数学 II 演習問題

問 1.

(1) 整数を 7 で割った余りのなす集合 $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ を考える．また, $\mathbb{F}_7$ の二つの元 $a, b \in \mathbb{F}_7$ に対して, a と b の足し算, 掛け算の結果が再び $\mathbb{F}_7$ の元となるように, 次の手順によって定める.

  (a) a, b を普通の整数と思って, 足し算, 掛け算する.

  (b) その結果を 7 で割った余りを取る.

例えば, $4 \cdot 5 = 20 = 2 \cdot 7 + 6$ なので, $4 \cdot 5 = 6 \in \mathbb{F}_7$ と定める．このとき, $\mathbb{F}_7$ では, 自由に割り算ができることを示せ．すなわち, 0 以外の勝手な元 $a \in \mathbb{F}_7$ に対して, $ab = 1 \in \mathbb{F}_7$ となるような元 $b \in \mathbb{F}_7$ が存在することを示せ.

(2) 7 で割る代わりに, 整数を 6 で割った余りのなす集合 $\mathbb{F}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ を考えて, 足し算, 掛け算を上と同様に定める．このとき, $\mathbb{F}_6$ では割り算は自由に行なえないことを示せ．すなわち, 0 でない元 $0 \neq a \in \mathbb{F}_6$ であって, どんな元 $b \in \mathbb{F}_6$ に対しても, $ab = 1 \in \mathbb{F}_6$ とはならないものが存在することを示せ.

問 2*.**

(1) x を変数とする実数係数の多項式全体の集合を

$$\mathbb{R}[x] = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

と表わす．また, $\mathbb{R}[x]$ の元を $x^2 - 1$ で割った余り全体の集合を

$$\mathbb{R}[x]/(x^2-1) = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

と表わして, 足し算と掛け算を問 1 と同様にして定める．このとき, $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ では割り算は自由に行なえないことを示せ．すなわち, 0 でない元 $0 \neq ax + b \in \mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ であって, どんな元 $cx+d \in R[x]/(x^2-1)$ に対しても, $(ax+b)(cx+d) = 1 \in \mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ とはならないものが存在することを示せ.

(2) より一般に, $p, q \in \mathbb{R}$ として, $\mathbb{R}[x]$ の元を, $x^2 + px + q$ で割った余り全体の集合 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$ を考える．このとき, $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$ において, 自由に割り算ができるために p, q が満たすべき必要十分条件を求めよ.

問 3. 行列の足し算, 掛け算に関して, $A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$ という分配法則が成り立つことを示せ.

問 4. m 行 m 列の正方行列 A が, 勝手な m 行 m 列の正方行列 B と交換可能であるとすると, すなわち, 勝手な m 行 m 列の正方行列 B に対して, $AB=BA$ となるとすると, A はスカラー行列, すなわち, 単位行列 I のスカラー倍でなければならないことを示せ.

問 5. m 行 m 列の正方行列 A が, 勝手な m 行 n 列の行列 B に対して, $AB=B$ となるならば, A は単位行列 I でなければならないことを示せ.

問 6. 4 行 4 列の単位行列を E と表わし, 4 行 4 列の行列 I,J,K を次のように定める.

$$I=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の等式が成立することを示せ. ただし, 勝手な行列 A に対して, A の転置行列 (すなわち, A の行と列をひっくり返すことによって得られる行列のことです.) を ${}^tA$ と表わした.

$$\begin{aligned}&I^2=J^2=K^2=-E,\\&IJ=-JI=K,\ JK=-KJ=I,\ KI=-IK=J,\\&{}^tI=-I,\ {}^tJ=-J,\ {}^tK=-K.\end{aligned}$$

(2) $A=wE+xI+yJ+zK$, $(x,y,z,w\in\mathbb{R})$ に対して,

$$\nu(A)=w^2+x^2+y^2+z^2\in\mathbb{R}$$

と定める. このとき, (1) の等式のみを用いて,

$$A\,{}^tA={}^tAA=\nu(A)E$$

となることを示せ.

(3) $A=wE+xI+yJ+zK\neq O$ のとき, A の逆行列が存在することを示せ. ただし、零行列を O と表わした.

• 以下, 特に断わらない限り, 零行列を O という記号を用いて表わし, 単位行列を I という記号を用いて表わす.

