数学 II 演習の進め方について (冬学期)

1　毎回の演習問題について

皆さんから, 特に強い要望や不満がなければ, 冬学期も夏学期と同様の形式で, 線型代数学の演習を進めて行こうと思います.

夏学期にもお伝えしましたが, 皆さんにお配りする予定の「数学 II 演習」のプリントでは, 全十三回のうち, 第 11 回から第 13 回までの最後の三回で「Jordan 標準形」について説明しています. 一方, 現在のカリキュラムでは, 線型代数学に関しては,「対称行列の対角化」くらいまでを一年生の「数学 II」で取り上げ, その後に続く「Jordan 標準形」については二年生の夏学期に開講される「数理科学 IV」で取り上げられることになっています. その意味で,「数学 II 演習」のプリントのうち, 第 1 回から第 10 回までの最初の十回くらいまでが, 一年生の「数学 II」で学ぶべき内容ということになります.[1]

私としては, **「Jordan 標準形」まで扱うことで, 線型代数学の話が一通り完結する**ことと, **皆さんとお付き合いするのが一年間だけである**こととを考えて, 一年生のうちに第 13 回までの内容を理解していただくかどうかは別として, **線型代数学の基本的な考え方を一通り説明したものをお配りした方が, 将来, 皆さんにとって役に立つこともあるのではないか**と考えています. そのようなわけで, 学期の後半に進むにつれて, 演習と講義の進度がかなりずれてしまうことがあると思いますが, 取りあえず, 講義の進度とは関係なしに, 第 13 回までのプリントをお配りしようと思います.

その上で, 実際の演習の時間には, 例えば,「秋季特別セミナーの演習問題」を一緒にお配りしたり, 演習の時間内での基本事項の説明も, Jordan 標準形に関するものは除いて, 第 10 回までに取り上げられているものの中から順番に説明しようと思っていますので, 皆さんも, 毎回お配りする問題を配られた回に解くということには捕らわれずに, 例えば, 第 9 回の演習のとき, すでにお配りしている第 7 回の問題に取り組むというように, **第 10 回までの内容をひとつの目安として, 自分のペースで問題に取り組んでいただけると良いのではないか**と思います.[2]

この演習の始めでも注意したように, 数学を学ぶ上では, **自分のペースでじっくりと取り組む**ことが大切です. ですから, **私が毎回出題する問題に必ずしも捕らわれずに, 講義や, いま自分で勉強していることに合わせて, 自由に勉強していただいても構いません**. 例え

[1]ただし, 講義の進み具合によっては, 一年生の「数学 II」の中で「最小多項式」や「Jordan 標準形」などの少し進んだ話題に触れる場合もあるようです.

[2]毎回, 二枚目に付けている「数学 II 演習問題」の方は, 一年間を通して, 「数学 II」で取り上げる内容の問題だけを扱っていますので, 毎回の問題をその日のうちに取り組みたいと思われる方は「数学 II 演習問題」の方に取り組んでいただいても構いません.

ば, 夏学期に学ばれた事柄をもう一度きちんと考えてみたいと思われる方は, それに合わせて, 夏学期に配った演習の対応する部分の問題を問いていただいても構いません.

夏学期にも注意しましたが, 毎回の演習問題は, 皆さんの現在の知識を確認することを目的として出題しているというよりは, **皆さんが現在持っている知識をもとにして, あれこれ思考錯誤することにより, 線型代数学における基本的な考え方を具体例を通してより良く理解する助けになれば良い**と考えて出題しています. ですから, その場で時間内に解けなかったというようなことは気にせずに, じっくりと取り組んでいただければと思います. また, 線型代数学の基本的な考え方に一通り触れていただくという点でも, 時間内に解けなかった問題でも, 演習が終わった後で一通り触れる機会を持っていただけると, 理解の助けになることもあるのではないかと思います.

また, この演習では**「どのようなことを問題にして, それをどのようなアイデアで解決しようとしているのか」ということを, なるべくハッキリとした形で説明したい**と考え, そのような目的で毎回の問題を選んでいるのですが, 二週間に一度という演習時間の制約の中でそれを行なおうとすると, 基本的な計算練習を多く取り入れるということは, どうしても難しくなってしまいます. ですから, **もっと基本的な計算練習から入りたいと思われる方は, 自分で適当な教科書や演習書を用意して, そうした計算練習を行なってみて下さい**. そのようにして, 少し線型代数学に対する感覚が付いてきたと思われる頃に, 毎回お配りする演習問題に取り組んでいただいて, **基本的な問題点や, それを解決するアイデアは何であるのか**ということを反省していただくと, より理解が進むこともあるのではないかと思います.

