけであることが分かります。

練習問題 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、次の行列の掛け算ができるかどうかを答え、できる場合には掛け算した結果を求めよ。

(1) A^2,　　(2) B^2,　　(3) AB,　　(4) BA

6　「行列」の「逆数」とは

さて、4 節では、行列を用いて、連立一次方程式を、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{63}$$

という形で表わすことにより、(63) 式の解が、

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}}{A}$$

というように求めることができるのではないかと「当たり」を付けました。そこで、次に、**「行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ とは何か？」**ということをご説明してみることにします。

- **逆数**

皆さんもよくご存じのように、a が、$a = 2$ とか $a = 3$ のように、普通の数の場合には、a の逆数 $\frac{1}{a}$ とは何かというと、

数 a の逆数 $\frac{1}{a}$ を定める式

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \tag{64}$$

というように、**「a と掛け算すると 1 になる数」**のことでした。そこで、この (64) 式をヒントにして、「行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ とは何か？」ということを考えてみます。

- **1 という数**

いま、(64) 式の右辺には、1 という数字が表われていますが、この 1 というのは、どのような数でしょうか。すると、皆さんよくご存じのように、**1 という数の一番の特徴は、**a が、$a = 3$ とか $a = 235$ とか、どのような数であったとしても、

1 という数を定める式

$$1 \cdot a = a, \quad a \cdot 1 = a \tag{65}$$

というように、**「掛け算しても相手を変えない数」である**ということになるのではないかと思います。実は、「行列の世界」でも、**「掛け算しても相手を変えない行列」が存在している**ことが分かります。

- **「行列の世界」の 1**

行列 A が一般の形をしている場合も、全く同様に考えることができるのですが、ここでも、話を具体的にするために、A が 2 行 2 列の行列である場合を例にして、**「掛け算しても相手を変えない行列」とは何か**ということをご説明してみようと思います。

そこで、いま、a, b, c, d が、例えば、$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ など、最初から確定した値が決まっている数として、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{66}$$

という行列を考え、行列 A に、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

という行列を左から掛け算してみます。すると、5 節で見たように、$I \cdot A$ という掛け算は、

$$\begin{aligned} I \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned} \tag{68}$$

というように計算できることが分かりますから、

$$I \cdot A = A \tag{69}$$

となることが分かります。

- **抽象的な行列を用いて議論する利点**

ここで、皆さんの中には、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

や

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

のような具体的な数字が並んだ具体的(ぐたいてき)な行列ではなく、(66) 式のような**文字が並んだ抽象的(ちゅうしょうてき)な行列が登場した**ことに少なからず動揺(どうよう)された方もいらっしゃるのではないかと思います。そこで、この点について、少しご説明してみることにします。

いま、確認したいことは、A が 2 行 2 列のどのような行列であったとしても、

$$I \cdot A = A \tag{70}$$

という式が成り立つということです。このとき、例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

という具体的な行列に対して、(70) 式が成り立つことを確かめるには、

$$
\begin{aligned}
I \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned} \tag{71}
$$

という計算をしてみればよいわけですし、

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}
$$

という具体的な行列に対して、(70) 式が成り立つことを確かめるには、

$$
\begin{aligned}
I \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned} \tag{72}
$$

という計算をしてみればよいわけです。これはこれで良いのですが、2 行 2 列の行列は、いくらでもたくさん存在しますので、すべての 2 行 2 列の行列に対して、ひとつひとつ (71) 式や (72) 式のような計算をすることは原理的に不可能です。そもそも、

$$
A = \begin{pmatrix} 13847596028613 & 29374940478765 \\ 35303927280215 & 94279019284872 \end{pmatrix} \tag{73}
$$

というような行列は、余り何度も何度も書いてみようという意欲がわきません。こうした問題に応(こた)えるために、**数学では「文字を用いた抽象的な議論」というものが大変活躍(かつやく)します。**

いま、(71) 式や (72) 式のように、具体的な行列を例にして、いくつか計算をしてみると、皆さんにも、「何か、いつも同じ計算じゃん。」という感じが沸々(ふつふつ)としてくるのではないかと思います。そこで、「何が同じなんだろう。」と反省してみると、例えば、$I \cdot A$ という行列の 1 行 1 列目の数を計算するときには、いつでも、「1× 何とか ＋0× 何とか」という同じパターンが登場することが分かります。こうした共通のパターンを表わすには、(71) 式や (72) 式に表われるような

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 3$$

や

$$1 \cdot 2 + 0 \cdot 4$$

のような具体的な数字だけの式よりも、(68) 式に表われるような

$$1 \cdot a + 0 \cdot c$$

のような文字を含んだ抽象的な式の方が、1 や 0 などの共通のパターンを表わす数字が際立ちますから、より見やすくなるように思われます。**こうした共通のパターンがより見やすくなる**ということが、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{74}$$

というように、文字が並んだ抽象的な行列で議論をする第一の利点です。

さらに大きな利点は、(74) 式の a, b, c, d はどんな数でもよいわけですから、一旦、

$$\begin{aligned} I \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned} \tag{75}$$

というように計算してしまえば、後は、頭の中で、実は、$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ だったのだと考えると、(75) 式は (71) 式に化け、$a = 2, b = 7, c = 4, d = 5$ だったのだと考えると、(75) 式は (72) 式に化けというように、すべての 2 行 2 列の行列に対して、

$$I \cdot A = A \tag{76}$$

となることが確認できたということになります。特に、(73) 式のような余り何度も書きたくないような行列などに対しても、**並んでいる具体的な数字の複雑さに惑(まど)わされることなく、**

$$I \cdot A = A$$

となることが確認できることになります。

以上のような理由で、数学では、**どんな行列に対しても成り立つような共通の法則を議論するときには、(74) 式のような文字が並んだ抽象的な行列で議論を行なうことが多い**わけです。高校生の皆さんの中には、すでに、こうした抽象的な議論に慣れていらっしゃる方も多いのではないかと思いますが、中学生の方など、まだ余り慣れていらっしゃらない方は、このような抽象的な議論に出会ったときには、例えば、$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ など、**登場する文字を、自分で好きな具体的な数字に置き換えて、議論を追ってみる**と、何を議論しているのかということが、少しイメージしやすくなるかもしれません。

• 再び「行列の世界」の 1 について

そこで、議論の本筋に戻って、次に、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

という行列 A に対して、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を、今度は右から掛け算してみます。すると、前と同様に、$A \cdot I$ という掛け算は、

$$\begin{aligned} A \cdot I &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned} \tag{77}$$

というように計算できることが分かりますから、

$$A \cdot I = A \tag{78}$$

となることが分かります。

以上より、どのような 2 行 2 列の行列 A に対しても、

行列 I は「行列の世界」の 1

$$I \cdot A = A, \quad A \cdot I = A \tag{79}$$

となることが分かりましたので、

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{80}$$

という行列は、「数の世界」で 1 という数が果たす役割を「行列の世界」で果たすような行列であることが分かります。ここでは、2 行 2 列の行列をもとにご説明しましたが、一般に、

「単位行列」

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{81}$$

というように、対角線上に 1 が並んで、残りは 0 が並んでいるような行列は、(79) 式の I のように、掛け算しても相手を変えないという性質を持つことが分かり、(81) 式の行列を**単位行列**(たんいぎょうれつ)と呼んだりします。上で見てきたように、**単位行列とは「行列の世界の 1」のこと**であるわけです。

練習問題 5.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

とする。

(1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、IA を計算せよ。

(2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、AI を計算せよ。

- **行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$**

こうして、「行列の世界」にも、1 が存在することが分かりましたので、行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ が、数のときと同様に、**「A と掛け算して「行列の世界」の 1 になる行列」**として定義することができます。すなわち、**勝手にひとつ与えられた行列 A に対して、**

行列 A の「逆数」を定める式

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \tag{82}$$

となる行列 B を行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ であると考えればよいわけです。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I \\
B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I
\end{aligned} \tag{83}$$

となることが分かりますから、

$$\frac{1}{A} = B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。[7]

[7] もちろん、このとき、

$$\frac{1}{B} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **「行列の世界」で「分数表示」が用いられない理由**

さて、ここで、**「行列の世界」では、どうして、「分数表示」は用いられないのか**ということをご説明しようと思います。いま、上で見たように、行列 A の「逆数」$\frac{1}{A}$ という概念は考えることができますから、当然、二つの行列 A と B の間の「分数」$\frac{B}{A}$ も考えることはできるわけです。例えば、

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{A} \cdot B \tag{84}$$

と定めればよいわけです。ただし、これが唯一(ゆいいつ)の定め方というわけではなくて、人によっては、

$$\frac{B}{A} = B \cdot \frac{1}{A} \tag{85}$$

というように定めたいと思うかもしれません。ところが、ここで、「行列の世界」特有の問題が起こりえます。すなわち、数のときには、

$$\frac{1}{a} \cdot b = b \cdot \frac{1}{a}$$

というように、掛け算の順番をひっくり返しても掛け算した結果は変わらないので問題ないのですが、5 節で見たように、「行列の世界」では掛け算の順番をひっくり返すと掛け算した結果が異なりえますから、

$$\frac{1}{A} \cdot B \neq B \cdot \frac{1}{A}$$

という事態が起こりえます。

例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると、上で見たように、

$$\frac{1}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と考えることもできます。

$$= \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{86}$$

となることが分かります。一方、

$$\begin{aligned} B \cdot \frac{1}{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{87}$$

となることが分かります。よって、(86) 式、(87) 式から、今の場合、

$$\frac{1}{A} \cdot B \neq B \cdot \frac{1}{A}$$

となりますから、$\frac{B}{A}$ を、

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{A} \cdot B \tag{88}$$

と解釈するのか、あるいは、

$$\frac{B}{A} = B \cdot \frac{1}{A} \tag{89}$$

と解釈するのかによって、$\frac{B}{A}$ という記号が表わしている行列が異なる行列になってしまうという「困ったこと」が起きてしまいます。

このような理由で、「行列の世界」では、$\frac{B}{A}$ という「分数表示」は用いずに、

$$\frac{1}{A} \cdot B \tag{90}$$

あるいは、

$$B \cdot \frac{1}{A} \tag{91}$$

というように表わして、**どちらの順番で掛け算した行列なのかをきちんと表わす**習慣になっています。また、このように「分母」と「分子」を別々に表わすのだとすると、A の「逆数」を表わすのに、

$$\frac{1}{A}$$

というように、毎回、毎回、「A 分の 1」、「A 分の 1」と繰り返すのも少々鬱陶しいですし、紙の上に書いたりするにも、無駄に行間を取ったりして、余りメリットがありませんので、**「行列の世界」では、$\frac{1}{A}$ のことを、**

行列 A の「逆数」は A^{-1} と表わす

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$$

というように指数表示を用いて表わす習慣になっています。また、A^{-1} とは、**「行列の世界」での行列 A の「逆数」のこと**ですので、数学用語としては、A^{-1} のことを、**逆行列**(ぎゃくぎょうれつ)と呼んだりします。[8] こうした逆行列の記号を用いると、(90) 式や (91) 式も、

$$A^{-1}B$$

や

$$BA^{-1}$$

となり、余り「分数」っぽい感じがしなくなりますが、これらは、基本的に $\frac{B}{A}$ という「分数」を表わしているわけです。

- **連立 1 次方程式の解**

4 節では、行列を用いて、連立一次方程式を、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{92}$$

という形で表わすことにより、(63) 式の解が、

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}}{A}$$

というように求めることができるのではないかと「当たり」を付けましたが、より正確には、**行列 A に逆行列が存在するときには、(92) 式の両辺に、左から A^{-1} を掛け算することで、**

連立 1 次方程式の解

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$$

というように解を求めることができるということになります。

7 「行列」の「逆数」を求めるには

さて、6 節では、行列 A の「逆数」である逆行列 A^{-1} という概念を考えることができるということをご説明しましたが、ここでは、与えられた行列 A に対して、行列 A の逆行列 A^{-1} を具体的に求める方法についてご説明してみることにします。そのためには、行列の**基本変形**(きほんへんけい)という概念が必要になりますので、まずは、**「基本変形とは何か。」**ということをご説明してみることにします。

[8] A^{-1} は「エイ・インヴァース (inverse)」と読んだりします。

- **行に関する「基本変形」**

一般に、勝手にひとつ与えられた行列に対して、

行に関する基本変形

(イ) ある二つの行を入れ替える。

(ロ) ある行に別な行の何倍かを足す。

(ハ) ある行を何倍かする。（ただし、0 倍することは許さないものとする。）

という三種類の操作を**「行に関する基本変形」**と呼びます。[9] 以下でご説明しますように、「行に関する基本変形」を用いて、与えられた行列 A の逆行列を具体的に求めることができるのですが、取りあえず、皆さんは、**「与えられた行列を、できるだけ見やすい形にするゲーム」をするのだと考えて、そのゲームのルールが「行に関する基本変形」で与えられているのだ**と考えていただければ結構です。

- **「逆行列」を求める方法**

そこで、逆行列を求める方法ですが、話を具体的にするために、ここでも、行列 A が 2 行 2 列の行列の場合にご説明することにします。いま、a, b, c, d が、例えば、$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ など、最初から確定した値が決まっている数として、逆行列を求めたい行列を、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表わすことにします。そこで、まず、A と同じ形の 2 行 2 列の単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えて、A と I を横に並べた 2 行 4 列の行列

$$\left(A \;\middle|\; I \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{93}$$

という行列を考えます。[10] このとき、$\left(\boldsymbol{A} \;\middle|\; \boldsymbol{I} \right)$ **という 2 行 4 列の行列に対して、「行に関する基本変形」を何度か施（ほどこ）して、**

---

[9] 全く同様に、上の「行に関する基本変形」の定義の中の「行」の部分を、すべて「列」に置き換えて、**「列に関する基本変形」**を考えることもできますが、今回のお話には登場しません。

[10] ここで、(93) 式の行列は、

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ということなのですが、(93) 式のように A と I の間に「仕切り」を入れておくことで、以下で見るように、どのような計算をすれば良いのかということが少し見やすくなります。

逆行列を計算する方法

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right) \tag{94}$$

というように、A の部分が単位行列 I になるようにします。 すると、当然のことながら、$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right)$ という行列の I の部分も、一般には姿を変えますので、I の部分が最終的に変形された姿を、(94) 式では B と表わしました。このとき、

B は A^{-1} になっている

$$\boldsymbol{B = A^{-1}} \tag{95}$$

となっているという形で、A^{-1} を求めることができるというのが、「基本変形を用いた逆行列の計算法」と呼ばれている方法です。すなわち、「行に関する基本変形」を用いて、

「行に関する基本変形」を用いて逆行列を求める方法

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

というように, 与えられた行列 A の逆行列を求めることができるというわけです。

- **「逆行列」の計算例 (その１)**

これでは、何を言っているのかよく分からないと思われる方もいらっしゃるのではないかと思いますので、具体的な例を用いて、上の方法をご説明してみることにします。

そこで、いま、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{96}$$

とします。このとき、行列 A と単位行列 I を横に並べて、「行に関する基本変形」を施すと、例えば、

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かりますから、今の場合、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{97}$$

となることが分かります。このとき、(95) 式の言っていることは、

$$B = A^{-1}$$

となっているということですが、実際、6 節の中で確かめたように、

$$AB = I, \quad BA = I$$

となっているわけです。

- **「逆行列」の計算例 (その２)**

　上の例では、「行に関する基本変形」を一回施すだけで、すぐに逆行列が求まってしまいましたので、もう少し感じをつかむために、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

という行列について、同様の計算を行ってみます。そこで、前と同様に、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 2}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

というように、A の逆行列 A^{-1} が求まるということになります。実際、

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I \\
B \cdot A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、確かに、

$$B = A^{-1}$$

となっていることが分かります。

練習問題 6. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

• 連立 1 次方程式の解の計算例 (その１)

さて、2 節では、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{98}$$

という連立 1 次方程式を考えましたが、4 節では、行列の記法を用いると、(98) 式の連立 1 次方程式が、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

として、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{99}$$

というように簡明な形で表わせることに注目して、(99) 式の両辺に、左から、A の逆行列 A^{-1} を掛け算することで、

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{100}$$

というように解が求まるのではないかと「当たり」を付けました。上で見た計算から、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{101}$$

となることが分かりましたから、(101) 式を (100) 式に代入することで、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 4 + 2\cdot 7 \\ 2\cdot 4 + (-1)\cdot 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -12+14 \\ 8-7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

というように解を求めることができることが分かります。こうして、**連立 1 次方程式の解を「$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}}{A}$」という形で求める**という当初の目標が達成されたことになります。

練習問題 7. 演習問題 6 の結果を用いて、次の連立 1 次方程式の解を求めよ。

$$(1)\ \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=7 \end{cases} \quad , \qquad (2)\ \begin{cases} 7x+3y=5 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$$