• m 行 m 列の正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して, $\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^m a_{ii}$ と定めて, $\operatorname{tr}A$ を行列 A の**トレース** (trace) と呼ぶ.

問 7. m 行 n 列の行列 A と n 行 m 列の行列 B に対して, $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ となることを示せ.

問 8. $m \neq n$ のとき, m 行 n 列の行列 A と n 行 m 列の行列 B であって, $AB = I_m$, $BA = I_n$ となるものは存在しないことを示せ. ただし, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, m 行 m 列の単位行列を I_m と表わした.

問 9. m 行 m 列の正方行列 A, B であって, $AB - BA = I_m$ となるものは存在しないことを示せ.

- $N^n = O$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在するような正方行列 N を**ベキ零行列** (nilpotent matrix) と呼ぶ.

問 10. m 行 m 列の正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列成分が, $i \geq j$ のとき, $a_{ij} = 0$ を満たすとする. このとき, A はベキ零行列となることを示せ.

問 11. m 行 m 列のベキ零行列 N に対して, $A = I - N$ は正則行列 (すなわち, 逆行列を持つような行列のことです.) となることを示せ. また, $A = I - N$ の逆行列 $A^{-1} = (I - N)^{-1}$ を行列 N を用いて表わせ.

問 12. ベキ零行列 N に対して,

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = I + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} + \cdots +$$

と定める. (N はベキ零行列なので, 右辺は有限和となる.) このとき, 以下が成立することを示せ.

(1) $e^O = I$ となる.

(2) N, N' が, 互いに交換可能なベキ零行列とするとき, $(N + N')$ もベキ零行列であり,

$$e^{N+N'} = e^N e^{N'}$$

となる. ただし, N, N' が互いに交換可能とは, $NN' = N'N$ となることである.

(3) 勝手なベキ零行列 N に対して, e^N は正則行列となり, その逆行列は $(e^N)^{-1} = e^{-N}$ で与えられる.

(4) ベキ零行列 N に対して, 行列に値を持つ関数 $A(t) = e^{tN}$ を考えるとき,

$$\begin{aligned}(e^{tN})' &= Ne^{tN} \\ &= e^{tN}N\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 行列に値を持つ関数 $A(t)$ に対して, その導関数 $A'(t)$ を,

$$A'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

と定める. (これは, 行列 $A(t)$ の成分を $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)$ と表わすと,

$$\begin{aligned}\frac{A(t+h) - A(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\Big(a_{ij}(t+h)\Big) - \Big(a_{ij}(t)\Big)\right\} \\ &= \left(\frac{a_{ij}(t+h) - a_{ij}(t)}{h}\right)\end{aligned}$$

となるので, $A'(t) = \big(a'_{ij}(t)\big)$ と定めることと同じことです.)

問 13. 次の行列の rank を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

問 14. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

問 15. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(3) $D_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (4) $F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(5) $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (6) $B_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(7) $D_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (8) $E_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

問 16. 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{pmatrix}$,　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_0!} & \frac{1}{(a_0-1)!} & \cdots & \frac{1}{(a_0-n)!} \\ \frac{1}{a_1!} & \frac{1}{(a_1-1)!} & \cdots & \frac{1}{(a_1-n)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n!} & \frac{1}{(a_n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(a_n-n)!} \end{pmatrix}$　(ただし, $n \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ とする.).

問 17. m 行 m 列の行列 A と n 行 n 列の行列 B に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\det \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \cdot \det A \cdot \det B$$

問 18. n 行 n 列の行列 A, B に対して, 次の等式を示せ.

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A-B) \cdot \det(A+B)$$

問 19. A, B, C, D を n 行 n 列の行列とする. このとき, もし, A が正則行列であれば,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

となり, D が正則行列であれば,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$$

となることを示せ.

問 20. A を行列成分がすべて整数であるような正方行列とする. このとき, 行列 A が正則行列であり, かつ, その逆行列 A^{-1} の行列成分もすべて整数になるための必要十分条件は, $\det A = \pm 1$ となることであることを示せ.

問 21. 上三角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

が, 逆行列を持つための必要十分条件を求めよ. また, A が逆行列を持つときには, A の逆行列 A^{-1} も上三角行列であることを示せ.