それから, **基本的なアイデアを説明する**という観点から, 演習問題に対する解説の中で, 必ずしも一年生の線型代数学の範囲に捕らわれずに, **少し進んだ話題**に触れた部分もあります. そのような部分の解説は, 最初は少し難しいというような印象を与えるかもしれませんが, あまり気にせずに読み飛ばしてもらえればと思います. こうした部分の解説は, **皆さんに数学におけるものの見方を紹介してみよう**と思ったのと, **将来, 皆さんが, それぞれの道に進まれた後で, もう一度, 線型代数学についてじっくり考え直してみたいと思われたときに, 何らかのヒントになれば良い**と考えて付け加えました. ですから, 一読してよく分からないということがあってもあまり気にしないで下さい. そして, もし, そのよう進んだ事柄の中にもっと知ってみたいと思う部分があれば, **皆さん自身で適当な教科書を用意して, どんどん先へ進まれる**と良いのではないかと思います.

2　線型代数学における基本的な考え方 (冬学期分に関するもの)

夏学期に引き続き, **「線型代数学の基本的な考え方」**として, どのようなものがあって, それをどの回の演習で取り上げる予定なのかということを少しだけ説明しておくと, 皆さんの中にも演習問題に取り組みやすくなるように感じる方があるかもしれません. そこで, ここでは, 冬学期の演習で取り上げようと考えている内容について少し説明してみることにします.

夏学期にお配りした「数学 II 演習の進め方について (夏学期)」の中でも説明しましたが, 私としては, 線型代数学の内容を**「計算のパート」**と**「概念のパート」**という形で分けて説明した方が, 皆さんにより良く理解していただけるのではないかと思いますので, こ

の演習では, 前半の第 1 回から第 6 回までで**「計算のパート」に関する基本的な考え方**を, また, 後半の第 6 回から第 13 回までで**「概念のパート」に関する基本的な考え方**を取り上げることにしました.[3]

そこで, ここでは第 6 回以降で取り上げられている**「概念のパート」に関する基本的な考え方**について少し説明してみることにします. 言葉の説明は後回しにして, 第 6 回以降で取り上げる内容に関する基本事項を図にまとめるとおおよそ次のようになります.

「概念のパート」に関する基本事項 (その１)

線型空間と線型写像

$\mathbb{R}^n$ のような「数ベクトル空間」を座標軸を外して眺める視点を導入する.

- 線型空間
- 線型部分空間

数ベクトルに行列を「掛け算する操作」に注目し, 行列を「数が並んだもの」ではなく,「写像」として眺める視点を導入する.

- 線型写像
- 数ベクトル空間の間の線型写像と行列の関係

↓ 線型空間に「番地割り」して考える

線型空間の「番地割り」

基底を用いて, 線型空間に「番地割り」して考える.

- 線型空間の基底
- 線型空間の元の線型独立性
- 線型空間の次元

↓ 線型写像を「行列の姿」に化かす

線型写像の表現行列

基底を用いて, 線型空間に「番地割り」して考えたときに, 線型写像は行列の姿に化けることを理解する.

- 線型写像の表現行列

[3] 実際には, 第 6 回から第 8 回までで「概念のパート」に関する基本的な考え方が取り上げられ, 第 8 回から第 13 回までで,「線型代数学の心」とも言うべき**「計算のパート」と「概念のパート」を総合した考え方**が取り上げられています.

「概念のパート」に関する基本事項 (その２)

線型写像の大まかな様子

表現行列が「見やすい形」になるような「上手い番地割り」を用いて表わすことにより,「線型写像の大まかな様子」が「kernel」や「image」という概念を用いて記述できることを理解する.

- 線型写像の kernel と image
- 次元公式
- 行列の rank の意味

$\uparrow$ 線型写像を「見やすい形」で記述する

行列の標準形の問題 (その１)

与えられた行列 A を「第一印象」で眺めるのではなく,「本来の姿」で眺めるような視点を見つけることができるようになる. 具体的には, 与えられた行列 A に対して, $Q^{-1}AP = \Lambda$ となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P, Q を求めることができるようになる.

- 行列の標準形の問題 (その１)
- 行列の rank の計算の見直し

$\uparrow$「行列」を「見やすい形」に変換する

表現行列の変換公式

与えられた線型空間に対して, 異なる基底がどれだけ存在するのかということを理解し, 線型空間の「番地割り」を取り換えたときに, 線型写像の表現行列がどのように「姿」を変えるのかを理解する.