8　「基本変形」のコツ

さて、**実際に、基本変形を用いた計算をできるだけ効率良く行なったり、できるだけ計算間違いを避けて計算するためには、ちょっとしたコツがあります**ので、ここで、この点についても少しだけ注意しておくことにします。なお、この節の目的は、7 節でご説明した逆行列の計算法について、補足説明をすることですので、まずは全体の話の流れを追いたいと思われる方は、取りあえず、この説は飛ばして、次の 9 節に進んでいただいても構いません。

- **「逆行列」の計算例 (その３)**

そこで、いま、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

という行列について、A^{-1} の計算を行なってみます。すると、7 節での計算と同様に、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 1}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

というように、A の逆行列 A^{-1} が求まるということになります。このように、行列 A に並んでいる数が、$1,2,3,4$ のような整数(せいすう)であったとしても、A^{-1} には、$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ のような「分数」が並び得ます。このことは、**基本変形を用いた計算を進める中で、一般には、「分数」が頻繁(ひんぱん)に登場し得る**ということを意味しています。

- **「分数の嵐」**

例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

という行列について、A^{-1} の計算を行なうために、

$$\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

という行列を考えたときに、最初から、$\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix}$ という行列の 1 行 1 列目を 1 にしようとして、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}\times\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-7)} \cdots \tag{102}$$

などというように計算を始めてしまったとすると、その後の計算は「分数の嵐」となってしまいます。もちろん、それでも構わないわけですが、分数の計算は「通分」の手間がかかってしまいますし、それだけ計算間違いする可能性も高くなってしまいます。

- **基本変形のコツ**

こうした点を避けるために、基本変形に当たっては、

基本変形のコツ

(イ) できるだけ「分数」は避けて計算する。

(ロ) $\begin{pmatrix} * & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **や** $\begin{pmatrix} * \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **など、一ヶ所を除いて 0 が並ぶような行や列を作る。**$(* = \mathbf{1}$ **となることにはこだわらない。)**

ということに注意して計算を進めると良いのではないかと思います。

- **「逆行列」の計算例 (その4)**

例えば、(102) 式のように、最初から、$\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix}$ という行列の 1 行 1 列目を 1 にしようとすると、その後の計算が「分数の嵐」になってしまいますので、取りあえず、5 のままにして放っておいて、2 行 1 列目の 7 を 0 にすることを考えるということが、この場合の (ロ) という主張の内容です。ただし、$\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix}$ という行列の 2 行 1 列目の 7 を 0

にしようとして、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-\frac{7}{5})} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 8-\frac{42}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{array}\right) \tag{103}$$

などというように計算をしたのでは、やはり、その後の計算は「分数の嵐」となってしまいます。そこで、その代わりに、例えば、最初に 2 行目を 5 倍してから、

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times 5} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 35 & 40 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-7)} \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{104}$$

などと計算すると「分数」を避けることができます。さらに、(104) 式の計算を進めると、例えば、

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 3} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -20 & 15 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}\times\frac{1}{5}} \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right) \end{aligned} \tag{105}$$

というように変形できることが分かりますから、

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

というように A^{-1} を求めることができます。

● 最後まで「分数」を避ける

それから、これは「趣味(しゅみ)の問題」ということになりますが、(105) 式の一番最後の部分の計算を、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2I & C \end{array}\right) \tag{106}$$

というように進めてから、

$$A^{-1} = \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

というように結論することもできます。すなわち、(106) 式のように変形してから、

$$\left(\begin{array}{c|c} 2I & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}\times\frac{1}{2}]{1\text{ 行目}\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -5 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right) = \left(I \middle| \tfrac{1}{2} C \right) = \left(I \middle| B \right) \tag{107}$$

というように変形したのだと「頭の中で」考えればよいわけです。

- **最後まで「分数」を避けて「逆行列」を求める方法**

一般に、k を確定した値が決まっている数として、

スカラー行列

$$kI = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{108}$$

という形をした行列を**スカラー行列**と言いますが、

最後まで「分数」を避けて逆行列を計算する方法

$$\left(A \middle| I \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(kI \middle| C \right) \tag{109}$$

というように、$\left(A \middle| I \right)$ **という行列の A の部分をスカラー行列に変形する**という方針を取ると、後は、(107) 式のように、「頭の中で」、

$$\left(kI \middle| C \right) \xrightarrow{\text{各行を } \frac{1}{k} \text{ 倍する}} \left(I \middle| \tfrac{1}{k} C \right) = \left(I \middle| B \right) \tag{110}$$

というような変形をしたのだと考えることで、

$\frac{1}{k}C$ は A^{-1} になっている

$$A^{-1} = B = \frac{1}{k} C$$

というように、A^{-1} を求めることができます。このような方針を取ると、**基本的には、「分数」は最後に一回だけ書けばよい**ということになりますので、(イ) で言うように「できるだけ「分数」を避けて計算する」ことが最大限に実現できることになります。

- **$A^{-1} = \frac{1}{k} C$ となることを検算(けんざん)する方法**[11]

いま、a, b, c, d, e, f, g, h が、例えば、$a = 5, b = 6, c = 7, d = 8, e = -8, f = 6, g = 7, h = -5$ など、最初から確定した値が決まっている数として、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

として、k も、$k = 2$ など、最初から確定した値が決まっている数とすると、

[11] 以下の抽象的な行列を用いた計算に圧倒されそうな方は、取りあえず、(113) 式の結論だけ認めて、次の小見出し「$A^{-1} = \frac{1}{k} C$ であることの検算例」に飛ばれても全く問題ありません。

$$
\begin{aligned}
A \cdot \left(\frac{1}{k}C\right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{k}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{k} & \frac{f}{k} \\ \frac{g}{k} & \frac{h}{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{k} \\ \frac{g}{k} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{f}{k} \\ \frac{h}{k} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{k} \\ \frac{g}{k} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{f}{k} \\ \frac{h}{k} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \cdot \frac{e}{k} + b \cdot \frac{g}{k} & a \cdot \frac{f}{k} + b \cdot \frac{h}{k} \\ c \cdot \frac{e}{k} + d \cdot \frac{g}{k} & c \cdot \frac{f}{k} + d \cdot \frac{h}{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \cdot (a \cdot e + b \cdot g) & \frac{1}{k} \cdot (a \cdot f + b \cdot h) \\ \frac{1}{k} \cdot (c \cdot e + d \cdot g) & \frac{1}{k} \cdot (c \cdot f + d \cdot h) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k} \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{k}(AC)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、

$$
A \cdot \left(\frac{1}{k}C\right) = \frac{1}{k}(AC) \tag{111}
$$

となることが分かります。全く同様に、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{k}C\right) \cdot A &= \left\{ \frac{1}{k} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e}{k} & \frac{f}{k} \\ \frac{g}{k} & \frac{h}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{k} & \frac{f}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{e}{k} & \frac{f}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{g}{k} & \frac{h}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{g}{k} & \frac{h}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e}{k} \cdot a + \frac{f}{k} \cdot c & \frac{e}{k} \cdot b + \frac{f}{k} \cdot d \\ \frac{g}{k} \cdot a + \frac{h}{k} \cdot c & \frac{g}{k} \cdot b + \frac{h}{k} \cdot d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\cdot(e\cdot a+f\cdot c) & \frac{1}{k}\cdot(e\cdot b+f\cdot d) \\ \frac{1}{k}\cdot(g\cdot a+h\cdot c) & \frac{1}{k}\cdot(g\cdot b+h\cdot d) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k}\begin{pmatrix} e\cdot a+f\cdot c & e\cdot b+f\cdot d \\ g\cdot a+h\cdot c & g\cdot b+h\cdot d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k}\left\{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{k}(CA)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、

$$
\left(\frac{1}{k}C\right)\cdot A = \frac{1}{k}(CA) \tag{112}
$$

となることが分かります。よって、(111) 式、(112) 式から、(109) 式に現われる A, C, k に対して、

$$
B = \frac{1}{k}C
$$

が、行列 A の逆行列であることを確かめるためには、すなわち、

$$
A\cdot\left(\frac{1}{k}C\right) = I, \quad \left(\frac{1}{k}C\right)\cdot A = I
$$

となることを確かめるためには、

$A^{-1} = \frac{1}{k}C$ であることを確かめる検算法

$$
AC = kI, \quad CA = kI \tag{113}
$$

となることを確かめれば良いということが分かります。

- **$A^{-1} = \frac{1}{k}C$ であることの検算例**

例えば、上で見たように、

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}
$$

のときには、

$$
C = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad k = 2
$$

というように計算できましたが、後は、

$$
\begin{aligned}
A\cdot C &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\cdot(-8)+6\cdot 7 & 5\cdot 6+6\cdot(-5) \\ 7\cdot(-8)+8\cdot 7 & 7\cdot 6+8\cdot(-5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2I \\
C\cdot A &= \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-8)\cdot 5+6\cdot 7 & (-8)\cdot 6+6\cdot 8 \\ 7\cdot 5+(-5)\cdot 7 & 7\cdot 6+(-5)\cdot 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2I
\end{aligned}
$$

となることを確かめることで、確かに、

$$
A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}
$$

となっていることを確かめることができるというわけです。このような方針を取ると、

$$
A^{-1} = \frac{1}{k}C
$$

となっていることの検算においても「分数」を避けて計算することができます。

- **「逆行列」の計算例 (その５)**

　さて、ここでは、2 行 2 列の行列 A をもとにして、逆行列を求める方法をご説明しましたが、行列 A が 3 行 3 列の行列のとき、4 行 4 列の行列のとき、··· などでも、全く同様に、逆行列を求めることができます。

例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

として、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-4)]{\substack{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-1) \\ 3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times1]{\substack{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-1) \\ 3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4\text{ 行目}\times2]{2\text{ 行目}\times2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -10 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[4\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times1]{2\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}\times2]{\substack{1\text{ 行目}\times4 \\ 2\text{ 行目}\times2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -6 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-1)]{\substack{1\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times1 \\ 2\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 15 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 4I & C \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$A^{-1} = \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

というように、行列 A の逆行列 A^{-1} が求まることになります。実際、

$$
\begin{aligned}
A\cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5+15+7-13 & -1-1-1+3 & 1-3+1+1 & 2-2-2+2 \\ -5+30+14-39 & -1-2-2+9 & 1-6+2+3 & 2-4-4+6 \\ -10+15+21-26 & -2-1-3+6 & 2-3+3+2 & 4-2-6+4 \\ -20+45+14-39 & -4-3-2+9 & 4-9+2+3 & 8-6-4+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 4I \qquad (114)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。ただし、これまでと同様に、行列 A の「行」と行列 C の「列」をすべて取り出して、計算をスタートすると場所を取られて大変ですので、例えば、AC という行列の 1 行 1 列目を、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & & & \\ 15 & & & \\ 7 & & & \\ -13 & & & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot(-5)+1\cdot 15+1\cdot 7+1\cdot(-13) & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5+15+7-13 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように計算しました。全く同様に、

$$
\begin{aligned}
C\cdot A &= \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5-1+2+8 & -5-2+1+6 & -5-2+3+4 & -5-3+2+6 \\ 15-1-6-8 & 15-2-3-6 & 15-2-9-4 & 15-3-6-6 \\ 7-1+2-8 & 7-2+1-6 & 7-2+3-4 & 7-3+2-6 \\ -13+3+2+8 & -13+6+1+6 & -13+6+3+4 & -13+9+2+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= 4I \tag{115}$$

となることが分かります。よって、(114) 式、(115) 式から、確かに、

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

練習問題 8. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

• 連立 1 次方程式の解の計算例 (その２)

さて、4 節では、

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x + 2y + 2z + 3w = 4 \\ 2x + y + 3z + 2w = 7 \\ 4x + 3y + 2z + 3w = 8 \end{cases} \tag{116}$$

という連立 1 次方程式も、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

として、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{117}$$

という形で表わせることを見ました。上で見たように、

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分りますから、(117) 式の両辺に、左から、A の逆行列 A^{-1} を掛け算することで、

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ 15 & -1 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & -2 \\ -13 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-5)\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 7 + 2\cdot 8 \\ 15\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + (-3)\cdot 7 + (-2)\cdot 8 \\ 7\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 7 + (-2)\cdot 8 \\ (-13)\cdot 3 + 3\cdot 4 + 1\cdot 7 + 2\cdot 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -15 - 4 + 7 + 16 \\ 45 - 4 - 21 - 16 \\ 21 - 4 + 7 - 16 \\ -39 + 12 + 7 + 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように解を求めることができることが分かります。

練習問題 9. 演習問題 8 の結果を用いて、次の連立 1 次方程式の解を求めよ。

$$
(1)\ \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 5x + 4y = 5 \end{cases}, \qquad (2)\ \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}
$$

9 「基本変形」を用いて、直接、「連立 1 次方程式」を解くには

さて、7 節では、「行に関する基本変形」を用いた行列 A の逆行列 A^{-1} を求める方法についてご説明して、その結果を用いて、

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{118}
$$

という連立 1 次方程式の解を、

$$
\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}
$$

という形で求めました。実は、**連立 1 次方程式に関しては、わざわざ、A^{-1} の計算を通さなくとも、「行に関する基本変形」を用いて、直接、解を求める方法も知られています**ので、ここでは、その点について、少しだけご説明してみることにします。7 節と同様に、

話を具体的にするために、ここでも、行列 A が 2 行 2 列の行列の場合にご説明することにします。

- **連立 1 次方程式の解を求める方法**

そこで、いま、a, b, c, d, e, f が、例えば、$a = 1, b = 2, c = 2, d = 3, e = 4, f = 7$ など、最初から確定した値が決まっている数として、

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{119}$$

という連立 1 次方程式を考えます。このとき、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

として、(119) 式の連立 1 次方程式が、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{120}$$

というように表わされることになります。

行列 A の逆行列 A^{-1} を求めるときには、行列 A と単位行列 I を横に並べた行列

$$\left(A \,\middle|\, I \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

を考えて、「行に関する基本変形」を何度か施して、

「行に関する基本変形」を用いて逆行列を求める方法

$$\left(A \,\middle|\, I \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(I \,\middle|\, B \right)$$

というように変形すると、

$$A^{-1} = B$$

というように、行列 A の逆行列 A^{-1} を求めることができたわけです。

これに対して、連立 1 次方程式を、直接、解く場合には、単位行列 I の代わりに、(120) 式の右辺である $\mathbf{b}$ を考えます。すなわち、行列 A と $\mathbf{b}$ を横に並べた行列

$$\left(A \,\middle|\, \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right)$$

を考えて、$\left(\boldsymbol{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \right)$ **という 2 行 3 列の行列に対して、「行に関する基本変形」を何度か施して、**

連立 1 次方程式の解を求める方法

$$\left(A \,\middle|\, \mathbf{b} \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(I \,\middle|\, \mathbf{c} \right) \tag{121}$$

というように、A の部分が単位行列 I になるようにします。 すると、当然のことながら、

$\left(A \;\middle|\; \mathbf{b} \right)$ という行列の $\mathbf{b}$ の部分も、一般には姿を変えますので、$\mathbf{b}$ の部分が最終的に変形された姿を、(121) 式では $\mathbf{c}$ と表わしました。このとき、

$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解になっている

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{122}$$

という形で、(120) 式の連立 1 次方程式の解を求めることができるというのが、「基本変形を用いた連立 1 次方程式の解法」と呼ばれている方法です。

- **連立 1 次方程式の解法例 (その１)**

例えば、

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \tag{123}$$

という連立 1 次方程式の場合であれば、

$$\left(A \;\middle|\; \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

ということになりますが、$\left(A \;\middle|\; \mathbf{b} \right)$ という行列に対して、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 2}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(I \;\middle|\; \mathbf{c} \right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますが、$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ を (123) 式の連立 1 次方程式に代入してみると、

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \end{cases}$$

となることが分りますから、確かに、$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ は (123) 式の連立 1 次方程式の解になっていることが分かります。

- **連立 1 次方程式の解法例 (その２)**

上では、2 行 2 列の行列 A をもとにして、連立 1 次方程式の解を求める方法をご説明しましたが、行列 A が 3 行 3 列の行列のとき、4 行 4 列の行列のとき、$\cdots$ などでも、全く同様に、逆行列を求めることができます。

例えば、

$$
\begin{cases}
x+y+z+w=3\\
x+2y+2z+3w=4\\
2x+y+3z+2w=7\\
4x+3y+2z+3w=8
\end{cases}
\tag{124}
$$

という連立 1 次方程式の場合であれば、

$$
\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)
$$

ということになりますが、$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right)$ という行列に対して、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)
\xrightarrow[4\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-4)]{\substack{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-1)\\ 3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)}}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[4\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 1]{\substack{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-1)\\ 3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 1}}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)
\xrightarrow{3\text{ 行目}\times\frac{1}{2}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)
\xrightarrow[4\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times 1]{2\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{4\text{ 行目}\times\frac{1}{2}}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
\xrightarrow[3\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-1)]{\substack{1\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times 1\\ 2\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-1)}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{c} \end{array}\right)
$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$
\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}
$$