問 22.* n 行 n 列の行列 A に対して, A の余因子行列を $\widetilde{A}$ と表わすことにする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A が正則行列のとき, $\widetilde{A^{-1}} = (\widetilde{A})^{-1}$ となることを示せ.

(2) n 行 n 列の行列 A, B に対して, $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ となることを示せ.

(3) $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-2} \cdot A$ となることを示せ.

問 23. 次の連立一次方程式の解をすべて求めよ.

(1) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y + 4z - u + 2v = 1 \\ 3y + 3z - 4u + 4v = 0 \\ 2x - y + 5z + 6u + 2v = 8 \\ 2y + 2z + 2u + 5v = 7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x + y - 2z + u + 3v = 1 \\ 2x - y + 2z + 2u + 6v = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3u - 9v = 3 \end{cases}$

問 24. $V, W \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) V と W に共通に含まれる $\mathbb{R}^n$ のベクトル全体の集合を,

$$V \cap W = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \ \mathbf{u} \in V, \text{ かつ}, \mathbf{u} \in W \ \}$$

と表わすときに, $V \cap W$ も線型部分空間になることを示せ.

(2) V に属するベクトル $\mathbf{v} \in V$ と W に属するベクトル $\mathbf{w} \in W$ を用いて, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ という形に表わせるような $\mathbb{R}^n$ のベクトル全体の集合を,

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n | \ \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \ \}$$

と表わすときに, $V + W$ も線型部分空間になることを示せ.

(3) V, または, W に属するような $\mathbb{R}^n$ のベクトル全体の集合を,

$$V \cup W = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \ \mathbf{u} \in V, \text{ または}, \mathbf{u} \in W \ \}$$

と表わすときに, $V \cup W$ は線型部分空間になるか？

問 25. n 行 n 列の実数行列全体のなす線型空間 $M_n(\mathbb{R})$ の中で, 次のような部分集合 V_1, V_2, V_3, V_4 を考える. このとき, それぞれの V_1, V_2, V_3, V_4 に対して, 線型部分空間であるときには, そのことを証明し, そうでないときには, そうでない理由を示せ.

(1) $V_1 = \{X \in M_n(\mathbb{R}) |\ \mathrm{tr}\, X = 0\}$

(2) $V_2 = \{X \in M_n(\mathbb{R}) |\ \det X = 0\}$

(3) $V_3 = \{X \in M_n(\mathbb{R}) |\ {}^tX = X\}$

(4) $V_4 = \{X \in M_n(\mathbb{R}) |\ {}^tXX = I\}$

問 26. 次のような $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組を考える. このとき, それぞれの場合について, それらのベクトルの組が線型独立となるか, あるいは, 線型従属となるかを判定せよ. ただし, (3) において, $a, b, c \in \mathbb{R}$ は, 互いに異なる実数とする.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

問 27. 以下の主張は正しいか. 正しい場合には証明を与え, 間違っている場合には反例を与えよ.

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ を, 線型独立なベクトルとする. また, $1 \leq k \leq n$ として, 1 から n までの自然数の中から k 個の自然数 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ を選ぶ. このとき, k 個のベクトル $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \cdots, \mathbf{u}_{i_k}$ も線型独立となる.

(2) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ を, 線型従属なベクトルとする. また, $1 \leq k \leq n$ として, 1 から n までの自然数の中から k 個の自然数 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ を選ぶ. このとき, k 個のベクトル $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \cdots, \mathbf{u}_{i_k}$ も線型従属となる.

(3) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ を, 線型独立なベクトルとする. このとき, $\mathbb{R}^k$ の勝手なベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ に対して, $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{v}_i$ を縦に並べたベクトル $\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k}$ を考えると, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n$ も $\mathbb{R}^{n+k}$ の中で線型独立となる.

(4) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ を, 線型従属なベクトルとする. このとき, $\mathbb{R}^k$ の勝手なベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ に対して, $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{v}_i$ を縦に並べたベクトル $\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k}$ を考えると, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n$ も $\mathbb{R}^{n+k}$ の中で線型従属となる.

問 28. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ を, 線型独立なベクトルとする. このとき, 次のベクトルの組は線型独立であるかどうかを答えよ.