- 基底変換の行列
- 表現行列の変換公式

$\downarrow$「行列」を「見やすい形」に変換する

行列の標準形の問題 (その２)

与えられた正方行列 A を「第一印象」で眺めるのではなく,「本来の姿」で眺めるような視点を見つけることができるようになる. 具体的には, 与えられた正方行列 A に対して, $P^{-1}AP = \Lambda$ となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を求めることができるようになる.

- 行列の標準形の問題 (その２)

「概念のパート」に関する基本事項 (その３)

行列の標準形の問題 (その２)

与えられた正方行列 A を「第一印象」で眺めるのではなく,「本来の姿」で眺めるような視点を見つけることができるようになる. 具体的には, 与えられた正方行列 A に対して, $P^{-1}AP = \Lambda$ となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を求めることができるようになる.

- 行列の標準形の問題 (その２)

↓「見やすい形」として「対角行列」を取る

行列の対角化の問題

「固有値」や「固有ベクトル」という概念に注目して, 与えられた正方行列 A に対して, $P^{-1}AP = \Lambda$ となるような「対角行列」Λ と正則行列 P を求めることができるようになる.

- 行列の対角化の問題
- 固有値と固有ベクトル
- 直和と固有ベクトル空間分解

↓「内積」の概念を導入する

内積を持つ線型空間

線型空間上に「内積」の概念を導入し,「対称行列」や「エルミート行列」など, 行列 A が「内積と相性がよい行列」の場合には,「対角化の問題」がいつでも解決できることを理解する.

- 線型空間上のユークリッド内積 (あるいは, エルミート内積)
- 対称行列と直交行列 (あるいは, エルミート行列とユニタリー行列)
- 線型部分空間の直交補空間
- 対称行列の直交行列による対角化 (あるいは, エルミート行列のユニタリー行列による対角化)
- 正規直交基底と Gram-Schmidt の直交化法

「概念のパート」に関する少し進んだ話題

行列の標準形の問題 (その2)

与えられた正方行列 A を「第一印象」で眺めるのではなく,「本来の姿」で眺めるような視点を見つけることができるようになる. 具体的には, 与えられた正方行列 A に対して, $P^{-1}AP = \Lambda$ となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を求めることができるようになる.

- 行列の標準形の問題 (その2)

$\downarrow$「見やすい形」として「Jordan 標準形」を取る

Jordan 標準形の問題

「見やすい形」として「Jordan 標準形」を取ることにより,「行列の標準形の問題 (その2)」がいつでも解決できるようになることを理解する. また, 与えられた正方行列 A に対して, $P^{-1}AP = J$ となるような「Jordan 標準形」J と正則行列 P を求めることができるようになる.

- Jordan 細胞と Jordan 標準形
- 最小多項式
- ベキ零行列の標準形
- 一般固有ベクトル空間分解

$\downarrow$「Jordan 標準形」の応用

「Jordan 標準形」の応用例

線型代数学の立場から見直すことにより, 数列に対する定数係数の線型漸化式や関数に対する定数係数の線型微分方程式の一般解の構造を理解する.

- 数列に対する定数係数の線型漸化式と行列の n 乗 A^n の計算との関係
- 関数に対する定数係数の線型微分方程式と行列の指数関数 e^{xA} の計算との関係

皆さんにも, 上で挙げた基本事項のつながりや登場するキーワードに注意して学んでいただけると, 線型代数学に対する理解が深まるのではないかと思います. 以下, 順番に, これらのキーワードについて少しだけ説明してみることにします.

3　線型空間と線型写像について

さて, 線型代数学の主目標は**行列の性質をより良く理解できるようになる**ということですが,「数が並んだもの」としての行列の中には,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という行列のように「見やすい形」をした行列が存在している一方で, ほとんどの行列は,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

という行列のようにあまり「見やすい形」はしていません.[4]

そこで, このような一般には「見やすい形」をしているとは限らない行列のこともより良く理解できるようになるために,**「最初に与えられた姿」に惑わされずに, 与えられた行列のことをより良く理解しよう**ということが考えられました. すなわち,**「行列とは見方を変えるとコロコロと姿を変えるものである」と考えて,「最初に与えられた姿」ではなく, 行列が「見やすい形」になるような視点から眺めてやることで, より良く理解できるようになるのではないか**という「作戦」が立てられました. この「作戦」を実行に移すということが, 線型代数学における「概念のパート」ということになります.

行列を「数が並んだもの」としてだけ考えることにすると, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

という二つの行列 A と B は「異なる行列」ということになります. したがって,「行列 A は見方を変えると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

というように「姿」を変える」というような言明が意味を持つためには,**「行列」を「数が並んだもの」ではなく, 別な視点から眺める必要が出てきます**. こうした目的のために導入された概念が**「線型空間」**や**「線型写像」**です.