となることが分かりますが、$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ を (124) 式の連立 1 次方程式に代入してみると、

$$\begin{cases} 1+1+2+(-1)=3 \\ 1+2\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot(-1)=4 \\ 2\cdot 1+1+3\cdot 2+2\cdot(-1)=7 \\ 4\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot(-1)=8 \end{cases}$$

となることが分りますから、確かに、$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ は (124) 式の連立 1 次方程式の解になっていることが分かります。

練習問題 10.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+3y=9 \\ 5x+4y=5 \end{cases}, \qquad (2)\ \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+2z=7 \end{cases}$$

• 行列 A に逆行列 A^{-1} が存在しない場合[12]

さて、ここまで、「ふるさと」である連立 1 次方程式をもとにして、「行列」についてご説明してきましたが、これまでの議論では、**暗黙(あんもく)のうちに、**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{125}$$

という連立 1 次方程式の左辺の係数である行列 A には逆行列 A^{-1} が存在するということを仮定していました。この場合、(125) 式の右辺である $\mathbf{b}$ の値が何であっても、(125) 式の解は、

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

というように唯一(ただひと)つに定まるわけです。ところが、行列 A に逆行列が存在しないと、一般には、(125) 式の連立 1 次方程式の解が存在するとは限りませんし、解が存在したとしても、解が唯一つに定まるとは限らなくなってきます。

• 連立 1 次方程式に解が存在しない例

例えば、

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=2 \end{cases} \tag{126}$$

という連立 1 方程式を考えてみます。このとき、もし、(126) 式の連立 1 次方程式に解が存在したとすると、その解である x, y の値に対して、

$$x+2y=1$$

[12] 以下では、「係数」A に逆行列 A^{-1} が存在しない場合に、連立 1 次方程式の解がどのような感じになるのかについて、簡単に補足説明しようと思いますが、まずは全体の話の流れを追いたいと思われる方は、以下、この節の最後までを飛ばして、10 節に進んでいただいても構いません。

でもあり、

$$x + 2y = 2$$

でもあるということになりますから、

$$1 = x + 2y = 2$$

となり、

$$1 = 2$$

という「おかしなこと」になってしまいます。したがって、(126) 式の連立 1 次方程式には解は存在しないことが分かります。

● 連立 1 次方程式にたくさんの解が存在する例

また、例えば、

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \tag{127}$$

という連立 1 次方程式を考えてみます。すると、(127) 式の二番目の式は、一番目の式の両辺を 2 倍したものですから、x と y が、

$$x + 2y = 1 \tag{128}$$

という一番目の方程式さえ満たせば、自動的に、

$$2x + 4y = 2$$

という二番目の方程式も満たすことにもなります。したがって、x と y が (128) 式さえ満たせば、同じ x と y は (127) 式の連立 1 次方程式の解になることが分かります。そこで、いま、(128) 式を、

$$x = 1 - 2y \tag{129}$$

というように書き直してみます。すると、例えば、$y = 2$ として、(129) 式に代入すると、

$$x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

と x の値が決まるというように、y の値を勝手にひとつ決めるたびに、(129) 式によって、対応する x の値を定めてやると、こうして定まる x と y は、(129) 式を満たすことになります。したがって、同じ x と y は、(128) 式を満たすことにもなり、上で注意したように、(127) 式の連立 1 次方程式の解にもなるということが分かります。

そこで、例えば、t を、$t = 1$ や $t = 2$ など、勝手にひとつ値が定まった数だとして、$y = t$ のときの解を考えてみると、(129) 式から、

$$x = 1 - 2t$$

となりますから、t がどんな値であったとしても、

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \end{cases} \tag{130}$$

が、(127) 式の連立 1 次方程式の解になることが分かります。実際、(130) 式を、(127) 式に代入してみると、

$$\begin{cases} (1-2t)+2t=1 \\ 2(1-2t)+4t=2 \end{cases}$$

となることが分かりますから、(130) 式の x と y が (127) 式の連立 1 次方程式の解になっていることが分かります。

- **一番簡単な場合との比較**

このように、一般的に連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{131}$$

を考えたときには、(131) 式の左辺の係数である行列 A は逆行列を持つとは限らないことになります。[13] 4 節でも見たように、一番簡単な連立 1 次方程式

$$ax=b \tag{132}$$

を考えると、$a \neq 0$ のときには、(132) 式の方程式は、

$$x=\frac{b}{a}=a^{-1}b$$

という唯一つの解を持つことが分かります。一方、$a=0$ のときには、$b=0$ なら、t を、$t=1$ や $t=2$ など、勝手にひとつ値が定まった数だとして、t がどんな値であったとしても、

$$x=t$$

が (132) 式の方程式の解になり、$b \neq 0$ なら、(132) 式の方程式には解が存在しないことが分かります。こうした視点で、(131) 式を眺めてみると、$a \neq 0$ の場合の一般化として、A に逆行列 A^{-1} が存在する場合を考えることができ、$a=0$ の場合の一般化として、A に逆行列 A^{-1} が存在しない場合を考えることができることが分かります。

- **一般的に連立 1 次方程式の解を求める方法**

実は、A に逆行列が存在しない場合にも、

「行に関する基本変形」を用いた連立 1 次方程式の解法

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} A' & \mathbf{c} \end{array}\right)$$

というように、$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right)$ **という行列の A の部分を「精一杯の見やすい形」A' に変形**

[13] もし、A に逆行列が存在すれば、(131) 式の解は、

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$$

というように唯一つに決まるはずですが、上で見た例では、解が存在しなかったり、解が存在する場合でも、解が唯一つには決まらなかったりしたわけです。

してから、[14]**「解きやすい方程式」**

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{133}$$

を実際に解くという方法で、「行に関する基本変形」を用いて、一般的に (131) 式の連立 1 次方程式を効率的に解くことができるのですが、今回は、「行列の世界」への入門ということで、A^{-1} が存在する場合だけをご紹介することにしました。[15]

また、「どうして、7 節で説明した方法で逆行列を求めることができるのか。」とか、「どうして、この節で説明した方法で連立 1 次方程式の解を求めることができるのか。」ということが気になる方もいらっしゃるのではないかと思います。こちらの点に関しても、実は、「行列語」と「日本語」の「通訳」になることで、これらの「仕組み」をスッキリと理解できて、私自身は、とても面白いと思うのですが、今回は、行列が活躍する場面として、もうひとつ、数列の漸化式（ぜんかしき）を解く話をご説明しようと思いますので、残念ながら、これらの点に関しても結果のみご紹介することとしました。

[14] A' は「エイ・プライム」と呼びます。

[15] A^{-1} が存在する場合には、$A' = I$ というように、「精一杯の見やすい形」として、単位行列 I が取れるので、(133) 式の「解きやすい方程式」は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

となり、$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解になることが分かるという仕組みになっています。

第 II 部

「行列」と「数列」の「漸化式(ぜんかしき)」

10　「数列」に対する「漸化式」とは

さて、ここまでは、行列の「ふるさと」である連立 1 次方程式をもとにして、皆さんに「行列の世界」をご紹介してきましたが、**行列が活躍する場面は、必ずしも連立 1 次方程式の考察だけとは限らない**ということを、皆さんに印象付けるために、以下では、もうひとつ、**数列**の**漸化式**の話をご説明してみようと思います。皆さんの中には、「「行列」、「数列」って、また「列」かよ。」と思われた方もいらっしゃるかもしれませんが、以下でご説明しますように、「数列」の方は、数が一列に並んでいますから、皆さんがイメージする「列」に近いかもしれません。といっても、数が無限個並ぶことになるのですが … 。

- **「数列」**

いま、ある銀行に、現金 5 万円を定期預金(ていきよきん)として預(あず)けたとして、途中で解約(かいやく)などはしないとして、その後の預金額(よきんがく)がどうなるのかを考えてみます。このとき、きちんと考察を進めてみるまでは、それぞれの年の預金額は、「6 万円かもしれない。あるいは、8 万円かもしれない。」というように、色々な可能性を想定できますので、取りあえず、1 年後の預金額を x_1 万円というように、変数 x に 1 という添え字(そえじ)を付けて表わすことにします。全く同様に、2 年後の預金額を x_2 万円、3 年後の預金額を x_3 万円、$\cdots$ などと表わすことにします。[16] また、最初の預金額を 0 年後の預金額と考えて、x_0 万円と表わすことにします。すると、x_0 だけは、考察前からハッキリした値が分かっていて、

$$x_0 = 5 \tag{134}$$

ということになります。こうして、今はまだ、ハッキリした値は分かりませんが、

数列

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots \tag{135}$$

というような数の列ができました。数学では、(135) 式のような数の列を**数列(すうれつ)**と呼びます。また、与えられた数列を、ひとつの数学的な対象と思ったときには、(135) 式を、

$$\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots\}$$

というように括弧 $\{\quad\}$ でひとまとめにして表わしたり、括弧 $\{\quad\}$ の中身をひとつひとつ書いていくのが面倒な場合には、

$$\{x_n\}_{n=0,1,2,3,\cdots}$$

[16] このように、たくさんの量を変数で表わすときには、$x, y, z, \cdots$ など、アルファベットだけでは数が足りなくなってしまうので、$x_1, x_2, x_3, \cdots$ などと、アルファベットに添え字を付けて表したりします。添え字については、例えば、${}^2x$ や ${}_2x$ など、文字の左側に付けてしまうと、$2x$ などと紛らわしくなってしまいますし、x^2 のように右上に付けてしまうと、$x^2 = x \cdot x$ などと紛らわしくなってしまいますので、x_2 のように、原則、変数の右下に添え字を付ける習慣になっています。(数学の少し進んだ分野に行くと、右下だけでは不便なので、場合によっては、右上に添え字を付けることもあります。)

などと表わしたりもします。

● 「数列」の「漸化式」

そこで、実際に、$x_1, x_2, x_3, \cdots$ が、どのような値になるのかを考えてみます。いま、定期預金の利率が 1 年間で 2 %とします。[17] 皆さんの中にも、ご存じの方が多いと思いますが、このことは、次のことを意味しています。いま、最初に、$x_0\,(=5)$ 万円を預けたわけですが、1 年後には、最初の x_0 万円の他に、x_0 万円の 2 %である　$0.02 \cdot x_0$ 万円が利息として預金額に加えられて、1 年後の預金額 x_1 万円は、

$$x_1 = x_0 + 0.02 \cdot x_0 = (1 + 0.02)x_0 = 1.02x_0 \tag{136}$$

となるというわけです。全く同様に、もう 1 年経つと、1 年後の預金額 x_1 万円の他に、x_1 万円の 2 %である $0.02 \cdot x_1$ 万円が利息として預金額に加えられて、2 年後の預金額 x_2 万円は、

$$x_2 = x_1 + 0.02 \cdot x_1 = (1 + 0.02)x_1 = 1.02x_1 \tag{137}$$

となるというわけです。以下同様に、

$$x_3 = 1.02x_2 \tag{138}$$

$$x_4 = 1.02x_3 \tag{139}$$

$$x_5 = 1.02x_4 \tag{140}$$

$$\vdots$$

というように表わすことができます。こうして、状況が、(136) 式、(137) 式、(138) 式、(139) 式、(140) 式などの式によって表わされることになりますが、すべての式をいちいち書き下していると、かえって見づらくなりますので、ここでも「抽象的な記法」を用いて、

数列の漸化式の例

$$x_n = 1.02x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{141}$$

というように、これらの式をまとめて表わしたりします。慣れないうちは、少し戸惑うかもしれませんが、**(141) 式は、(136) 式、(137) 式、(138) 式、(139) 式、(140) 式、$\cdots$ という無限個の式を一つの「抽象的な式」で表わしている**わけです。

ここで、(141) 式は、x_0 から、x_1 が、

$$x_1 = 1.02x_0$$

という形で決まって、次に、x_1 から、x_2 が、

$$x_2 = 1.02x_1$$

[17] 実際には、このような気前の良い利率を提供しているような銀行は存在せず、私が利用している銀行も利率は 0.025 %と大変「お寒い」状況です。

という形で決まって、$\cdots$ というように、$x_0, x_1, x_2, \cdots$ という数が、前の方から順番、順番に決まっていく決まり方を表わしているわけですが、このように、数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ に現われる数が、それ以前の数の情報から、順番、順番に決まっていく決まり方を表わしている式を、**数列の漸化式**と呼びます。

- **「方程式の方法」との比較**

ここまで読まれて、皆さんの中には、「これって、何か、2 節で説明した

方程式の方法

(イ) 最終的に知りたい量を、最初の段階では色々な可能性の想定される変数として、状況を数式で表わすことで方程式を立てる。

(ロ) 最初の具体的な状況は忘れて、純粋に数式として (イ) で得られた方程式を解く。

という「方程式の方法」と似てない？」と思われた方も多いのではないかと思います。

実際、今の場合は、最終的に知りたい量が、$x_1, x_2, x_3, \cdots$ という無限個の変数になっていて、状況を数式で表わしてみると、(141) 式という無限個の方程式で表わされたというわけです。このとき、**無限個の変数のことを、「数列」と呼んで、無限個の方程式のことを「数列の漸化式」と呼んでいる**わけです。ですから、後は、最初の具体的な状況は忘れて、純粋に数式として、(141) 式の漸化式を解けばよいということになります。

今の場合は、(136) 式より、

$$x_1 = 1.02x_0 \tag{142}$$

となることが分かり、(142) 式を、(137) 式に代入することで、

$$x_2 = 1.02x_1 = 1.02 \cdot (1.02x_0) = (1.02)^2 x_0 \tag{143}$$

となることが分かり、(143) 式を、(138) 式に代入することで、

$$x_3 = 1.02x_2 = 1.02 \cdot \{(1.02)^2 x_0\} = (1.02)^3 x_0 \tag{144}$$

となることが分かり、以下順番に、

(141) 式の漸化式を満たす数列の一般項

$$x_n = (1.02)^n x_0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{145}$$

となることが分かります。[18] こうして、数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$$

に現われるすべての数が具体的に求まりましたので、(141) 式の漸化式が解けたということになります。今の場合には、

$$x_0 = 5 \tag{146}$$

[18]高校の数学で学ぶ**「数学的帰納法（すうがくてききのうほう）」**というのをご存じの方は、数学的帰納法を用いて、(145) 式の主張を確かめてみて下さい。

でしたから、(145) 式に (146) 式を代入することで、

$$x_n = (1.02)^n \cdot 5, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となることが分かりました。例えば、$n = 10$ とすると、

$$x_{10} = (1.02)^{10} \cdot 5$$

となることが分かりますが、

$$(1.02)^{10} = 1.218994 \cdots$$

となるということを用いると、[19]

$$x_{10} = 1.218994 \cdots \times 5 = 6.0949 \cdots$$

となることが分りますから、10 年後には、最初の 5 万円が 6 万円くらいに増えることが分かります。[20]

- **「等比数列」**

さて、上では、数列 $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ に対する

$$x_n = 1.02 x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{147}$$

という漸化式を考えましたが、(147) 式と同じタイプの漸化式を「一般的な形」で考えると、a を、例えば、$a = 1.02$ や $a = 2$ など、最初から確定した値が定まっている数として、

等比数列の漸化式

$$x_n = a x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{148}$$

ということになります。上で見たように、(148) 式は、

$$x_1 = a x_0 \tag{149}$$
$$x_2 = a x_1 \tag{150}$$
$$x_3 = a x_2 \tag{151}$$
$$\vdots$$

---

[19]「二項展開」をご存じの方は、

$$(1.02)^n = (1 + 0.02)^n = 1 + 0.02n + \cdots \fallingdotseq 1 + 0.02n$$

というように近似してみると、$(1.02)^n$ という値のだいたいの見積もりができます。

[20]これに比べて、私の銀行での利率は 0.025 %でしたので、

$$x_{10} = (1.00025)^{10} \cdot 5 \fallingdotseq (1 + 0.00025 \cdot 10) \cdot 5 = 1.0025 \cdot 5 = 5.0125$$

となり、10 年後の利息は 125 円にしかならず、一回の ATM 手数料でほぼ利息が消えてしまうという大変「お寒い」状況です。

という無限個の式を表わしているわけですが、この漸化式の意味していることは、x_0 から x_1 に移るときに a 倍され、次に、x_1 から x_2 に移るときにも a 倍され、さらに、x_2 から x_3 に移るときにも a 倍され、$\cdots$ というように、数列

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$$

の中で、右隣の数字に移るときに、常に a 倍される数列であるということを表わしています。このような数列では、

$$\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \cdots$$

という右隣の数字に移るときに何倍されるのかという**比**が a という一定値になっているので、このような数列を**等比数列**と呼びます。すなわち、(148) 式の漸化式は**等比数列を特徴付ける漸化式**ということになります。また、このような等比数列が、具体的にはどのような数列になるのかということを知るためには、(148) 式の漸化式を解けば良いわけですが、(147) 式のときと同様に、(149) 式、(150) 式、(151) 式から、