(1) $\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,\ 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3.$

(2) $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_1$

問 29. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ を, 相異なる実数とする. このとき, x を変数とする n 個の関数 $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \cdots, e^{\alpha_n x}$ は, $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体のなす線型空間の中で線型独立となることを示せ.

問 30. $n \in \mathbb{N}$ として, n 次式以下の実数係数の多項式全体のなす線型空間を,

$$V_n = \{\, f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \,\}$$

とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ は, V_n の基底となることを示せ.

(2) 勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し, $\{1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n\}$ も V_n の基底となることを示せ. また, (1) の基底を (2) の基底にうつす基底変換の行列を求めよ.

問 31. 問 30 のように, V_3 を 3 次式以下の実数係数の多項式全体のなす線型空間とする. このとき, 次のような V_3 の線型部分空間に対して, その次元と基底を一組求めよ.

(1) $W_1 = \left\{ f(x) \in V_3 \;\middle|\; \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \{\, f(x) \in V_3 \mid f(1) = f(-1) = 0 \,\}$

問 32. V, W を ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f : V \to W$, $g : V \to W$ が線型写像であるときに, $f + g : V \to W$ も線型写像となることを示せ.

(2) $a \in \mathbb{R}$ として, $f : V \to W$ が線型写像であるときに, $af : V \to W$ も線型写像となることを示せ.

(3) さらに, U も ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間であるとして, $f : V \to W$, $g : U \to V$ が, ともに, 線型写像であるときに, $f \circ g : U \to W$ も線型写像となることを示せ.

問 33. 2 次式以下の実数係数の多項式全体のなす線型空間を,

$$V_2 = \{\, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \,\}$$

として, $f(x) \in V_2$ に対して,

$$D(f)(x) = (x-1)\frac{df}{dx}(x)$$

という式によって定まる写像 $D : V_2 \to V_2$ を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) D は線型写像であることを示せ.

(2) V_2 の $\{1, x, x^2\}$ という基底に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$ を求めよ.

(3) V_2 の $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ という基底に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ を求めよ.

• ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間 V に対して, V から $\mathbb{R}$ への線型写像全体の集合を,

$$V^* = \{\, f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ は線型写像 } \}$$

という記号で表わす. すなわち, V^* とは, V 上の線型関数全体の集合である. このとき, 勝手な二つの元 $f, g \in V^*$ と, 勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{cases} (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \\ (af)(x) = a \cdot f(\mathbf{u}) \end{cases}, \quad \mathbf{u} \in V$$

という式によって, 足し算とスカラー倍を定めることによって, V^* も ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間になる. こうして定まる線型空間 V^* を線型空間 V の**双対空間**という.

問 34. V を n 次元の ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間とし, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, V の元 $\mathbf{u} \in V$ を,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n, \quad a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

と表わす. このとき,

$$f_i(\mathbf{u}) = f_i(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) = a_i$$

という式によって定まる V 上の関数 $f_i : V \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を考える. すなわち, f_i は, $\mathbf{u} \in V$ に対して, $\mathbf{u}$ の $\mathbf{e}_i$ の係数を対応させる関数である. こうして定まる関数 f_i, $(i = 1, 2, \cdots .n)$ に関して, 次の問に答えよ.

(1) $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して, $f_i \in V^*$ となることを示せ.

(2) $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ は V^* の基底になることを示せ.

• 問 34 のようにして定まる V^* の基底 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ を, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ の**双対基底**という.

問 35. V, W を ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間とし, $\varphi : V \to W$ を線型写像とする. このとき, 勝手な線型写像 $f : W \to \mathbb{R}$ に対して, $f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ も線型写像となることに注意して, $f \in W^*$ に対して, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in V^*$ を対応させる写像 $\varphi^* : W^* \to V^*$ を考える.

(1) $\varphi^* : W^* \to V^*$ は線型写像となることを示せ.

(2) $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を勝手にひとつずつ取ってくる. また, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する V^* の双対基底を $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ とし, W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する W^* の双対基底を $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*, \mathbf{f}_3^*\}$ とする. このとき, 線型写像 $\varphi : V \to W$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する表現行列 A と, 線型写像 $\varphi^* : W^* \to V^*$ の基底 $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*, \mathbf{f}_3^*\}$, $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ に関する表現行列 B との間の関係を求めよ.