(あ) 線型空間とは (第 6 回：7 節, 8 節)[5]

上でも注意したように,**「最初に与えられた姿」に惑わされずに, 行列のことを理解しようと試みる**ということが, 線型代数学における「概念のパート」における主目標です. そのためのアイデアは,

---

[4] ここで, (正方) 行列が「見やすい形」かどうかということは, 数学的には, 例えば, $n \in \mathbb{N}$ として, 行列の n 乗が簡単に計算できるかどうかということで判断できます. 例えば, A のような「対角行列」に対しては,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

というように, n 乗の計算が簡単にできてしまうのに対して, B のような「見やすくない形」の行列に対しては, B^n がどうなるのかということはすぐには分からないというわけです.

[5] 皆さんの参考のために, 関連事項の説明が「数学 II 演習の解説」の中のどの節で行なわれているのかということを一緒に記すことにしました.

座標軸を外して考えてみる

$$\begin{array}{ccc} \text{数ベクトル空間} & & \text{線型空間} \\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots & \xrightarrow{\text{座標軸を外して考える}} & V \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \text{行列：}A & & \text{線型写像：}f \end{array}$$

というように, $\mathbb{R}^2$ **や** $\mathbb{C}^3$ **のような「数ベクトル空間」から「座標軸を外して眺める」という視点を導入する**ということです. 皆さん, よくご存じのように,「座標」は具体的な計算を進める上では大変便利です. ところが, **この世の中に「万人に共通の座標軸」が存在するわけではない**ということからも察せられるように,**「座標」というものは具体的な計算を進める上では便利なものの, 物事の本質には関わっていない**と思われます. そこで,**「座標軸を外して眺める」という視点から「数ベクトル空間」や「行列」を眺めてみることで,「数ベクトル空間」や「行列」の本質が見えてくるのではないか**と考えてみるというのが, 線型代数学における基本的な考え方になっています.

さて, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」から「座標軸を外して」みると,「原点のある真っ直ぐな空間」が残るように思われますが,「原点のある真っ直ぐな空間」というのが**「線型空間」**の直感的な定義 (あるいは, 幾何学的なイメージ) です. ただし,「真っ直ぐである」というのは極めて感覚的な定義なので,「足し算」や「スカラー倍」ができるということが,「原点があり, かつ, 真っ直ぐである」ということの言い換えになると考えて, 数学的には,**「足し算」や「スカラー倍」ができる集合**を**線型空間**と定義します.[6]

(い) 線型部分空間とは (第 5 回：8 節)

一般に, 線型空間 V の部分集合 $W \subset V$ が,

W が線型部分空間であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ に対して, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in W$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $c\mathbf{u} \in W$ となる.

という二つの条件を満たすとき,[7] W を (線型空間 V の) **線型部分空間**と言います.[8] すなわち, 線型部分空間 $W \subset V$ とは, それ自身が線型空間であるような部分集合のことです.

---

[6]「数ベクトル空間」において, ベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」は座標軸が無くとも考えることができるということに注意して下さい. また, 実際には, 線型空間を定義する上で,「結合法則」や「分配法則」が成り立つことなど,「足し算」や「スカラー倍」が「まっとうである」ということを要請します. これらの性質は, 線型空間の元の「足し算」や「スカラー倍」を, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトルの「足し算」や「スカラー倍」のようにイメージしても「変なこと」が起こらないということを保証します.

[7]ここでは,「スカラー倍」=「$\mathbb{R}$ 倍」であるような場合, すなわち, V が「$\mathbb{R}$ 上の線型空間」である場合として, 定義を書きました.

[8]教科書によっては, **線型部分空間**のことを**部分線型空間**と呼んでいることもありますが, 両者は同じもののことです.

皆さんにとって, 大切なことは, まずは, W として, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の部分集合を考えて, **W が,「原点を通る直線」や「原点を通る平面」など,「原点を通る真っ直ぐな部分集合」であることと, 線型部分空間であることとが上手く対応していることを納得する**ことです. 一般に, A を m 行 n 列の行列として,

$$W = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0}\ \}$$

というような (同次) 連立一次方程式の解全体の集合が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間の代表例です.

(う) 線型写像とは (第 6 回 : 14 節)

上でも述べたように,「行列」を「数が並んだもの」としてではなく, 別な視点から眺めてみるというのが「概念のパート」における基本的な考え方です. そのためのアイデアは, **「行列を掛け算する操作」に注目する**ということです.