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 \\ x_2 &= ax_1 = a(ax_0) = a^2x_0 \\ x_3 &= ax_2 = a(a^2x_0) = a^3x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが分かり、以下順番に、

等比数列の一般項

$$x_n = a^n x_0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{152}$$

となることが分かります。このように、等比数列の**一般項** x_n は、a と x_0 という二つの数を用いて具体的に表わせるわけですが、a のことを等比数列の**公比**と呼び、x_0 のことを等比数列の**初項**と呼びます。

- **「等比数列」の一般化**

そこで、次に、(147) 式や (148) 式の漸化式を少し一般化して、a, b を、例えば、$a = 2$ や $b = 3$ など、最初から確定した値が定まっている数として、

等比数列を一般化した三項間漸化式

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{153}$$

というタイプの漸化式について考えてみることにします。等比数列の漸化式

$$x_n = ax_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{154}$$

の場合には、x_0 から x_1 が、

$$x_1 = ax_0$$

というように決まり、x_1 から x_2 が、

$$x_2 = ax_1$$

というように決まり、$\cdots$ というように、数列

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

の中で、**ひとつ前の数字から次の数字が決まる**ということを表わしているわけですが、(153) 式では、これを、x_0 と x_1 から x_2 が、

$$x_2 = ax_1 + bx_0$$

というように決まり、 x_1 と x_2 から x_3 が、

$$x_3 = ax_2 + bx_1$$

というように決まり、$\cdots$ というように、数列

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

の中で、**直前の二つの数字から次の数字が決まる**という形に一般化されているわけです。
　いま、(154) 式を、

$$x_n - ax_{n-1} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{155}$$

という形に書き直してみると、(155) 式は、数列

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

の中で、隣り合う二つの項の間の関係を表わしている式であると考えることができますから、(154) 式や (155) 式のような漸化式を**二項間漸化式**（にこうかんぜんかしき）と呼んだりします。全く同様に、(153) 式を、

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{156}$$

という形に書き直してみると、(156) 式は、数列

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

の中で、隣り合う三つの項の間の関係を表わしている式であると考えることができますから、(153) 式や (156) 式のような漸化式を**三項間漸化式**（さんこうかんぜんかしき）と呼んだりします。こうした視点で眺めると、(153) 式や (156) 式のような漸化式は、**等比数列に対する漸化式を二項間から三項間に拡張してみた漸化式である**と考えることができます。
　そこで、以下では、「(153) 式や (156) 式のような漸化式は、一体、何を意味している漸化式なのか？」ということや、「どうやって、漸化式を解いたらよいのか？」ということを「行列」の視点からご説明してみようと思います。

11　「行列」を用いて、「漸化式」を見直すと

さて、10 節では、等比数列に対する漸化式の一般化として、

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{157}$$

という三項間の漸化式を考えましたが、以下では、話を具体的にするために、

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{158}$$

という漸化式をもとにご説明してみることにします。この (158) 式を、10 節で考えた等比数列に対する漸化式

$$x_n = ax_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{159}$$

と見比べてみると、一見、随分(ずいぶん)と難しくなったように見えますし、どうやって解いて良いのかも、すぐに見通しが立ちそうな感じもしません。

- **「行列」を用いた「漸化式」の見直し(「行列の世界」の「等比数列」)**

そこで、状況を見直してみると、(159) 式の漸化式が分かりやすく感じるのは、**「x_{n-1} から x_n にというように、隣の数字に移るたびに a 倍される」という漸化式の表わしている意味が分かりやすいからである**と考えられます。一方、(158) 式の漸化式は、例えば、「x_1 の 5 倍から x_0 の 6 倍を引いたものが x_2 となる」というように、式自体の意味はハッキリしているものの、**それが一体何を意味しているのかということが、いまひとつピンとこない**ような気がします。

そこで、さらに、どうして数の決まり方が等比数列の場合ほどピンとこないのだろうということを考えるために、(158) 式の漸化式の数の決まり方を順番に書いてみると、

(158) 式の漸化式の数の決まり方

$$x_0 \text{と}\ x_1 \xrightarrow{\text{漸化式}} x_2 = 5x_1 - 6x_0 \xrightarrow{x_1\text{を補う}} x_1 \text{と}\ x_2 \xrightarrow{\text{漸化式}} x_3 = 5x_2 - 6x_1 \xrightarrow{x_2\text{を補う}} \cdots$$

というように、**漸化式で次のステップに進む前に、「x_1 を補う」、「x_2 を補う」$\cdots$ というような補助的なステップが必要になっている**ことが分かります。すなわち、**(158) 式の漸化式では、x_{n-1} と x_{n-2} という「二つの数」から x_n という「一つの数」が決まるという形で表わされているために、次のステップに進むときに何が起きているのかということが少し分かりにくくなっている**ことが分かります。

そこで、**(158) 式の漸化式を、「x_{n-1} と x_{n-2} という「二つの数」から x_n という「一つの数」が決まる」と読まずに、「わざわざ、x_{n-1} を付け加えて、x_{n-1} と x_{n-2} という「二つの数」から x_n と x_{n-1} という「二つの数」が決まる」と読んでみるとどうなるだろうか**ということが考えられました。すなわち、**(158) 式の漸化式に、**

$$\boldsymbol{x_{n-1} = x_{n-1}}$$

という「当たり前」の式を、わざわざ、付け加えて、

二本の式として (158) 式の漸化式を読んでみる

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}} \\ \boldsymbol{x_{n-1} = x_{n-1}} \end{cases} \tag{160}$$

という二本の式として漸化式を読んでみるということが、ここでのアイデアになります。

すると、(160) 式は、行列の記法を用いて、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot x_{n-1} - 6 \cdot x_{n-2} \\ 1 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となりますから、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \tag{161}$$

というように表わせることが分かります。そこで、4 節と同様に、見かけ上の複雑さに「目くらまし」にならないように、

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{162}$$

というように名前を付けてみると、(161) 式は、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} \tag{163}$$

というように簡明な形で表わせることが分かります。以上より、**(158) 式の漸化式は、**

「行列」の記法を用いた (158) 式の漸化式の書き直し

$$\boldsymbol{\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)} \tag{164}$$

という漸化式に書き直せることが分かりました。

- **等比数列の漸化式と見比べると**

そこで、(164) 式の漸化式を、等比数列の漸化式

等比数列の漸化式

$$x_n = a x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{165}$$

と見比べてみると、

$$x_n \rightsquigarrow \mathbf{x}_n, \quad a \rightsquigarrow A$$

というように文字が置き換わってはいますが、**本質的に同じタイプの方程式である**ことが分かります。すなわち、**(164) 式は、**

$$\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \cdots$$

という「数列」が「公比」が A の「等比数列」であることを表わしていることが分かります。

以上から、

$$\boldsymbol{x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)} \tag{166}$$

という三項間漸化式が、何を意味している漸化式なのかが分かりにくかったのは、式を一本しか書いていないからであることが分かりました。すなわち、(166) 式の漸化式に、わざわざ、

$$x_{n-1} = x_{n-1}$$

という「当たり前」の式を付け加えて、

$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \end{cases} \tag{167}$$

という二本の式として漸化式を読んだ上で、行列の記法を用いて、(167) 式を、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

というように表わしてみることで、**(166) 式の漸化式の「裏」に隠れていた「公比」**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

が見えて来て、「数列」

$$\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \cdots$$

は、「公比」が 2 行 2 列の行列 A である「等比数列」であることが分かるというわけです。

ここで、(164) 式の漸化式は、

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 \tag{168}$$

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 \tag{169}$$

$$\mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3 \tag{170}$$

$$\vdots$$

という無限個の式を表わしているわけですが、等比数列のときと同様に、(168) 式、(169) 式、(170) 式から、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A\mathbf{x}_1) = A^2\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_4 &= A\mathbf{x}_3 = A(A^2\mathbf{x}_1) = A^3\mathbf{x}_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となることが分かり、以下順番に、

「公比」が A の「等比数列」の一般項

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{171}$$

となることが分かります。[21] こうして、連立 1 次方程式のときと同様に、**(166) 式のような三項間漸化式も、行列の記法を用いることで、一番簡単な場合である等比数列の場合と全く同様にして、形式的(けいしきてき)には、(171) 式のように簡単に解けてしまう**ことが分かります。ここで、「形式的には」と言ったのは、このままでは、**まだ A^{n-1} という行列を、どうやって具体的に求めて良いのか分からない**からです。そこで、次に、この問題についてご説明してみることにします。

練習問題 11. 次の漸化式の「裏」に隠れている「公比」を求めよ。

(1) $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$

(2) $x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}, \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$

12 「ケーリー・ハミルトンの定理」とは

さて、11 節では、

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{172}$$

という三項間漸化式が、行列の記法を用いることで、

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{173}$$

として、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} \tag{174}$$

[21] 少し紛らわしいですが、今の場合、「初項」は、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

であることに注意して下さい。それに伴って、(171) 式の右辺も、$A^n\mathbf{x}_0$ ではなく、$A^{n-1}\mathbf{x}_1$ となっています。

というように簡明な形に表わせることに注目して、(174) 式を、

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{175}$$

というように形式的に解くことにより、**(172) 式の漸化式を解く問題を、行列 A の n 乗 A^n を求める問題に帰着できる**ことを見ました。そこで、以下では、A^n を具体的に求める方法について、ご説明してみようと思います。

- **A^2, A^3 などを具体的に計算してみる**

そのために、まず、**A^2, A^3 などを具体的に計算してみることで、A^n の形に予想が付きそうかどうかを考えてみる**ことにします。すると、

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + (-6) \cdot 1 & 5 \cdot (-6) + (-6) \cdot 0 \\ 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A \cdot A^2 \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -30 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -30 \\ -6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 19 + (-6) \cdot 5 & 5 \cdot (-30) + (-6) \cdot (-6) \\ 1 \cdot 19 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot (-30) + 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 13 & -150 + 36 \\ 19 & -30 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 65 & -114 \\ 19 & -30 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

というように計算できますから、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 65 & -114 \\ 19 & -30 \end{pmatrix} \tag{176}$$

となることが分かります。ところが、**(176) 式をじっと見ていても、A^4 や A^5 がどうなりそうかということや、ましてや、一般に、A^n がどのような式で表わせそうかということについて、さっぱり「当たり」が付かないように思われます。** そのようなわけで、A^n を求めるためには、何か他のアイデアが必要なことが分かります。

次の 13 節では、**「ケーリー・ハミルトンの定理」にもとづく A^n の計算法**というものを、皆さんにご紹介しようと思いますが、そのために、まず、この節では、**「ケーリー・ハミルトンの定理」というものが、どのようなことを主張する定理なのか**ということをご説明してみようと思います。

● 多項式に行列 A を「代入」してみる

いま、行列 A は 2 行 2 列の行列ですから、上で見たように、自分自身と掛け算して、$A^2, A^3, \cdots$ などを考えることができます。そこで、例えば、

$$f(x) = x + 1 \tag{177}$$

という多項式に、行列 A を「**代入**」することを考えてみます。すると、(177) 式の変数 x のところに、素朴(そぼく)に $x = A$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f(A) &= A + 1 \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \end{aligned} \tag{178}$$

となりますが、このままでは、(178) 式の右辺は意味をなさないことになります。そこで、(178) 式の右辺に現われる 1 を、

$$1 \rightsquigarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように、「行列の世界」での 1 である単位行列 I に置き換えて、

$$\begin{aligned} f(A) &= A + I \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5+1 & -6+0 \\ 1+0 & 0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定めます。また、例えば、$f(x)$ が、

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

という多項式であれば、$f(x)$ の**定数項**(ていすうこう)である 3 を、

$$3 \rightsquigarrow 3I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

というように、「行列の世界」での 3 である $3I$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + 2A + 3I \\ &= \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19+10+3 & -30-12+0 \\ 5+2+0 & -6+0+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 & -42 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定めます。全く同様にして、勝手な多項式 $f(x)$ に対して、$f(x)$ に行列 A を「代入」して、$f(A)$ という行列を考えることができることが分かります。

- **多項式の「根」**

　さて、皆さんの中にも、ご存じの方が多いように、一般に、多項式 $f(x)$ に対して、

多項式 $f(x)$ が数 a を根に持つための条件

$$f(a) = 0 \tag{179}$$

となる数 a を多項式 $f(x)$ の**根**(こん)と呼んだりします。そうした多項式の根を用いると、多項式を**因数分解**(いんすうぶんかい)することができるということをご存じの方も多いのではないかと思います。例えば、

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

という多項式を考えると、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \\ f(2) &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、1 と 2 は多項式 $f(x)$ の根であることが分かりますが、この二つの根を用いて、$f(x)$ は、

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \tag{180}$$

というように因数分解できるわけです。また、a を 1 でも 2 でもない数とすると、

$$a \neq 1, \quad a \neq 2$$

ですから、

$$a-1 \neq 0, \quad a-2 \neq 0$$

となりますが、(180) 式の因数分解の結果から、

$$f(a) = (a-1)(a-2) \neq 0$$

となることが分かりますから、a は多項式 $f(x)$ の根にはならないことが分ります。したがって、多項式 $f(x)$ の根は 1 と 2 以外には存在しないことも分かるというわけです。

• 行列 A を「根」に持つ多項式

そこで、(179) 式の条件を、行列の場合にも拡張して、

多項式 $f(x)$ が行列 A を「根」に持つための条件

$$f(A) = O \tag{181}$$

という条件を考えて、(181) 式を満たすときに、**「多項式 $f(x)$ は、行列 A を「根」に持つ。」**と言うことにします。ここで、(181) の左辺の $f(A)$ は 2 行 2 列の行列になりますから、**(181) の右辺も、数の 0 ではなく、**

零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{182}$$

という「行列の世界」での 0 に置き換えました。[22] 一般に、(182) 式の行列 O のように、並んでいる数がすべて 0 であるような行列は、「行列の世界」で、ちょうど数の 0 と同じ役割を果たしますので、こうした行列を**零行列**(ぜろぎょうれつ)と呼びます。

一般に、2 行 2 列の行列、3 行 3 列の行列、$\cdots$ というように、行の数と列の数が同じ行列は、正方形の形をしているので、こうした行列を**正方行列**(せいほうぎょうれつ)と呼んだりします。5 節の最後でもご注意しましたが、正方行列 A は、自分自身と掛け算して、$A^2, A^3, \cdots$ などを考えることができますから、ここで考えている 2 行 2 列の行列の場合と同様に、多項式に行列 A を「代入」することができます。実は、「行列の世界」を探ってみると、**「正方行列 A の性質は、行列 A を「根」に持つ多項式に注目することで、より良く理解できる。」**ということが分かったりするのですが、そうした**「行列 A を「根」に持つ多項式を具体的に作ることができますよ。」ということを主張するのが「ケーリー・ハミルトンの定理」の内容です。**

[22] 行列 O は、どんな 2 行 2 列の行列 A に対しても、

$$A + O = A, \quad O + A = A$$

という式を満たしますので、「行列の世界」での 0 と考えることができます。

- **「ケーリー・ハミルトンの定理」**

ここでは、2 行 2 列の行列の場合にのみ、「ケーリー・ハミルトンの定理」の内容をご説明してみることにします。いま、a, b, c, d を、例えば、$a = 5, b = -6, c = 1, d = 0$ など、最初から確定した値が定まっている数として、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{183}$$

としたときに、行列 A から決まる

行列 $\boldsymbol{A}$ の「特性多項式」

$$\varphi_A(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc) \tag{184}$$

という多項式を、行列 A の**特性多項式**(とくせいたこうしき)と呼びます。ここで、「φ」は、英語の「f」に当たるギリシア語で「ファイ」と読みます。このように、ある多項式が、「単に、数ある多項式の中のひとつの例」ということでなく、「それ自体でとても意味のある (他とは区別された) 多項式」であることを示すために、

$$f(x) \rightsquigarrow \varphi(x)$$

というように、「英語」を「ギリシア語」に「格上げ」して表わしたりします。日本人にとっては、あまりピンときませんが、欧米人にとっては、「ギリシア・ローマ」というのは「永遠のふるさと」というような「憧れ」があるようです。また、今の場合には、「行列 A にとっての特別な多項式」ということを示すために、$\varphi(x)$ に「 $_A$ 」という添え字を付けて、$\varphi_A(x)$ と表わしました。

このとき、**「ケーリー・ハミルトンの定理」の主張は、**

「ケーリー・ハミルトンの定理」

$$\boldsymbol{\varphi_A(A) = O} \tag{185}$$

ということ、すなわち、行列 $\boldsymbol{A}$ の特性多項式 $\boldsymbol{\varphi_A(x)}$ は、行列 $\boldsymbol{A}$ を「根」に持つ多項式であるということです。実際、

$$\varphi_A(A) = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I$$

を計算してみると、

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot a + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ c \cdot a + d \cdot c & c \cdot b + d \cdot d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