- 線型空間 V, W の間の線型写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\ \}$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{u}) \in W \mid \mathbf{u} \in V\ \}$$

という式によって定まる部分集合 $\operatorname{Ker} f \subset V$, $\operatorname{Im} f \subset W$ を, それぞれ, 線型写像 f の**核**(Kernel) と**像**(Image) という. これらは, それぞれ, V, W の線型部分空間になる.

問 36. n 行 n 列の実数行列全体のなす線型空間 $M_n(\mathbb{R})$ の中から, 勝手にひとつ元 $A \in M_n(\mathbb{R})$ を取ってきて, $\operatorname{ad}_A(X) = AX - XA$, $(X \in M_n(\mathbb{R}))$ という式によって定まる写像 $\operatorname{ad}_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\operatorname{ad}_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ は線型写像であることを示せ.

(2) $i, j = 1, 2, \cdots, n$ に対して, i 行 j 列成分のみが 1 で, それ以外の行列成分が 0 の行列を E_{ij} とするとき, $\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_{E_ij}$, $\operatorname{Im} \operatorname{ad}_{E_{ij}}$ の次元を求めよ.

問 37. 2 行 2 列の複素行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して, $\operatorname{ad}_A(X) = AX - XA$ という式によって定まる 2 行 2 列の複素行列全体の集合 $M_2(\mathbb{C})$ 上の線型写像 $\operatorname{ad}_A : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ を考える. (写像 ad_A が線型写像であることは, 本質的に問 36 で確かめてある.) このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $M_2(\mathbb{C})$ の $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ という基底に関する線型写像 ad_A の表現行列 $\widehat{\operatorname{ad}_A}$ を求めよ. ただし,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(2) $Z_A = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\ \}$ とするとき, Z_A は $M_2(\mathbb{C})$ の線型部分空間であることを示し, その次元を求めよ.

問 38. A を l 行 m 列の実数行列, B を m 行 n 列の実数行列とするとき,

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - m \leq \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

となることを示せ.

問 39. A を $\operatorname{rank} A = r$ となる m 行 n 列の複素行列とする. このとき, $\operatorname{rank} B = r$ となる m 行 r 列の行列 B と $\operatorname{rank} C = r$ となる r 行 n 列の行列 C が存在して, $A = BC$ と表わせることを示せ. また, 逆に, A が, このように表わせるとするならば, $\operatorname{rank} A = r$ となることを示せ.

問 40. A を n 行 n 列の実数行列とするとき, 行列 A は, 次の (1), (2) の条件を満たすような n 行 n 列の行列 B, C を用いて, $A = BC$ という形に表わせることを示せ.

(1) B は正則行列である.
(2) $C^2 = C$

問 41. n 行 n 列の実数行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が, $A^2 = A$ を満たせば,

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{tr} A$$

となることを示せ.

問 42. n 行 n 列の行列 $A = (a_{ij})$ のすべての行列成分 a_{ij} が 0 以上の実数で, $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ となるとする. (このような行列 A を**確率行列**という.) このとき, 次を証明せよ.

(1) 1 は行列 A の固有値である.

(2) λ を行列 A の固有値とすると, $|\lambda| \leq 1$ となる.

問 43. 次の行列の n 乗を計算せよ.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問 44. n 行 n 列の実数行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 次の条件は、すべて同値であることを示せ.

(1) A は直交行列である. すなわち, ${}^tAA = I$ となる.

(2) 行列 A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ とするとき,

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

(3) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ となる.

(4) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $||A\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}||$ となる.

(5) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とするときに, $\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \cdots, A\mathbf{e}_n\}$ も $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる.

問 45. 2 行 2 列の直交行列 A は, 回転行列 R_θ であるか, 原点を通る直線に関する折り返しを与える行列 T_θ であることを示せ. ただし,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

である.

問 46. ユニタリー行列 U の行列式 $\det U$ は, 絶対値が 1 の複素数となることを示せ. 逆に, 絶対値が 1 の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\det U = z$ となるようなユニタリー行列 U の例を与えよ.