いま, A を m 行 n 列の行列として, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に行列 A を「掛け算する操作」を,

$$f_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

と表わして, f_A を,

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

という写像であるとみなすことにします. このとき, 行列 A の掛け算は, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ として,

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \tag{1}$$

$$A(c\mathbf{u}) = c \cdot A\mathbf{u} \tag{2}$$

という式を満たすことが分かりますが, (1) 式, (2) 式を, 写像 f_A の言葉を用いて表わすと,

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$
$$f_A(c\mathbf{u}) = c \cdot f_A(\mathbf{u})$$

ということになります.

そこで, 一般に, 線型空間 V, W に対して, V から W への写像

$$f : V \to W$$

が,

線型写像の条件

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\mathbf{u}) = c \cdot f(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件を満たすときに, 写像 f を**線型写像**と呼びます. 上で見たことから, 行列 A を「掛け算する操作」$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線型写像ということになります.

(え) 数ベクトル空間の間の線型写像と行列の関係 (第 1 回 : 5 節, 第 6 回 : 15 節)

前項で見たように, 一般に, m 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A を「掛け算する操作」

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

は, 線型写像になることが分かりますが, 逆に, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像はこのようなものしか存在しないことが分かります. すなわち,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

を勝手にひとつ与えられた線型写像とすると, 写像 f は, ある m 行 n 列の行列 A を用いて,

$$f = f_A$$

と表わせるということ, すなわち, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

と表わせるということが分かります. また, A, B を m 行 n 列の行列として, $A \neq B$ であるとすると, 写像としても, $f_A \neq f_B$ となることが分かります. こうして,**「数ベクトル空間の間の線型写像」とは「行列を掛け算する操作」に他ならない**ということが分かります.

一般に, V, W を線型空間として, 線型空間の間の写像

$$f : V \to W$$

は,**「原点のある真っ直ぐな空間」である V の点 $\mathbf{u} \in V$ が「原点のある真っ直ぐな空間」である W の点 $f(\mathbf{u}) \in W$ に写される**というように, 座標軸に依らずにイメージすることができますから, 上のように,**「数が並んだもの」としての行列 A と行列 A を「掛け算する操作」f_A を同一視して考える**ことにより, **行列 A を座標軸に依らずに眺める視点が獲得できた**ことになります.

4　線型空間の「番地割り」について

3 節で見たように,「線型空間」や「線型写像」という概念を導入することにより, 行列 A を座標軸に依らずに眺める視点が得られることが分かりますが, 逆に, 一見, 抽象的に見える「線型空間」や「線型写像」も,「基底」という概念を用いて,

「基底」を定めて「座標付け」をして考えてみる

数ベクトル空間		線型空間
$\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots$	$\xleftarrow{\hspace{8em}}$	V
$\circlearrowright$	基底を定めて「座標付け」して考える	$\circlearrowright$
行列：A		線型写像：f

というように, 具体的な「数ベクトル空間」や「行列」の姿に見えてくることが分かります. したがって, 線型代数学において, 具体的な「数ベクトル空間」や「行列」と, 抽象的な「線型空間」や「線型写像」の間の関係は,

線型代数学における基本的な考え方

数ベクトル空間		線型空間
	座標軸を外して考える	
$\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots$	$\xrightarrow{\hspace{8em}}$ $\xleftarrow{\hspace{8em}}$	V
$\circlearrowright$	基底を定めて「座標付け」して考える	$\circlearrowright$
行列：A		線型写像：f

というように, **同一の数学的な対象を,「座標軸」を外して眺めるのか, あるいは,「座標付け」して眺めるのかという違いとして理解することができる**ということになります. この演習でも, 追々, 見ていくように, **こうした二通りの見方を行ったり来たりすることによって,「行列の本質」をより良く理解することができる**ようになりますし, **行列を用いて理解することのできる対象も大幅に広がる**ことになります.

(あ) 基底とは (第 6 回：9 節)

上で注意したように, 線型空間 V に座標付けするための概念が「基底」というものです.

いま, V を線型空間としたときに,「原点があり, かつ, 真っ直ぐである」という特徴を生かして, 線型空間 V に「番地割り」することを考えます.[9] そこで, いま, 例えば,「番地割り」の基準となる「方向」を二つ取って, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ と表わすことにします.[10] このとき, 例えば, V の元 $\mathbf{u} \in V$ が,

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

というように表わせるときに, (3) 式を,「線型空間 V の原点 $\mathbf{0}$ を出発して, $\mathbf{e}_1$ の方向に 1 歩進み, $\mathbf{e}_2$ の方向に 2 歩進むと, $\mathbf{u} \in V$ という点に至る」ということを表わ

[9] どのようなことを行なっているのかというイメージが持ちやすいように, 以下では,「座標付け」のことを「番地割り」と呼ぶことにします.