となりますから、

$$\begin{aligned}
\varphi_A(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & (a+d)b \\ (a+d)c & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a^2+ad) + ad - bc & (a+d)b - (a+d)b + 0 \\ (a+d)c - (a+d)c + 0 & bc + d^2 - (ad+d^2) + ad - bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり、確かに、(185) 式が成り立っていることが分かります。このように、**「(183) 式の行列 A に対して、行列 A を「根」に持つ多項式 が (184) 式のように具体的に作れますよ。」**ということを教えてくれるのが「ケーリー・ハミルトンの定理」というわけです。

これはこれで良いのですが、皆さんの中には、「何、特性多項式って？」とか、「一体、

$$\varphi_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \tag{186}$$

なんて式、どっから思いついたの？」という当然の疑問が沸々（ふつふつ）とわいていらっしゃる方も多いのではないかと思います。実は、「行列の世界」に深く踏み入ってみると、「正方行列 A の性質をより良く理解するために、特性多項式 $\varphi_A(x)$ を考えると良さそうだ。」ということが納得のいく形で分かるのですが、そのためには、色々とご説明しなければならなくなりますので、残念ながら、今回は、「どうやって、(186) 式のような多項式を思いついたのか。」という点については説明を省略して、**「行列 A を「根」に持つ多項式に注目すると、行列 A の n 乗 A^n を、こんなふうに求めることができたりするんですよ。」**ということのご説明だけをしようと思います。

• 自分で「特性多項式」を見つけ出す

この点にご不満が残る方は、例えば、次のようにして、ご自分で特性多項式を見つけ出すこともできます。いま、問題にしている三項間漸化式の「公比」である行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列でしたが、この節の最初で計算したように、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

となるのでした。そこで、a, b を、例えば、$a = 1, b = 3$ など、最初から確定した値が定まっている数として、

$$f(x) = x^2 + ax + b \tag{187}$$

という二次式に、行列 A を「代入」した結果を求めてみます。すると、

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + aA + bI \\ &= \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5a & -6a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 + 5a + b & -30 - 6a \\ 5 + a & -6 + b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{188}$$

となることが分かりますから、(188) 式から、(187) 式の多項式 $f(x)$ が行列 A を「根」に持つための条件、すなわち、

$$f(A) = O$$

となるための条件は、

$$\begin{cases} 19 + 5a + b = 0 \\ -30 - 6a = 0 \\ 5 + a = 0 \\ -6 + b = 0 \end{cases} \tag{189}$$

となることが分かります。このとき、(189) 式の二番目、あるいは、三番目の方程式から、

$$a = -5$$

となることが、四番目の方程式から、

$$b = 6$$

となることが分かります。また、$a = -5$, $b = 6$ を (189) 式の一番目の方程式に代入してみると、

$$19 + 5 \cdot (-5) + 6 = 19 - 25 + 6 = 0$$

となることが分かりますから、(189) 式の連立一次方程式の解は、

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases}$$

となることが分かります。こうして、行列 A を「根」に持つ多項式として、

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

という多項式が見つかりましたが、これは、行列 A の特性多項式

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= x^2-(5+0)x+\{5\cdot 0-(-6)\cdot 1\} \\ &= x^2-5x+6 \qquad (190)\end{aligned}$$

に他なりません。よって、

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

という行列に対しては、「ケーリー・ハミルトンの定理」から、あるいは、上で行った考察から、

$$A^2-5A+6I=O \qquad (191)$$

となることが分かります。

練習問題 12. 次の行列 A に対して、行列 A の特性多項式を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

13 A^n を求めるには

さて、12 節では、

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (192)$$

という行列に対して、

(192) 式の行列 A に対する「ケーリー・ハミルトンの定理」

$$A^2-5A+6I=O \qquad (193)$$

という式が成り立つことを見ました。そこで、ここでは、**(193) 式を用いて、行列 A の n 乗 A^n を具体的に求める方法**についてご説明しようと思います。そのためのアイデアは、**「(193) 式の左辺の「因数分解」に注目して、(193) 式を二通りに書き直してみる。」**ということにあるのですが、まずは、(193) 式の左辺の「因数分解」という点についてご説明してみようと思います。

• 多項式の因数分解の確認

皆さんの中にも、過去に一生懸命練習された方、あるいは、今現在、一生懸命練習されている方も多いのではないかと思いますが、

$$x^2-5x+6$$

という 2 次式は、

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \qquad (194)$$

というように因数分解できることが分かります。このことを確認するためには、(194) 式の右辺の掛け算を、**分配法則**(ぶんぱいほうそく)などを用いて、

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x-3) &= \{x+(-2)\}(x-3) \\
&= x(x-3)+(-2)\cdot(x-3) \\
&= x\{x+(-3)\}+(-2)\cdot\{x+(-3)\} \\
&= x^2+x\cdot(-3)+(-2)x+(-2)\cdot(-3) \\
&= x^2+(-3)x+(-2)x+6 \\
&= x^2-3x-2x+6 \\
&= x^2-5x+6
\end{aligned}
\tag{195}
$$

というように計算してみればよいわけです。[23]

- **「行列の世界」での「分配法則」の確認** [24]

そこで、「行列の世界」でも (195) 式のような計算ができるということを確認するために、ここで、**一般的に「行列の世界」でも「分配法則」が成り立つ**ということを見ておくことにします。

まずは、A, B, C が、どんな 2 行 2 列の行列であったとしても、

$$
(A+B)C = AC+BC \tag{196}
$$

という式が成り立つことを確かめてみることにします。そこで、例によって、抽象的な行列を用いて議論することにします。いま、$a, b, c, \cdots, l$ は、例えば、$a=1, b=4, c=-3, \cdots, l=7$ など、最初から確定した値が決まっている数として、

$$
A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
(A+B)C &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a+e & b+f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+e & b+f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c+g & d+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c+g & d+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+e)\cdot i+(b+f)\cdot k & (a+e)\cdot j+(b+f)\cdot l \\ (c+g)\cdot i+(d+h)\cdot k & (c+g)\cdot j+(d+h)\cdot l \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[23] 以下での「行列の世界」での計算と見比べるために、少し丁寧に (195) 式の計算を書きました。

[24] 以下の抽象的な行列を用いた計算などに圧倒されそうな方は、取り合えず、(206) 式、(207) 式、(208) 式、(209) 式という結果だけ認めて、次の「「行列の世界」での「因数分解」の確認」に進んでいただいても構いません。実際に議論を追われてみると、皆さんにもお分かりになるのではないかと思いますが、ここでの計算は「随分、難しそう」に見えますが、実際には、見かけほど難しくなかったりします。

$$= \begin{pmatrix} ai+ei+bk+fk & aj+ej+bl+fl \\ ci+gi+dk+hk & cj+gj+dl+hl \end{pmatrix} \tag{197}$$

となることが分かります。一方、

$$\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \cdot i + b \cdot k & a \cdot j + b \cdot l \\ c \cdot i + d \cdot k & c \cdot j + d \cdot l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+dk & cj+dl \end{pmatrix} \qquad (198) \\
BC &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e \cdot i + f \cdot k & e \cdot j + f \cdot l \\ g \cdot i + h \cdot k & g \cdot j + h \cdot l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \qquad (199)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから、(198) 式、(199) 式から、

$$\begin{aligned}
AC+BC &= \begin{pmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+dk & cj+dl \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ai+bk)+(ei+fk) & (aj+bl)+(ej+fl) \\ (ci+dk)+(gi+hk) & (cj+dl)+(gj+hl) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ai+bk+ei+fk & aj+bl+ej+fl \\ ci+dk+gi+hk & cj+dl+gj+hl \end{pmatrix} \qquad (200)
\end{aligned}$$

となることが分かります。よって、(197) 式と (200) 式から、

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} ai+ei+bk+fk & aj+ej+bl+fl \\ ci+gi+dk+hk & cj+gj+dl+hl \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ai+bk+ei+fk & aj+bl+ej+fl \\ ci+dk+gi+hk & cj+dl+gj+hl \end{pmatrix} \\
&= AC+BC
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、(196) 式が成り立つことが分かります。
次に、

$$
A(B+C) = AB + AC \tag{201}
$$

となることを確かめてみることにします。すると、

$$
\begin{aligned}
A(B+C) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+i \\ g+k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f+j \\ h+l \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+i \\ g+k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f+j \\ h+l \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cdot(e+i)+b\cdot(g+k) & a\cdot(f+j)+b\cdot(h+l) \\ c\cdot(e+i)+d\cdot(g+k) & c\cdot(f+j)+d\cdot(h+l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+ai+bg+bk & af+aj+bh+bl \\ ce+ci+dg+dk & cf+cj+dh+dl \end{pmatrix} \qquad (202)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。一方、

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cdot e+b\cdot g & a\cdot f+b\cdot h \\ c\cdot e+d\cdot g & c\cdot f+d\cdot h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \qquad (203) \\
AC &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \cdot i + b \cdot k & a \cdot j + b \cdot l \\ c \cdot i + d \cdot k & c \cdot j + d \cdot l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{pmatrix} \qquad (204)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、(203) 式、(204) 式から、

$$
\begin{aligned}
AB + AC &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ae + bg) + (ai + bk) & (af + bh) + (aj + bl) \\ (ce + dg) + (ci + dk) & (cf + dh) + (cj + dl) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae + bg + ai + bk & af + bh + aj + bl \\ ce + dg + ci + dk & cf + dh + cj + dl \end{pmatrix} \qquad (205)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。よって、(202) 式と (205) 式から、

$$
\begin{aligned}
A(B + C) &= \begin{pmatrix} ae + ai + bg + bk & af + aj + bh + bl \\ ce + ci + dg + dk & cf + cj + dh + dl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae + bg + ai + bk & af + bh + aj + bl \\ ce + dg + ci + dk & cf + dh + cj + dl \end{pmatrix} \\
&= AB + AC
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、(201) 式が成り立つことが分かります。

以上より、A, B, C が、どんな 2 行 2 列の行列であったとしても、

$$(A + B)C = AC + BC \qquad (206)$$

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (207)$$

というように「分配法則」が成り立っていることが分りました。また、7 節で見たように、A, B, C が、どんな 2 行 2 列の行列であったとしても、また k がどんな数であったとしても、

$$(kA) \cdot B = k(AB) \qquad (208)$$

$$A \cdot (kB) = k(AB) \qquad (209)$$

となることも分かります。[25]

[25] ここでの記号とは違いますが、7 節の (111) 式、(112) 式では、

$$\left(\frac{1}{k}C\right) \cdot A = \frac{1}{k}(CA)$$

- **「行列の世界」での「因数分解」の確認**

そこで、これらの式を用いて、**「行列の世界」でも「因数分解」の式が、そのままの形で成り立つ**ことを確かめてみることにします。上でも見たように、「数の世界」では、

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \tag{210}$$

という因数分解の式が成り立つのでした。このとき、(210) 式の両辺に $x = A$ を「代入」すると、

$$A^2 - 5A + 6I = (A-2I)(A-3I) \tag{211}$$

となりますが、数の場合と同様に、(211) 式が成り立つことを確かめてみることにします。
いま、

$$(A-2I)(A-3I) = \{A + (-2I)\}(A-3I)$$

と考えて、

$$A \rightsquigarrow A, \quad B \rightsquigarrow -2I, \quad C \rightsquigarrow A-3I$$

と置き換えて、(206) 式を用いると、

$$\begin{aligned}(A-2I)(A-3I) &= \{A+(-2I)\}(A-3I) \\ &= A(A-3I) + (-2I)(A-3I) \\ &= A\{A+(-3I)\} + (-2I)\{A+(-3I)\}\end{aligned} \tag{212}$$

となることが分かります。そこで、

$$A \rightsquigarrow A, \quad B \rightsquigarrow A, \quad C \rightsquigarrow -3I$$

と置き換えて、(207) 式を用いると、(212) 式の第一項は、

$$A\{A+(-3I)\} = A^2 + A\cdot(-3I) \tag{213}$$

というように書き直せることが分かります。全く同様に、

$$A \rightsquigarrow -2I, \quad B \rightsquigarrow A, \quad C \rightsquigarrow -3I$$

と置き換えて、(207) 式を用いると、(212) 式の第二項は、

$$(-2I)\{A+(-3I)\} = (-2I)\cdot A + (-2I)\cdot(-3I) \tag{214}$$

というように書き直せることが分かります。よって、(212) 式、(213) 式、(214) 式から

$$(A-2I)(A-3I) = A^2 + A\cdot(-3I) + (-2I)\cdot A + (-2I)\cdot(-3I) \tag{215}$$

あるいは、

$$A\cdot\left(\frac{1}{k}C\right) = \frac{1}{k}(AC)$$

という形で、このことを確かめました。

となることが分かります。

ここで、

$$A \rightsquigarrow A, \quad B \rightsquigarrow I, \quad k \rightsquigarrow -3$$

と置き換えて、(209) 式を用いると、

$$A \cdot (-3I) = (-3)(AI) = -3A \tag{216}$$

となることが分かります。[26] 全く同様に、

$$A \rightsquigarrow I, \quad B \rightsquigarrow A, \quad k \rightsquigarrow -2$$

と置き換えて、(208) 式を用いると、

$$(-2I) \cdot A = (-2)(IA) = -2A \tag{217}$$

となることが分かります。また、

$$A \rightsquigarrow I, \quad B \rightsquigarrow -3I, \quad k \rightsquigarrow -2$$

と置き換えて、(208) 式を用いると、

$$(-2I) \cdot (-3I) = (-2)\{I \cdot (-3I)\} = (-2)(-3I) = \{(-2)(-3)\}I = 6I \tag{218}$$

となることが分かります。よって、(215) 式、(216) 式、(217) 式、(218) 式から、

$$\begin{aligned}(A-2I)(A-3I) &= A^2 + A \cdot (-3I) + (-2I) \cdot A + (-2I) \cdot (-3I) \\ &= A^2 + (-3A) + (-2A) + 6I \\ &= A^2 - 3A - 2A + 6I \\ &= A^2 - 5A + 6I \end{aligned} \tag{219}$$

となることが分かりますから、確かに、(211) 式が成り立つことが分かります。

全く同様にして、

$$\begin{aligned}(A-3I)(A-2I) &= \{A + (-3I)\}(A-2I) \\ &= A(A-2I) + (-3I)(A-2I) \\ &= A\{A + (-2I)\} + (-3I)\{A + (-2I)\} \\ &= A^2 + A \cdot (-2I) + (-3I) \cdot A + (-3I) \cdot (-2I) \\ &= A^2 + (-2A) + (-3A) + 6I \\ &= A^2 - 2A - 3A + 6I \\ &= A^2 - 5A + 6I \end{aligned} \tag{220}$$

[26] (216) 式の二番目の等号では、単位行列 I が「行列の世界」の 1 であることを用いました。

となることも分かります。こんなふうに、きちんと書くと「大袈裟」に見えますが、(219) 式、(220) 式の言っていることは、**「行列の世界」でも、数のときと同様に、普通に括弧 (　) を外した計算ができる**ということです。

練習問題 13. 次の行列 A に対して、行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を因数分解した式に $x = A$ を代入してみることで、「ケーリー・ハミルトンの定理」が成り立っていることを確かめよ。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- **A^n の計算**

以上の準備のもとで、この節の目標であった A^n を具体的に求めてみることにします。いま、「ケーリー・ハミルトンの定理」から、

$$\varphi_A(A) = A^2 - 5A + 6I = O$$

となりますから、(219) 式と合わせて、

「因数分解」した形での「ケーリー・ハミルトンの定理」(その１)

$$(A - 2I)(A - 3I) = O \tag{221}$$

となることが分かります。ここで、(221) 式の左辺を「分配法則」を用いて、

$$\begin{aligned}(A - 2I)(A - 3I) &= \{A + (-2I)\}(A - 3I) \\ &= A(A - 3I) + (-2I)(A - 3I) \\ &= A(A - 3I) + (-2)\{I(A - 3I)\} \\ &= A(A - 3I) + (-2)(A - 3I) \\ &= A(A - 3I) - 2(A - 3I) \end{aligned} \tag{222}$$

と書き直してみると、(221) 式、(222) 式から、

$$A(A - 3I) - 2(A - 3I) = O$$

となることが分かりますから、

「ケーリー・ハミルトンの定理」の書き換え (その１)

$$A(A - 3I) = 2(A - 3I) \tag{223}$$

となることが分かります。以下で見るように、**この (223) 式が、A^n を求めるときの一番キーとなる式です。**

いま、(223) 式の両辺に左から、A を掛け算してみると、

$$A^2(A - 3I) = A \cdot \{2(A - 3I)\} \tag{224}$$

となりますが、

$$A \rightsquigarrow A, \quad B \rightsquigarrow A - 3I, \quad k \rightsquigarrow 2$$