問 47. 次のようなベクトルたちから, Gram-Schmidt の直交化の方法により, $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 48. 2 次式以下の実数係数の多項式全体のなす線型空間 V_2 上に,

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad f(x), g(x) \in V_2$$

という式によって定まる内積を考える. このとき, $\{1, x, x^2\}$ という V_2 の基底から, Gram-Schmidt の直交化の方法により, V_2 の正規直交基底を作れ.

- 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ線型空間 U と, U の中の線型部分空間 $V \subset U$ に対して,

$$V^\perp = \{\mathbf{u} \in U \mid \text{ 勝手な元 } \mathbf{v} \in V \text{ に対して, } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \text{ となる } \}$$

という式によって定まる U の線型部分空間 $V^\perp$ を, 線型部分空間 V の**直交補空間**という.

問 49. $V \subset \mathbb{R}^n$ を, $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^n$ は, $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ というように直和分解することを示せ. すなわち, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ は, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 \in V$, $\mathbf{u}_2 \in V^\perp$ という形に一意的に表わせることを示せ.

(2) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, (1) の直和分解によって定まるベクトル $\mathbf{u}$ の V 方向の成分 $\mathbf{u}_1 \in V$ は, V に属するベクトルのうち, $\mathbf{u}$ に最も近いベクトルであることを示せ. すなわち, 勝手なベクトル $\mathbf{v} \in V$ に対して, $||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| \geq ||\mathbf{u} - \mathbf{u}_1||$ となることを示せ.

問 50. $V, V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ を, $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とする. このとき, 次の式を証明せよ.

(1) $(V^\perp)^\perp = V$

(2) $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$

(3) $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$

問 51. n 行 n 列の実数行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ 上に,

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}({}^tXY), \qquad X, Y \in M_n(\mathbb{R})$$

という式によって定まる内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考える. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 内積の値 $\langle X, Y\rangle$ を, X, Y の行列成分 $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ を用いて表わせ.

(2) $V \subset M_n(\mathbb{R})$ を, 対称行列全体のなす線型部分空間とする. このとき, V の正規直交基底を一組求めよ.

(3) 対称行列全体のなす線型部分空間 V の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ.

問 52. V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の線型空間とする. このとき, $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle, \qquad \mathbf{v} \in V$$

という式によって定まる関数 $f_{\mathbf{u}} : V \to \mathbb{R}$ を考える.

(1) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して, $f_{\mathbf{u}} \in V^*$ となることを示せ. すなわち, $f_{\mathbf{u}} : V \to \mathbb{R}$ は線型写像となることを示せ.

(2) V が有限次元のとき, $\mathbf{u} \in V$ に対して, $f_{\mathbf{u}} \in V^*$ を対応させる写像 $f : V \to V^*$ は, 同型写像であることを示せ. すなわち, 写像 f は, 線型写像であり, かつ, 全単射となることを示せ.

問 53. A を m 行 n 列の行列とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ に対して, $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{u}, {}^tA\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^n}$ となることを示せ. ただし, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積を, それぞれ, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^m}$, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n}$ と表わした.

(2) $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ の直交補空間は, それぞれ,

(a) $(\mathrm{Ker}\, A)^\perp = \mathrm{Im}\ {}^tA$

(b) $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\ {}^tA$

で与えられることを示せ.

• n 行 n 列の実対称行列 A は, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \implies {}^t\mathbf{u}A\mathbf{u} > 0$$

となるときに, **正定値**であるという. 同様に, n 行 n 列のエルミート行列 B は, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \implies {}^t\bar{\mathbf{v}}A\mathbf{v} > 0$$

となるときに, **正定値**であるという.

問 54. n 行 n 列の実対称行列 A に対して, A が正定値となるための必要十分条件は, A のすべての固有値が正の実数となることであることを示せ.

問 55. A, B を n 行 n 列の正定値実対称行列とするとき, 勝手な正の実数 $0 < \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して, $\lambda A + \mu B$ も, 正定値実対称行列となることを示せ.

問 56.* A, B を n 行 n 列の正定値実対称行列とするとき, $\mathrm{tr}(AB) > 0$ となることを示せ.

問 57.* A を n 行 n 列の正定値エルミート行列とし, B を n 行 n 列のエルミート行列とする. このとき, 適当な n 行 n 列の正則行列 P が存在して, ${}^t\bar{P}AP$ は単位行列に, かつ, ${}^t\bar{P}BP$ は対角行列にできることを示せ.