[10] 後で見るように,「番地割り」の際に, 基準となる「方向」がいくつ必要になるのかということは, それぞれの線型空間 V によって異なります.

していると解釈して,

$$V \ni \mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」を割り振ることを考えてみます.[11] より一般に, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

というように表わせるときに,

「番地割り」の方針

$$V \ni \mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」を割り振ることを考えてみます. このとき, 上の方針のもとで,「番地割り」が上手くいくとき, すなわち,

基底の条件

(イ) V のすべての元に対して,「番地」が割り振られる.

(ロ) 「番地割り」に「二重番地」のような混乱が生じない.

という二つの条件が満たされるときに, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を線型空間 V の基底と呼びます.

全く同様にして, 一般に,

$$\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \cdots,\, \mathbf{e}_m \in V$$

というように,「番地割り」の基準として, V の元をいくつか取ってくるときに,

基底の条件 (数学的な定義)

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \tag{4}$$

となるような数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされるときに, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を線型空間 V の**基底**であると言います. **線型空間 V の基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を, 勝手にひとつ定めると, それぞれの元 $\mathbf{u} \in V$ を, (4) 式のように表わすことで,**

[11] すなわち, $\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ を「1 丁目 2 番地」と考えて,「1-2」と「番地」を割り振るということです.

基底 $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を用いて, $\mathrm{u} \in V$ に「番地」を割り振る

$$V \ni \mathrm{u} = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + \cdots + a_m\mathrm{e}_m \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

というように「番地割り」をすることができ, これにより, V の元と「番地全体の集合」である $\mathbb{R}^m$ の点がぴったり一対一に対応して,

線型空間 V に「番地割り」する

$$V \cong \mathbb{R}^m$$

というように同一視できることになります.

(い) 線型空間の元の線型独立性 (第 6 回 : 9 節)

一般に, 線型空間 V の元 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ が, 基底の条件のうち, (ロ) という条件を満たすとき,[12] すなわち,

線型独立性の条件

$a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

となる.

という条件を満たすときに, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ は**線型独立**であると呼びます.[13] 例えば, $m = 3$ として,

$$\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \tag{5}$$

であるとすると, (5) 式から,

$$\mathbf{0} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + (-1)\mathbf{e}_3$$

ということになりますから, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は線型独立ではないということになります.[14] このように, ある元が, その元以外の元を用いて表わせるとすると, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ は線型独立ではないということが分かります. すなわち, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ が線型独立であるということは, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m$ の表わす方向が, それぞれ「独立の方向を向いている」ということの数学的な表現になっています.

(う) 線型空間の次元 (第 6 回 : 9 節, 第 8 回 : 4 節)

[12] すなわち, (イ) の条件を満たすかどうかということは問わないということです.

[13] 教科書によっては, **線型独立**のことを**一次独立**と呼んでいることもありますが, 両者は同じことを表わしています.

[14] このとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は**線型従属**であるとか, **一次従属**であるとか言ったりします.

一般に, 線型空間 V に「番地割り」をするために必要な基底の元の個数を,[15] を線型空間の**次元**と呼び, 記号で,

$$\dim_{\mathbb{R}} V$$

というように表わしたりします.[16] **与えられた線型空間 V の基底の取り方は, 一通りではありません**が, **どのような取り方をしても,「基底の元の個数」は等しくなる**ことが分かり, この個数のことを線型空間 V の次元と呼ぶということです.

(え) 線型写像の表現行列 (第 6 回：16 節)

いま, 二つの線型空間 V, W の間の線型写像

$$f : V \to W$$

が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \ \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて,

$$V \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$W \ni \mathbf{v} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + \cdots + y_m\mathbf{f}_m \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

という「番地割り」によって,

$$\begin{aligned} V &\cong \mathbb{R}^n \\ W &\cong \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

というように「座標付け」してみると,

---

[15] すならち, 基底を $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ と書いたとき, m のことです.

[16] V が複素数上の線型空間のときには, $\dim_{\mathbb{C}} V$ と表わしたりします. このように, 線型空間 V の「スカラー倍」として, どのような数を考えているのか, すなわち, 線型空間 V の「番地割り」の「番地」として, どのような数を用いているのかということを,「$_{\mathbb{R}}$」や「$_{\mathbb{C}}$」という添え字によって表わします. その意味で, 線型空間 V の「スカラー倍」として, どのような数を考えているのかということが明らかである場合には,「$_{\mathbb{R}}$」や「$_{\mathbb{C}}$」というような添え字を省略して, V の次元を, 単に, $\dim V$ と表わしたりもします.