と置き換えて、(209) 式を用いると、

$$A \cdot \{2(A - 3I)\} = 2A(A - 3I) \tag{225}$$

となることが分かります。そこで、もう一度、(223) 式を用いると、

$$2A(A - 3I) = 2 \cdot 2(A - 3I) = 2^2(A - 3I) \tag{226}$$

となることが分かりますから、結局、(224) 式、(225) 式、(226) 式から、

$$\begin{aligned} A^2(A - 3I) &= A \cdot \{2(A - 3I)\} \\ &= 2A(A - 3I) \\ &= 2 \cdot 2(A - 3I) \\ &= 2^2(A - 3I) \end{aligned} \tag{227}$$

というような計算ができることが分かります。

そこで、さらに、(227) 式の両辺に左から A を掛け算して、同様の計算を行なうと、

$$\begin{aligned} A^3(A - 3I) &= A \cdot \{2^2(A - 3I)\} \\ &= 2^2 A(A - 3I) \\ &= 2^2 \cdot 2(A - 3I) \\ &= 2^3(A - 3I) \end{aligned} \tag{228}$$

となることが分かります。

よって、(223) 式、(227) 式、(228) 式から、

$$\begin{aligned} A(A - 3I) &= 2(A - 3I) \\ A^2(A - 3I) &= 2^2(A - 3I) \\ A^3(A - 3I) &= 2^3(A - 3I) \end{aligned}$$

となることが分りましたが、以下同様に考えると、

$$\begin{aligned} A^4(A - 3I) &= 2^4(A - 3I) \\ A^5(A - 3I) &= 2^5(A - 3I) \\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが順番に分かりますから、一般に、

「ケーリー・ハミルトンの定理」の帰結 (その１)

$$A^n(A - 3I) = 2^n(A - 3I), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{229}$$

となることが分かります。[27]

[27]「数学的帰納法」をご存じの方は、「数学的帰納法」を用いて、(229) 式を確かめてみて下さい。

そこで、次に、今度は、「ケーリー・ハミルトンの定理」を、

「因数分解」した形での「ケーリー・ハミルトンの定理」(その２)

$$(A-3I)(A-2I)=O \tag{230}$$

という形で表わして、全く同様の計算を行なってみます。すると、前と同様に、(230) 式の左辺を「分配法則」を用いて、

$$\begin{aligned}(A-3I)(A-2I) &= \{A+(-3I)\}(A-2I)\\ &= A(A-2I)+(-3I)(A-2I)\\ &= A(A-2I)+(-3)\{I(A-2I)\}\\ &= A(A-2I)+(-3)(A-2I)\\ &= A(A-2I)-3(A-2I)\end{aligned} \tag{231}$$

と書き直してみると、(230) 式、(231) 式から、

$$A(A-2I)-3(A-2I)=O$$

となることが分かりますから、

「ケーリー・ハミルトンの定理」の書き換え (その２)

$$A(A-2I)=3(A-2I) \tag{232}$$

となることが分かります。そこで、(232) 式の両辺に左から A を掛け算すると、

$$\begin{aligned}A^2(A-2I) &= A\cdot\{3(A-2I)\}\\ &= 3A(A-2I)\\ &= 3\cdot 3(A-2I)\\ &= 3^2(A-2I)\end{aligned} \tag{233}$$

となることが分かります。さらに、(233) 式の両辺に左から A を掛け算すると、

$$\begin{aligned}A^3(A-2I) &= A\cdot\{3^2(A-2I)\}\\ &= 3^2A(A-2I)\\ &= 3^2\cdot 3(A-2I)\\ &= 3^3(A-2I)\end{aligned}$$

となることが分かります。以下同様にして、順番、順番に、

$$\begin{aligned}A(A-2I) &= 3(A-2I)\\ A^2(A-2I) &= 3^2(A-2I)\\ A^3(A-2I) &= 3^3(A-2I)\end{aligned}$$

$$A^4(A-2I) = 3^4(A-2I)$$
$$\vdots$$

となることが分かりますから、一般に、

「ケーリー・ハミルトンの定理」の帰結 (その２)

$$A^n(A-2I) = 3^n(A-2I), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{234}$$

となることが分かります。

したがって、(229) 式、(234) 式から、$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、

$$A^n(A-3I) = 2^n(A-3I) \tag{235}$$
$$A^n(A-2I) = 3^n(A-2I) \tag{236}$$

という二つの式が成り立つことが分りました。ここで、「分配法則」などを用いて、(235) 式と (236) 式の左辺の括弧 (　) を外すと、

$$A^{n+1} - 3A^n = 2^n(A-3I) \tag{237}$$
$$A^{n+1} - 2A^n = 3^n(A-2I) \tag{238}$$

となることが分かります。よって、(238) 式から (237) 式を引き算することで、

A^n の計算結果

$$A^n = 3^n(A-2I) - 2^n(A-3I) \tag{239}$$

となることが分かりました。

- **A^n の具体的な形**

いま、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

でしたから、

$$\begin{aligned} A-2I &= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5-2 & -6-0 \\ 1-0 & 0-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{240}$$

$$A-3I = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 5-3 & -6-0 \\ 1-0 & 0-3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (241)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。よって、(239) 式、(240) 式、(241) 式から、

$$
\begin{aligned}
A^n &= 3^n(A-2I) - 2^n(A-3I) \\
&= 3^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n \cdot 3 & 3^n \cdot (-6) \\ 3^n & 3^n \cdot (-2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 & 2^n \cdot (-6) \\ 2^n & 2^n \cdot (-3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2) \cdot 3^{n+1} \\ 3^n & (-2) \cdot 3^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-3) \cdot 2^{n+1} \\ 2^n & (-3) \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & (-2) \cdot 3^{n+1} - (-3) \cdot 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & (-2) \cdot 3^n - (-3) \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \qquad (242)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。こうして、A^n を具体的に求めることができましたが、(242) 式を見ると、12 節の最初で、

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 65 & -114 \\ 19 & -30 \end{pmatrix}
$$

というように、A, A^2, A^3 を具体的に計算して、A^n に「当たり」を付けようとしても、なかなか「当たり」が付かなかったのも、「もっともなこと」だったということも分ります。

練習問題 14. 次の行列 A に対して、A の n 乗 A^n を求めよ。

$$
(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

- **漸化式を満たす数列の一般項**

さて、もともとの漸化式の話に戻ると、11 節では、

$$
x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad (243)
$$

という三項間漸化式が、行列の記法を用いることで、

$$
\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

として、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} \tag{244}$$

というように簡明な形に表わせることに注目して、(244) 式を、

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{245}$$

というように形式的に解いたのでした。よって、(242) 式、(245) 式から、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= \mathbf{x}_n \\
&= A^{n-1}\mathbf{x}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 3^n - 2^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3^n - 2^n)x_1 + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)x_0 \\ (3^{n-1} - 2^{n-1})x_1 + (3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1})x_0 \end{pmatrix} \qquad (246)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから、(246) 式から、

(243) 式の漸化式を満たす数列の一般項

$$x_n = (3^n - 2^n)x_1 + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)x_0$$

となることが分かります。

練習問題 15. 次の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ。

$$x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

14 高校数学の解法と比べると

さて、上で取り上げた

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{247}$$

というような三項間漸化式は、高校の数学でも扱われていますので、皆さんの中にもご存じの方がいらっしゃるのではないかと思います。そこで、ここでは、(247) 式の三項間漸化式をもとにして、**高校数学の典型的（てんけいてき）な解法と、上でご説明してきた「行列」を用いた解法との関係**をご説明してみようと思います。

- **高校数学の解法**

高校の数学の教科書や参考書では、いくつか説明の仕方はあるとは思いますが、典型的には、**(247) 式の漸化式を、**

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \tag{248}$$

と書き直して、(248) 式と

$$\boldsymbol{t^2 - 5t + 6 = 0} \tag{249}$$

という二次方程式を結びつけるところからスタートするのではないかと思います。[28] おっと、何やら声が聞こえてきました。ますは、曰く、「むにゃ、むにゃ、むにゃ、天からのお告げじゃ。

$$x_n \longleftrightarrow t^2, \quad x_{n-1} \longleftrightarrow t, \quad x_{n-2} \longleftrightarrow 1 \tag{250}$$

と対応させて、

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \longleftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

と対応させてみるのじゃ。」次に、曰く、「むにゃ、むにゃ、むにゃ、(249) 式の左辺を因数分解して、(249) 式を、

$$(t-2)(t-3) = 0$$

と書き直し、分配法則を用いて、

$$t(t-3) - 2(t-3) = 0$$

というように最初の括弧 (　) を外して、

$$t(t-3) = 2(t-3) \tag{251}$$

と変形してみるのじゃ。」さらに、曰く、「むにゃ、むにゃ、むにゃ、(250) 式の対応のもとで、(251) 式を数列の漸化式に戻してみるのじゃ。さらば、道は開けよう。」

実際、(251) 式は、(249) 式の二次方程式を、

$$t^2 - 3t = 2(t-3) \tag{252}$$

というように書き直したということですが、(250) 式の対応のもとで、(252) 式を数列の漸化式に戻すと、

$$t^2 - 3t = 2(t-3) \longleftrightarrow x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2})$$

ということになります。こうして、**(248) 式の漸化式を**

第一の「お告げ」の内容

$$\boldsymbol{x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2})} \tag{253}$$

というように書き直して考えてみなさいということが第一の「お告げ」の内容になります。

どうして、これで「道が開ける」のかと言うと、「目くらまし」に会わないように、

$$y_1 = x_1 - 3x_0$$
$$y_2 = x_2 - 3x_1$$

[28] これまでは、多項式の変数を「x」で表わしてきましたが、この節では、多項式と数列を見比べながら考察することが議論のポイントになりますので、多項式の変数 x と数列の一般項 x_n が、頭の中でゴチャゴチャになってしまわないように、多項式の変数を「t」という文字を使って表わすことにしました。

$$
\begin{aligned}
y_3 &= x_3 - 3x_2 \\
&\vdots \\
y_n &= x_n - 3x_{n-1} \qquad (254) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

という式によって、

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

という数列から、

$$y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, \cdots$$

という数列を作ってみると、(253) 式は、

第一の「お告げ」の内容

$$y_n = 2y_{n-1} \tag{255}$$

という数列

$$y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, \cdots$$

に対する二項間漸化式に書き直せるからです。しかも、**(255) 式の漸化式は、**

$$\boldsymbol{y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, \cdots}$$

という数列が公比が 2 の等比数列であるということを意味していますから、10 節で見たように、この漸化式はすぐに解けて、

(255) 式の漸化式を満たす数列の一般項

$$y_{n+1} = 2^n y_1, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{256}$$

となることが分かります。[29] そこで、(254) 式を用いて、(256) 式を、

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

という数列の言葉に戻してやると、

第一の「お告げ」の帰結

$$x_{n+1} - 3x_n = 2^n(x_1 - 3x_0) \tag{257}$$

という式が得られました。

そこで、第二の「お告げ」が来ます。曰く、「むにゃ、むにゃ、むにゃ、今度は、(249) 式の左辺を因数分解して、

$$(t-3)(t-2) = 0$$

[29] 後の (267) 式で、x_n について解けるように、予め $y_n = 2^{n-1}y_1$ という式ではなく、y_{n+1} で解いた式を考えました。

と書き直し、「分配法則」を用いて、

$$t(t-2)-3(t-2)=0$$

というように最初の括弧 (　) を外して、

$$t(t-2)=3(t-2) \tag{258}$$

と変形してみるのじゃ。」さらに、曰く、「むにゃ、むにゃ、むにゃ、(250) 式の対応のもとで、(258) 式を数列の漸化式に戻してみるのじゃ。さらば、さらに道は開けよう。」

実際、前と同様に、(258) 式は、(249) 式の二次方程式を、

$$t^2-2t=3(t-2) \tag{259}$$

というように書き直したということですが、(250) 式の対応のもとで、(259) 式を数列の漸化式に戻すと、

$$t^2-2t=3(t-2) \longleftrightarrow x_n-2x_{n-1}=3(x_{n-1}-2x_{n-2})$$

ということになります。こうして、**(248) 式の漸化式を、今度は、**

第二の「お告げ」の内容

$$\boldsymbol{x_n-2x_{n-1}=3(x_{n-1}-2x_{n-2})} \tag{260}$$

というように書き直して考えてみなさいということが第二の「お告げ」の内容になります。

そこで、前と同様に、「目くらまし」に会わないように、

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1-2x_0 \\ z_2 &= x_2-2x_1 \\ z_3 &= x_3-2x_2 \\ &\vdots \\ z_n &= x_n-2x_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{261}$$

という式によって、

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots$$

という数列から、

$$z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4,\, \cdots$$

という数列を作ってみます。すると、(260) 式は、

第二の「お告げ」の内容

$$z_n=3z_{n-1} \tag{262}$$

という数列

$$z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4,\, \cdots$$

に対する二項間漸化式になりますが、前と同様に、**(262) 式の漸化式は、**

$$\boldsymbol{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ \cdots}$$

という数列が公比が 3 の等比数列であるということを意味しているわけです。よって、この漸化式もすぐに解けて、

(262) 式の漸化式を満たす数列の一般項

$$z_{n+1} = 3^n z_1, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{263}$$

となることが分かります。そこで、(261) 式を用いて、(263) 式を、

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$$

という数列の言葉に戻してやると、

第二の「お告げ」の帰結

$$x_{n+1} - 2x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) \tag{264}$$

という式が得られました。よって、(257) 式、(264) 式から、

$$x_{n+1} - 3x_n = 2^n(x_1 - 3x_0) \tag{265}$$
$$x_{n+1} - 2x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) \tag{266}$$

という二つの式が得られましたので、(266) 式から (265) 式を引き算することで、

(247) 式の漸化式を満たす数列の一般項

$$x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) - 2^n(x_1 - 3x_0), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{267}$$

というように、(247) 式の漸化式を満たす数列の一般項が求まります。

大体、以上のような方針で、三項間漸化式を解けばよいということが、高校の数学の教科書や参考書には説明されているのではないでしょうか。これは、これで良いのですが、皆さんの中にも、「最初の「お告げ」って、何？どっから、そんな「お告げ」を思いついたの？」という当然の疑問が沸々（ふつふつ）とわいた方も多いのではないでしょうか。一方で、ここまで長大な文章を読んで来られた皆さんの中には、**「何か、上の議論は、13 節の議論と似てない？」**と思われた方も多いのではないかと思います。実際、以下でご説明するように、**二つの議論の間には密接な関係があります。**

- **「ケーリー・ハミルトンの定理」と漸化式の間の関係**

まず、11 節では、

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{268}$$

という三項間漸化式が、行列の記法を用いることで、

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} \tag{269}$$

というように簡明な形に表わせることに注目して、(269) 式を、

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{270}$$

というように形式的に解くことで、**「(268) 式の漸化式を満たす数列の一般項を求める問題」を「行列 A の n 乗 A^n を求める問題」に帰着した**のでした。また、13 節では、**A^n を具体的に求めるために、「ケーリー・ハミルトンの定理」を利用しました。**

そのときの議論を見返すと、**行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ は、**

$$\boldsymbol{\varphi_A(t) = t^2 - 5t + 6}$$

となることが分りますが、これは、「お告げ」のスタート・ポイントである

$$\boldsymbol{t^2 - 5t + 6 = 0} \tag{271}$$

という 2 次方程式の左辺に登場する 2 次式に他なりません。 すなわち、**「行列」の立場で見直すと、(271) 式の左辺の 2 次式は、(268) 式の漸化式の「隠れた公比」A に対する特性多項式として自然に登場する**ことが分かります。また、今の場合、**「ケーリー・ハミルトンの定理」の主張は、**

$$\boldsymbol{A^2 - 5A + 6I = O} \tag{272}$$

ということになりますが、これは、(271) 式に対応した式だと考えられます。

そこで、どうして、

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \longleftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \tag{273}$$

という対応を考えるのかということですが、以下でご説明するように、実は、この対応は、(273) 式のように、2 次方程式と対応させたと考えるよりも、

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \longleftrightarrow A^2 - 5A + 6I = O} \tag{274}$$

というように、「ケーリー・ハミルトンの定理」と対応させたと考える方が、ずっと納得のいく形で理解できるのではないかと思います。

いま、「公比」が A の「等比数列」

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$$

に対しては、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} \tag{275}$$

となりますから、$\mathbf{x}_n$ **に行列 A を掛け算することは、**

行列 A の掛け算は $\mathbf{x}_n$ の番号 n を一つずらす

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{\text{行列 } A \text{ を掛け算}} \boldsymbol{\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n}$$

というように、「$\mathbf{x}_n$ の番号 n を一つずらす操作（そうさ）」であると考えることができます。このことに注意して、(272) 式の両辺を、例えば、$\mathbf{x}_1$ に施してみます。すると、

$$(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_1 = O\mathbf{x}_1 \tag{276}$$

となりますが、

$$
\begin{aligned}
(A^2-5A+6I)\mathbf{x}_1 &= A^2\mathbf{x}_1 - 5A\mathbf{x}_1 + 6I\mathbf{x}_1 \\
&= A(A\mathbf{x}_1) - 5A\mathbf{x}_1 + 6I\mathbf{x}_1 \\
&= A\mathbf{x}_2 - 5\mathbf{x}_2 + 6\mathbf{x}_1 \\
&= \mathbf{x}_3 - 5\mathbf{x}_2 + 6\mathbf{x}_1 \qquad (277)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
O\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (278)
\end{aligned}
$$

となりますから、(276) 式、(277) 式、(278) 式から、

$$
\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

として、

$$
\mathbf{x}_3 - 5\mathbf{x}_2 + 6\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \qquad (279)
$$

となることが分かります。ここで、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_3 - 5\mathbf{x}_2 + 6\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x_2 \\ 5x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 6x_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_3 - 5x_2 + 6x_1 \\ x_2 - 5x_1 + 6x_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから、(279) 式は、

$$
\begin{cases} x_3 - 5x_2 + 6x_1 = 0 \\ x_2 - 5x_1 + 6x_0 = 0 \end{cases} \qquad (280)
$$

という二つの式を表わしていることが分かります。すなわち、

$$\boldsymbol{A^2 - 5A + 6I = O} \tag{281}$$

という「ケーリー・ハミルトンの定理」の両辺を、$\mathbf{x}_1$ に施して得られる

$$\boldsymbol{(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_1 = 0}$$

という式は、(280) 式という二つの式を表わしていることが分かります。

次に、(281) 式の両辺を、$\mathbf{x}_2$ に施してみると、

$$(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \tag{282}$$

という式が得られますが、前と同様に、

$$\begin{aligned}(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_2 &= A^2\mathbf{x}_2 - 5A\mathbf{x}_2 + 6I\mathbf{x}_2 \\ &= A(A\mathbf{x}_2) - 5A\mathbf{x}_2 + 6I\mathbf{x}_2 \\ &= A\mathbf{x}_3 - 5\mathbf{x}_3 + 6\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_4 - 5\mathbf{x}_3 + 6\mathbf{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_4 - 5x_3 + 6x_2 \\ x_3 - 5x_2 + 6x_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることが分かりますから、**(282) 式は、**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_4 - 5x_3 + 6x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_3 - 5x_2 + 6x_1 = 0} \end{cases} \tag{283}$$

という二つの式を表わしていることが分かります。

以下、同様に考えると、一般に、(281) 式の両辺を、$\mathbf{x}_{n-1}$ に施してみると、

$$(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{0} \tag{284}$$

という式が得られますが、前と同様に、

$$\begin{aligned}(A^2 - 5A + 6I)\mathbf{x}_{n-1} &= A^2\mathbf{x}_{n-1} - 5A\mathbf{x}_{n-1} + 6I\mathbf{x}_{n-1} \\ &= A(A\mathbf{x}_{n-1}) - 5A\mathbf{x}_{n-1} + 6I\mathbf{x}_{n-1} \\ &= A\mathbf{x}_n - 5\mathbf{x}_n + 6\mathbf{x}_{n-1} \\ &= \mathbf{x}_{n+1} - 5\mathbf{x}_n + 6\mathbf{x}_{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} \\ x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることが分かりますから、**(284) 式は、**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0} \\ \boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \end{cases} \tag{285}$$

という式を表わしていることが分かります。

以上から、

「ケーリー・ハミルトンの定理」と漸化式の間の関係

$$A^2-5A+6I=O \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_3-5x_2+6x_1=0 \\ x_2-5x_1+6x_0=0 \end{cases}$$

$$A^2-5A+6I=O \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_2 \text{ に施す}} \begin{cases} x_4-5x_3+6x_2=0 \\ x_3-5x_2+6x_1=0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A^2-5A+6I=O \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_{n-1} \text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+1}-5x_n+6x_{n-1}=0 \\ x_n-5x_{n-1}+6x_{n-2}=0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

というように、**「ケーリー・ハミルトンの定理」は数列の漸化式を「生み出すもと」**になっていることが分かりました。

- **第一の「お告げ」との関係**

さて、第一の「お告げ」では、

$$t^2-5t+6=0 \tag{286}$$

という二次方程式の左辺を、

$$(t-2)(t-3)=0$$

というように因数分解した上で、「分配法則」を用いて最初の括弧 (　) を外して、(286) 式を、

$$t(t-3)=2(t-3) \tag{287}$$

というように書き直してみました。このことは、行列 A の n 乗 A^n を具体的に求めるために、

$$A^2-5A+6I=O \tag{288}$$

という「ケーリー・ハミルトンの定理」の左辺を、

$$(A-2I)(A-3I)=O$$

というように「因数分解」した上で、「分配法則」を用いて最初の括弧 (　) を外して、(288) 式を、

$$A(A-3I)=2(A-3I) \tag{289}$$

というように書き直してみたことに、ちょうど対応していることが分かります。

そこで、第一の「お告げ」では、

$$t^2 - 3t = 2(t-3) \longleftrightarrow x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2})$$

というように対応させて考えたのですが、以下で見るように、こちらの方も、

$$\boldsymbol{A(A-3I) = 2(A-3I) \longleftrightarrow x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2})}$$

というように、(289) 式と対応させたと考える方が、ずっと納得のいく形で理解できるのではないかと思います。

そこで、前と同様に、(289) 式の両辺を $\mathbf{x}_1$ に施してみると、

$$A(A-3I)\mathbf{x}_1 = 2(A-3I)\mathbf{x}_1 \tag{290}$$

ということになりますが、

$$\begin{aligned} A(A-3I)\mathbf{x}_1 &= (A^2 - 3A)\mathbf{x}_1 \\ &= A(A\mathbf{x}_1) - 3A\mathbf{x}_1 \\ &= A(\mathbf{x}_2) - 3\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_3 - 3\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{291}$$

$$\begin{aligned} 2(A-3I)\mathbf{x}_1 &= 2(A\mathbf{x}_1 - 3I\mathbf{x}_1) \\ &= 2(\mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_1) \end{aligned} \tag{292}$$

となりますから、(290) 式、(291) 式、(292) 式から、

$$\mathbf{x}_3 - 3\mathbf{x}_2 = 2(\mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_1) \tag{293}$$

となることが分かります。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 - 3\mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 - 3x_2 \\ x_2 - 3x_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{294}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - 3x_1 \\ x_1 - 3x_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{295}$$

となることが分かりますから、(293) 式、(294) 式、(295) 式から、

$$\begin{pmatrix} x_3 - 3x_2 \\ x_2 - 3x_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2 - 3x_1 \\ x_1 - 3x_0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。よって、(293) 式は、

$$\begin{cases} x_3 - 3x_2 = 2(x_2 - 3x_1) \\ x_2 - 3x_1 = 2(x_1 - 3x_0) \end{cases}$$

という二つの式を表わしていることが分かります。

次に、(289) 式の両辺を $\mathbf{x}_2$ に施してみると、

$$A(A - 3I)\mathbf{x}_2 = 2(A - 3I)\mathbf{x}_2 \tag{296}$$

ということになりますが、

$$\begin{aligned} A(A - 3I)\mathbf{x}_2 &= (A^2 - 3A)\mathbf{x}_2 \\ &= A(A\mathbf{x}_2) - 3A\mathbf{x}_2 \\ &= A(\mathbf{x}_3) - 3\mathbf{x}_3 \\ &= \mathbf{x}_4 - 3\mathbf{x}_3 \qquad (297) \\ 2(A - 3I)\mathbf{x}_2 &= 2(A\mathbf{x}_2 - 3I\mathbf{x}_2) \\ &= 2(\mathbf{x}_3 - 3\mathbf{x}_2) \qquad (298) \end{aligned}$$

となりますから、(296) 式、(297) 式、(298) 式から、

$$\mathbf{x}_4 - 3\mathbf{x}_3 = 2(\mathbf{x}_3 - 3\mathbf{x}_2) \tag{299}$$

となることが分かります。よって、(299) 式から、

$$\begin{pmatrix} x_4 - 3x_3 \\ x_3 - 3x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_3 - 3x_2 \\ x_2 - 3x_1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、(299) 式は、

$$\begin{cases} x_4 - 3x_3 = 2(x_3 - 3x_2) \\ x_3 - 3x_2 = 2(x_2 - 3x_1) \end{cases}$$

という式を表わしていることが分かります。

以下、同様に考えると、一般に、(289) 式の両辺を $\mathbf{x}_{n-1}$ に施してみると、

$$A(A - 3I)\mathbf{x}_{n-1} = 2(A - 3I)\mathbf{x}_{n-1} \tag{300}$$

ということになりますが、

$$\begin{aligned}
A(A-3I)\mathbf{x}_{n-1} &= (A^2-3A)\mathbf{x}_{n-1} \\
&= A(A\mathbf{x}_{n-1}) - 3A\mathbf{x}_{n-1} \\
&= A(\mathbf{x}_n) - 3\mathbf{x}_n \\
&= \mathbf{x}_{n+1} - 3\mathbf{x}_n \qquad (301) \\
2(A-3I)\mathbf{x}_{n-1} &= 2(A\mathbf{x}_{n-1} - 3I\mathbf{x}_{n-1}) \\
&= 2(\mathbf{x}_n - 3\mathbf{x}_{n-1}) \qquad (302)
\end{aligned}$$

となりますから、(300) 式、(301) 式、(302) 式から、

$$\mathbf{x}_{n+1} - 3\mathbf{x}_n = 2(\mathbf{x}_n - 3\mathbf{x}_{n-1}) \tag{303}$$

となることが分かります。よって、(303) 式から、

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} - 3x_n \\ x_n - 3x_{n-1} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_n - 3x_{n-1} \\ x_{n-1} - 3x_{n-2} \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、(303) 式は、

$$\begin{cases} x_{n+1} - 3x_n = 2(x_n - 3x_{n-1}) \\ x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2}) \end{cases}$$

という二つの式を表わしていることが分かります。

以上から、

「ケーリー・ハミルトンの定理」と第一の「お告げ」の間の関係

$$A(A-3I) = 2(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_3 - 3x_2 = 2(x_2 - 3x_1) \\ x_2 - 3x_1 = 2(x_1 - 3x_0) \end{cases}$$

$$A(A-3I) = 2(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_2 \text{ に施す}} \begin{cases} x_4 - 3x_3 = 2(x_3 - 3x_2) \\ x_3 - 3x_2 = 2(x_2 - 3x_1) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A(A-3I) = 2(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_{n-1} \text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+1} - 3x_n = 2(x_n - 3x_{n-1}) \\ x_n - 3x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2}) \end{cases}$$

$$\vdots$$

というように、**「ケーリー・ハミルトンの定理」の書き直しは、数列の漸化式の書き直しを「生み出すもと」になっている**ことが分かりました。

- **第二の「お告げ」との関係**

全く同様に考えると、

「ケーリー・ハミルトンの定理」と第二の「お告げ」の間の関係

$$A(A-2I)=3(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_3-2x_2=3(x_2-2x_1) \\ x_2-2x_1=3(x_1-2x_0) \end{cases}$$

$$A(A-2I)=3(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_2 \text{ に施す}} \begin{cases} x_4-2x_3=3(x_3-2x_2) \\ x_3-2x_2=3(x_2-2x_1) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A(A-2I)=3(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_{n-1} \text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+1}-2x_n=3(x_n-2x_{n-1}) \\ x_n-2x_{n-1}=3(x_{n-1}-2x_{n-2}) \end{cases}$$

$$\vdots$$

というように、**「ケーリー・ハミルトンの定理」の書き直しは、数列の漸化式の書き直しを「生み出すもと」になっている**ことが分かりますから、第二の「お告げ」でも、

$$t^2-2t=3(t-2) \longleftrightarrow x_n-2x_{n-1}=3(x_{n-1}-2x_{n-2})$$

というように対応させて考えるよりも、

$$\boldsymbol{A(A-2I)=3(A-2I) \longleftrightarrow x_n-2x_{n-1}=3(x_{n-1}-2x_{n-2})}$$

というように対応させて考える方が、ずっと納得のいく形で理解できることが分かります。

- **「お告げ」のもとで、二つの等比数列の一般項を求める手順との関係**

さて、13 節では、行列 A の n 乗 A^n を具体的に求めるために、

$$A(A-3I)=2(A-3I)$$

という式の両辺に、行列 A を順番、順番に掛け算することで、

$$\begin{aligned} A(A-3I)&=2(A-3I) \\ A^2(A-3I)&=2^2(A-3I) \\ A^3(A-3I)&=2^3(A-3I) \\ &\vdots \\ A^n(A-3I)&=2^n(A-3I) \end{aligned} \tag{304}$$

という式を導きましたが、これらの式の両辺を $\mathbf{x}_1$ に施してみると、

「ケーリー・ハミルトンの定理」の帰結と第一の等比数列の一般項との間の関係

$$A(A-3I)=2(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を }\mathbf{x}_1\text{ に施す}} \begin{cases} x_3-3x_2=2(x_2-3x_1) \\ x_2-3x_1=2(x_1-3x_0) \end{cases}$$

$$A^2(A-3I)=2^2(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を }\mathbf{x}_1\text{ に施す}} \begin{cases} x_4-3x_3=2^2(x_2-3x_1) \\ x_3-3x_2=2^2(x_1-3x_0) \end{cases}$$

$$A^3(A-3I)=2^3(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を }\mathbf{x}_1\text{ に施す}} \begin{cases} x_5-3x_4=2^3(x_2-3x_1) \\ x_4-3x_3=2^3(x_1-3x_0) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A^n(A-3I)=2^n(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を }\mathbf{x}_1\text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+2}-3x_{n+1}=2^n(x_2-3x_1) \\ x_{n+1}-3x_n=2^n(x_1-3x_0) \end{cases}$$

となることが分かります。[30] よって、**(304) 式は、**

$$\boldsymbol{x_n-3x_{n-1}=2(x_{n-1}-3x_{n-2})}$$

という漸化式を解いて、

$$\boldsymbol{x_{n+1}-3x_n=2^n(x_1-3x_0)} \tag{305}$$

という式を導いたということに、ちょうど対応していることが分かります。

全く同様にして、13 節では、

$$A(A-2I)=3(A-2I)$$

という式の両辺に、行列 A を順番、順番に掛け算することで、

$$\begin{aligned} A(A-2I)&=3(A-2I) \\ A^2(A-2I)&=3^2(A-2I) \\ A^3(A-2I)&=3^3(A-2I) \\ &\vdots \\ A^n(A-2I)&=3^n(A-2I) \end{aligned} \tag{306}$$

という式を導きましたが、これらの式の両辺を $\mathbf{x}_1$ に施してみると、

[30] ご興味のある方は、これまでの議論を参考にしながら、ご自分で確かめてみて下さい。

「ケーリー・ハミルトンの定理」の帰結と第二の等比数列の一般項との間の関係

$$A(A-2I) = 3(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_3 - 2x_2 = 3(x_2 - 2x_1) \\ x_2 - 2x_1 = 3(x_1 - 2x_0) \end{cases}$$

$$A^2(A-2I) = 3^2(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_4 - 2x_3 = 3^2(x_2 - 2x_1) \\ x_3 - 2x_2 = 3^2(x_1 - 2x_0) \end{cases}$$

$$A^3(A-2I) = 3^3(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_5 - 2x_4 = 3^3(x_2 - 2x_1) \\ x_4 - 2x_3 = 3^3(x_1 - 2x_0) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A^n(A-2I) = 3^n(A-2I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} = 3^n(x_2 - 2x_1) \\ x_{n+1} - 2x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) \end{cases}$$

となることが分かります。よって、**(306) 式は、**

$$\boldsymbol{x_n - 2x_{n-1} = 3(x_{n-1} - 2x_{n-2})}$$

という漸化式を解いて、

$$\boldsymbol{x_{n+1} - 2x_n = 3^n(x_1 - 2x_0)} \tag{307}$$

という式を導いたということに、ちょうど対応していることが分かります。

- **$\boldsymbol{A^n}$ の計算と漸化式を満たす数列の一般項を求める計算との間の関係**

さて、13 節では、(304) 式、(306) 式から、

$$A^{n+1} - 3A^n = 2^n(A-3I) \tag{308}$$

$$A^{n+1} - 2A^n = 3^n(A-2I) \tag{309}$$

となることが分かりますから、(309) 式から (308) 式を引き算することで、

$$A^n = 3^n(A-2I) - 2^n(A-3I) \tag{310}$$

という式を導きました。そこで、(310) 式の両辺を $\mathbf{x}_1$ に施してみると、

$$A^n\mathbf{x}_1 = 3^n(A-2I)\mathbf{x}_1 - 2^n(A-3I)\mathbf{x}_1 \tag{311}$$

となりますが、

$$A^n\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{n+1}$$
$$3^n(A-2I)\mathbf{x}_1 - 2^n(A-3I)\mathbf{x}_1 = 3^n(\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1) - 2^n(\mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_1)$$