V や W の「番地割り」のもとで線型写像 f は行列 A のように見える

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, sloped, "\in"] & & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dl, phantom, sloped, "\in"] \\
& V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & & W \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[rr, "f_A"'] & & \mathbb{R}^m & \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & & & & A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[ul, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

というように, 線型写像 f は, ある m 行 n 列の行列 A を掛け算するような写像 f_A のように見えることが分かります. すなわち, **「線型空間 V のどの点が, 線型空間 W のどの点に写るのか」という記述ではなく,「線型空間 V のどの「番地」が, 線型空間 W のどの「番地」に写るのか」という記述を行なうと, 線型写像 f は「行列の姿」A に「化ける」**ことが分かります. このようにして得られる行列 A を線型写像 f の (V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ に関する) **表現行列**と呼びます.

5　表現行列の変換公式

4 節で見たように, 線型空間に基底を定めて「番地割り」して考えることで, 線型空間 V, W の間の線型写像 $f : V \to W$ は行列の姿に「化ける」ことが分かります. ここで, 線型空間 V や W の基底を取り換えて,「新しい番地割り」のもとで, 同じ線型写像 $f : V \to W$ を行列の姿に「化かして」みると, 線型写像 f の表現行列は, 一般には,「最初の番地割り」のもとでの表現行列と姿を変えることが分かります.

そこで, 状況をより良く理解するために, **与えられた線型空間に異なる基底がどれだけ存在するのか**ということと, **線型空間の「番地割り」を取り換えたときに, 線型写像の表現行列がどのように姿を変えるのか**ということを理解することが大切になります.

(あ) 基底変換の行列 (第 8 回 : 4 節)

いま, V を $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ である ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$
V \ni \mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{6}
$$

というように, **V に「番地割り」をして考えてみる**ことにします. ただし, 毎回, (6) 式のように書くのは大変ですから, 行列の掛け算を用いて, V の元 $\mathbf{u} \in V$ を,

「番地割りの基準」と「番地」を同時に表わす便利な記法

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

というように表わすことにします. このような記法を用いると, **どのような「番地割りの基準」のもとで, どのような「番地」を持つ元を考えているのかという二つの情報を同時にハッキリと表わすことができる**ので,「番地割り」を取り替えて議論をするようなときにはとても便利です. また, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ を, 勝手に二つ取ってきた元として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いて,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2 &= b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

というように表わせるとしたときに,[17] 行列の掛け算を用いることで, (8) 式, (9) 式を,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

というように, ひとつの式にまとめて表わすことができます. ここで,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると, (10) 式は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P$$

というように簡明な形で表わすことができます.

より一般に, V を ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を, 勝手にひとつ取ってくると, V の n 個の元 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ を, n 行 n 列の行列 P を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P \tag{11}$$

というように簡明な形で表わすことができます.[18] このとき, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ も V の基底になるかどうかということが, 正方行列 P を用いて,

[17] すなわち, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ という二つの元に割り振られる「番地」を, それぞれ, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と呼んだということです.

[18] すなわち, P は, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ が V の基底になるための条件

$$\begin{aligned}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \text{ が } V \text{ の基底になる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad P \text{ は正則行列.} \\ &\Longleftrightarrow \quad \det P \neq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

というように判定できることが分かります. 正方行列 P が正則行列のとき, 行列 P は, (11) 式のように, V の「旧基底」$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と「新基底」$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ の間の関係を与える行列と考えることができるので, 正則行列 P のことを**基底変換の行列**とか, **基底の取り換えの行列**とか呼んだりします.

いま, V の基底全体の集合を,

線型空間 V の基底全体の集合

$$\mathcal{B}_V = \{\, \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \mid \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \text{ は } V \text{ の基底 } \}$$

という記号を用いて表わし,[19] 実数を成分に持つ n 行 n 列の正則行列全体の集合を,

実数を成分に持つ n 行 n 列の正則行列全体の集合

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \left\{ P = \left(p_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,n}} \;\middle|\; p_{ij} \in \mathbb{R},\ \det P \neq 0 \right\}$$

という記号を用いて表わすことにします.[20] また, **$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{B}_V$ という V の基底を「基点」として勝手にひとつ選んだ**上で, n 行 n 列の正則行列 $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P$$

という式によって, V の元 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ を定めることにします. すると, (12) 式から,

n 次元の線型空間 V の基底と n 行 n 列の正則行列の間の対応

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_V \ni \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \longleftrightarrow P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}$$

という対応により,

線型空間 V の基底全体の集合は正則行列全体の集合と同一視できる

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_V \ \cong \ \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})} \tag{13}$$

というように同一視できることが分かります. すなわち, 基底変換の行列を通して考

[19]基底のことを, 英語で basis と言います.