となることが分かりますから、

$$\mathbf{x}_{n+1} = 3^n(\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1) - 2^n(\mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_1) \tag{312}$$

となることが分かります。よって、(311) 式は、

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3^n(x_2 - 2x_1) - 2^n(x_2 - 3x_1) \\ x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) - 2^n(x_1 - 3x_0) \end{cases}$$

という式を表わしていることが分かります。したがって、

A^n の計算と漸化式を満たす数列の一般項を求める計算との間の関係

$$A^n = 3^n(A-2I)-2^n(A-3I) \xrightarrow{\text{両辺を } \mathbf{x}_1 \text{ に施す}} \begin{cases} x_{n+1} = 3^n(x_2-2x_1)-2^n(x_2-3x_1) \\ x_n = 3^n(x_1-2x_0)-2^n(x_1-3x_0) \end{cases}$$

というように、**(310) 式は、(307) 式から (305) 式を引き算して、**

$$\boldsymbol{x_n = 3^n(x_1 - 2x_0) - 2^n(x_1 - 3x_0)}$$

という式を導いたということに、ちょうど対応していることが分かります。

以上より、**13 節で行なった A^n を具体的に求めるための計算は、この節でご説明した三項間漸化式を解くための「お告げ」の内容を「行列の世界」から見直したものである**ことが分かりました。

15　おわりに

さて、皆さんに「行列の世界」をご紹介しようとして、随分(ずいぶん)な「長旅」になってしまいましたが、いかがだったでしょうか。途中で、少し抽象的な議論を行なったり、最後は、かなり踏み込んだ内容までご説明しましたので、一度読んだだけでは「チンプンカンプン」と思われる部分もたくさんあったのではないかと思います。

私としては、皆さんに「行列の世界」をご紹介するとともに、**皆さんが、今現在、中学校や高校で一生懸命学ばれている数学の内容が、実は、先に進んでも、色々と姿かたちを変えながらも、様々に活躍(かつやく)することになる**という一端(いったん)をお見せして、皆さんが数学を学ばれる多少なりともの動機付(どうきづ)けにもなると良いなと考えました。

ですから、私の「おみやげ」に関しても、すぐに分からないところは余り気にせずに、「ああ、なるほど、こういうことか。」と、皆さんなりに納得できたことがあれば、それを大切にしていただけると良いなと思っています。その上で、ご興味を持たれた方は、ご自分で、さらに「行列の世界」を勉強してみたり、あるいは、「微積分(びせきぶん)の世界」を覗(のぞ)いてみたりと、ご自分のペースで色々と学ばれてみるのも良いのではないかと思います。

人生は、誰にとっても「簡単なもの」ではありませんから、ときとして、大小、さまざまな困難が降りかかることは避けがたいものがあるように思います。そんなときには、何かしら「問題解決」を図る必要が生じますが、人間ひとりの能力には限りがありますから、

自分ひとりであれこれと考えても、なかなか良い考えが浮かばないということも、当然、起こりうるように思います。
　一方で、人間の「悩み」というものは、時代や場所を超えて、ある程度、共通しているようにも思われますので、どこかで誰かが同じような「悩み」を抱えながら、「問題」について、あれこれと考えて、その人なりの「解決策」を生み出し、それが「先人（せんじん）の知恵」という形で、時代を超えて受け継がれているようにも思います。そうした「先人の知恵」を学ぶことで、ものごとがより良く理解できるようになるように思いますし、それにより、より良い「問題解決」を図るためのヒントが得られるかもしれません。
　その意味で、私としては、皆さんも、数学に限らず、色々なことに関して、皆さん自身のペースで、「先人の知恵」を学びながら、少しずつ、少しずつ、皆さん自身の人生をより豊かなものにしていかれると良いのではないかなと思っています。

16　練習問題の解答

練習問題 1.

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

練習問題 2.

$$(1)\ A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad (2)\ 2A+3B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}, \quad (3)\ 3A-2B = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 21 & -1 \end{pmatrix}$$

これらの行列は、次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
(1)\ A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+1 & 4+(-2) \\ 5+(-3) & 3+5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ 2A+3B &= 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4+3 & 8+(-6) \\ 10+(-9) & 6+15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3)\ 3A-2B &= 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6-2 & 12-(-4) \\ 15-(-6) & 9-10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 21 & -1 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.

(1) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$, (2) $BA = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$,

(3) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, (4) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$

これらの行列は、次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
(1)\ AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-2) & (-1)\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6-2 & 4+4 \\ -3-6 & -2+12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \\
(2)\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ (-2)\cdot 2 + 4\cdot(-1) & (-2)\cdot 1 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6-2 & 3+6 \\ -4-4 & -2+12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \\
(3)\ A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 \\ -1+(-2) & 3+4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A - B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-3 & 1-2 \\ -1-(-2) & 3-4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)(A-B) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5+3 & -5-3 \\ 3+7 & 3-7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-1 & 2+3 \\ -2-3 & -1+9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot(-2) & 3\cdot 2+2\cdot 4 \\ (-2)\cdot 3+4\cdot(-2) & (-2)\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9-4 & 6+8 \\ -6-8 & -4+16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -14 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2-B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -14 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-5 & 5-14 \\ -5-(-14) & 8-12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

練習問題 4.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}$, (2) B^2は掛け算できない。

(3) $AB = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 5 \\ -11 & 13 & -13 \end{pmatrix}$, (4) BA は掛け算できない。

A^2 と AB は、次のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
(1)\ A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 4 \\ (-3)\cdot 1+4\cdot(-3) & (-3)\cdot(-2)+4\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+6 & -2-8 \\ -3-12 & 6+16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 4 & (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 4 & 1 - 8 & 3 + 2 \\ -3 - 8 & -3 + 16 & -9 - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -7 & 5 \\ -11 & 13 & -13 \end{pmatrix}$$

練習問題 5.

(1) $IA = A$,　　(2) $AI = A$

これらの式は、次のように確かめることができます。

$$(1)\ I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot d & 1 \cdot b + 0 \cdot e & 1 \cdot c + 0 \cdot f \\ 0 \cdot a + 1 \cdot d & 0 \cdot b + 1 \cdot e & 0 \cdot c + 1 \cdot f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= A$$

$$(2)\ A \cdot I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 & a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 0 & a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 1 \\ d\cdot 1 + e\cdot 0 + f\cdot 0 & d\cdot 0 + e\cdot 1 + f\cdot 0 & d\cdot 0 + e\cdot 0 + f\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}
$$

練習問題 6.

(1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,　　(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、次のように計算することができます。

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-3)}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{1\text{ 行目}\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-3)}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times 5} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & -14 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[2\text{ 行目}\times\frac{1}{2}]{1\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right)$

練習問題 7.

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$,　　(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

これらの結果は、次のように求めることができます。

$$
\begin{aligned}
(1)\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 \\ (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 25 - 21 \\ -15 + 14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 4 \\ 5 \cdot 5 + (-7) \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10 + 12 \\ 25 - 28 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

練習問題 8.

$$
(1)\ A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、次のように計算することができます。

$$
(1)\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-5)}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}\times 7} \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 21 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 3}
$$

$$
\xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & -7 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}\times\frac{1}{2}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 3I & C \end{array}\right)
$$

$$
(2)\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[2\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}\times 2}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{3\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2I & C \end{array}\right)
$$

練習問題 9.

$$
(1)\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

これらの結果は、次のように求めることができます。

$$
\begin{aligned}
(1)\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} (-4) \cdot 9 + 3 \cdot 5 \\ 5 \cdot 9 + (-2) \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -36 + 15 \\ 45 - 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -21 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 7 \\ (-4) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 - 1 - 7 \\ -8 + 14 \\ 2 + 1 - 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

練習問題 10.

$$(1)\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

行列 A と $\mathbf{b}$ を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、次のように計算することができます。

(1)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 10 & 8 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-5)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -35 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{2\text{ 行目}\times -\frac{1}{7}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{1\text{ 行目}\times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{c} \end{array}\right)$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-1)}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-1)}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{c} \end{array}\right)$$

練習問題 11.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これらの「公比」は、次のように求めることができます。

(1) 与えられた漸化式に、わざわざ、

$$x_{n-1} = x_{n-1}$$

という「当たり前」の式を付け加えて、

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \end{cases}$$

という二本の式として漸化式を読んだ上で、行列の記法を用いて、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

というように表わしてみることで、漸化式の「裏」に隠れていた「公比」が

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが分かります。

(2) 与えられた漸化式に、わざわざ、

$$\begin{cases} x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_{n-2} = x_{n-2} \end{cases}$$

という「当たり前」の式を二本付け加えて、

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_{n-2} = x_{n-2} \end{cases}$$

という三本の式として漸化式を読んだ上で、行列の記法を用いて、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix}$$

というように表わしてみることで、漸化式の「裏」に隠れていた「公比」が

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが分かります。

練習問題 12. 次の行列 A に対して、行列 A の特性多項式を求めよ。

(1) $\varphi_A(x) = x^2 - 2x - 3$, (2) $\varphi_A(x) = x^2 - 3x + 2$

これらの特性多項式は、次のように求めることができます。

$$\begin{aligned} (1)\ \varphi_A(x) &= x^2 - (2+0)x + (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ (2)\ \varphi_A(x) &= x^2 - (-1+4)x + \{(-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 3\} \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

練習問題 13.

(1) 練習問題 12 の結果から、行列 A の特性多項式は、

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(x) &= x^2 - 2x - 3 \\
&= (x-3)(x+1)
\end{aligned}
$$

というように因数分解できることが分かります。よって、

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(A) &= A^2 - 2A - 3I \\
&= (A-3I)(A+I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 \\ 1-0 & 0-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+1 & 3+0 \\ 1+0 & 0+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= O
\end{aligned}
$$

となることが分かります。

(2) 練習問題 12 の結果から、行列 A の特性多項式は、

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(x) &= x^2 - 3x + 2 \\
&= (x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

というように因数分解できることが分かります。よって、

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(A) &= A^2 - 3A + 2I \\
&= (A-I)(A-2I) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -1-1 & -2-0 \\ 3-0 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2 & -2-0 \\ 3-0 & 4-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-3) + (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot 2 \\ 3\cdot(-3) + 3\cdot 3 & 3\cdot(-2) + 3\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= O
\end{aligned}
$$

となることが分かります。

練習問題 14. 次の行列 A に対して、A の n 乗 A^n を求めよ。

(1) $A^n = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} & 3^{n+1} + 3\cdot(-1)^{n+1} \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + 3\cdot(-1)^n \end{pmatrix}$

(2) $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3\cdot 2^n - 3 & 3\cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$

これらの行列は、次のように求めることができます。

(1) 練習問題 12 の結果から、「ケーリー・ハミルトンの定理」は、

$$A^2 - 2A - 3I = O \tag{313}$$

となることが分かります。そこで、(313) 式の左辺を「因数分解」して、

$$(A - 3I)(A + I) = O \tag{314}$$

と表わして、「分配法則」を用いて、(314) 式の左辺の最初のカッコ ( ) を外すと、

$$A(A + I) - 3(A + I) = O$$

となることが分かりますから、

$$A(A + I) = 3(A + I) \tag{315}$$

となることが分かります。ここで、(315) 式の両辺に、順番、順番に、A を掛け算していくと、

$$
\begin{aligned}
A(A+I) &= 3(A+I) \\
A^2(A+I) &= 3^2(A+I) \\
A^3(A+I) &= 3^3(A+I) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となることが分りますから、一般に、

$$A^n(A+I) = 3^n(A+I), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{316}$$

となることが分かります。

全く同様に、(313) 式の左辺を「因数分解」して、

$$(A+I)(A-3I) = O \tag{317}$$

と表わして、「分配法則」を用いて、(317) 式の左辺の最初のカッコ ( ) を外すと、

$$A(A-3I) + (A-3I) = O$$

となることが分かりますから、

$$A(A-3I) = -(A-3I) \tag{318}$$

となることが分かります。ここで、(318) 式の両辺に、順番、順番に、A を掛け算していくと、

$$
\begin{aligned}
A(A-3I) &= -(A-3I) \\
A^2(A-3I) &= (-1)^2(A-3I) \\
A^3(A-3I) &= (-1)^3(A-3I) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となることが分りますから、一般に、

$$A^n(A-3I) = (-1)^n(A-3I), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{319}$$

となることが分かります。

よって、(316) 式、(319) 式から、

$$A^{n+1} + A^n = 3^n(A+I) \tag{320}$$
$$A^{n+1} - 3A^n = (-1)^n(A-3I) \tag{321}$$

となることが分かりますから、(320) 式から (321) 式を引き算することで、

$$4A^n = 3^n(A+I) - (-1)^n(A-3I) \tag{322}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned}
4A^n &= 3^n(A+I) - (-1)^n(A-3I) \\
&= 3^n \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-1)^n \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n \cdot 3 & 3^n \cdot 3 \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot (-1) & (-1)^n \cdot 3 \\ (-1)^n & (-1)^n \cdot (-3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 3^{n+1} \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 3 \cdot (-1)^n \\ (-1)^n & -3 \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} & 3^{n+1} - 3 \cdot (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n - (-3) \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} & 3^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{n+1} \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + 3 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} & 3^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{n+1} \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + 3 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

(2) 練習問題 12 の結果から、「ケーリー・ハミルトンの定理」は、

$$A^2 - 3A + 2I = O \tag{323}$$

となることが分かります。そこで、(323) 式の左辺を「因数分解」して、

$$(A - I)(A - 2I) = O \tag{324}$$

と表わして、「分配法則」を用いて、(324) 式の左辺の最初のカッコ (　) を外すと、

$$A(A - 2I) - (A - 2I) = O$$

となることが分かりますから、

$$A(A - 2I) = (A - 2I) \tag{325}$$

となることが分かります。ここで、(325) 式の両辺に、順番、順番に、A を掛け算していくと、

$$\begin{aligned}
A(A - 2I) &= (A - 2I) \\
A^2(A - 2I) &= (A - 2I) \\
A^3(A - 2I) &= (A - 2I) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

となることが分りますから、一般に、

$$A^n(A-2I)=(A-2I), \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{326}$$

となることが分かります。

全く同様に、(323) 式の左辺を「因数分解」して、

$$(A-2I)(A-I)=O \tag{327}$$

と表わして、「分配法則」を用いて、(327) 式の左辺の最初のカッコ (　) を外すと、

$$A(A-I)-2(A-I)=O$$

となることが分かりますから、

$$A(A-I)=2(A-I) \tag{328}$$

となることが分かります。ここで、(328) 式の両辺に、順番、順番に、A を掛け算していくと、

$$\begin{aligned} A(A-I)&=2(A-I)\\ A^2(A-I)&=2^2(A-I)\\ A^3(A-I)&=2^3(A-I)\\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが分りますから、一般に、

$$A^n(A-I)=2^n(A-I), \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{329}$$

となることが分かります。

よって、(326) 式、(329) 式から、

$$A^{n+1}-2A^n=(A-2I) \tag{330}$$

$$A^{n+1}-A^n=2^n(A-I) \tag{331}$$

となることが分かりますから、(331) 式から (330) 式を引き算することで、

$$A^n=2^n(A-I)-(A-2I) \tag{332}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned} A^n&=2^n(A-I)-(A-2I)\\ &=2^n\begin{pmatrix} -2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n \cdot (-2) & 2^n \cdot (-2) \\ 2^n \cdot 3 & 2^n \cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} & -2^{n+1} \\ 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} - (-3) & -2^{n+1} - (-2) \\ 3 \cdot 2^n - 3 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \cdot 2^n - 3 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

練習問題 15.

$$x_n = \frac{\{3^n - (-1)^n\} x_1 + \{3^n + 3 \cdot (-1)^n\} x_0}{4}$$

このことは、次のようにして分かります。

いま、演習問題 11 の結果より、

$$x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

という三項間漸化式は、行列の記法を用いることで、

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として、

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$$

というように表わせますから、

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{333}$$

となることが分かります。また、練習問題 14 の結果から、

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} & 3^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{n+1} \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + 3 \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \tag{334}$$

となることが分かります。よって、(333) 式、(334) 式から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= \mathbf{x}_n \\ &= A^{n-1}\mathbf{x}_1 \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n - (-1)^n & 3^n + 3 \cdot (-1)^n \\ 3^{n-1} - (-1)^{n-1} & 3^{n-1} + 3 \cdot (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \{3^n - (-1)^n\} x_1 + \{3^n + 3 \cdot (-1)^n\} x_0 \\ \left\{3^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\} x_1 + \left\{3^{n-1} + 3 \cdot (-1)^{n-1}\right\} x_0 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、

$$x_n = \frac{\{3^n - (-1)^n\} x_1 + \{3^n + 3 \cdot (-1)^n\} x_0}{4}$$

となることが分かります。