[20]数学では, 掛け算ができ, 単位元 1 が存在し, それぞれの元に対して, 掛け算の逆元がその集合の中に存在するような集合を**群**と呼びます. 正則行列全体の集合は, このような群の代表例で, **一般線型群** (genaral linear group) と呼ばれます. また, 行列式が 1 となる行列全体の集合も掛け算や逆元を取る操作で閉じた集合になるので, やはり群になりますが, こちらは「行列式が 1 」という条件が付いているので, **特殊線型群** (special linear group) と呼ばれ, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ などと表わされます.

えると, 線型空間 V の異なる基底は, ちょうど正則行列分だけ存在することが分かります.

(い) 表現行列の変換公式 (第 8 回 : 5 節)

いま, V, W を ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間として, V から W への線型写像 $f : V \to W$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて,

$$V \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \ \longleftrightarrow\ \mathbf{x}_{旧} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{旧} \in (\mathbb{R}^n)_{旧},$$

$$W \ni \mathbf{v} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + \cdots + y_m\mathbf{f}_m \ \longleftrightarrow\ \mathbf{y}_{旧} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{旧} \in (\mathbb{R}^m)_{旧}$$

という「旧番地割り」によって,

$$V \cong (\mathbb{R}^n)_{旧}, \quad W \cong (\mathbb{R}^m)_{旧}$$

というように「座標付け」して考えたときの線型写像 f の表現行列を A と表わすことにします. また,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P, \qquad P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \cdots & \mathbf{f}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_m \end{pmatrix} Q, \qquad Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

という式により, V や W の基底を,

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n\} \\ \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \cdots, \mathbf{f}'_m\} \end{array}$$

というように取り替えて, 基底 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n\}$, $\{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \cdots, \mathbf{f}'_m\}$ を用いた「新番地割り」のもとで,

$$V \cong (\mathbb{R}^n)_{新}, \quad W \cong (\mathbb{R}^m)_{新}$$

というように「座標付け」して考えたときの線型写像 f の表現行列を A' と表わすことにします. このとき, 二つの表現行列 A と A' の間には,

表現行列の変換公式

$$A' = Q^{-1}AP \tag{14}$$

という関係式が成り立つことが分かります. この (14) 式を**表現行列の変換公式**と呼びます.

6　行列の標準形の問題

5 節で見たように, V, W を線型空間として, $f : V \to W$ を線型写像とするときに, V や W の基底を取り替えて, それぞれの線型空間の「番地割り」の仕方を変えたときに, 線型写像 f の表現行列は,

$$A \rightsquigarrow A' = Q^{-1}AP$$

というように姿を変えることが分かります. このことは, **正則行列 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{m}, \mathbb{R})$ を用いて,**

$$\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$$

という関係にあるような $\boldsymbol{m}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列の行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A'}$ は「本質的に同じ行列」であるということを意味しています. すなわち, **これらの行列は, いずれも, $\boldsymbol{f : V \to W}$ という「同じ線型写像」を表わしており, 行列としての姿が違って見えるのは, 単に「異なる視点」から眺めているからに過ぎない**のだと考えることができます.

そこで, 行列 A が, 勝手にひとつ与えられているとして,**「最初に与えられた姿」$\boldsymbol{A}$ には惑わされずに, $\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$ が「見やすい形」になるような視点から眺めることにより, もともとの行列 $\boldsymbol{A}$ の性質もより良く理解できるのではないか**ということが考えられました. 人間の社会でも, 人を第一印象だけで判断すると, その人のことを大きく誤解してしまうことがありますが, 行列の社会でも, A さんのことを「第一印象」だけで判断せずに, A さんが本当はどのような人なのかということを一番良く分かっている人の視点から眺めてみることで, A さんのことがより良く理解できるのではないかと考えてみるというわけです.

(あ) 行列の標準形の問題 (第 8 回 : 6 節)

与えられた行列 A に対して, A が「見やすい形」になるような視点を見つける問題を, 一般に,**「行列の標準形の問題」**と言います. これを数学的に表現すれば,

行列の標準形の問題

与えられた行列 A に対して,

$$Q^{-1}AP = \Lambda \tag{15}$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P, Q を見つけよ.

ということになります. ただし, より正確には, 問題としている状況に応じて,

「行列の標準形の問題」の二通りの解釈

(i) P と Q が独立に取れる場合.

(ii) $P = Q$ と取らなければいけない場合.

というように,「行列の標準形の問題」を二通りに解釈することができます. 例えば, A が正方行列ではなく, 最初から, $P = Q$ とは取れない場合, あるいは, A を掛け算することにより定まる線型写像の「大まかな様子」を調べる場合などが, (i) の場合

に当たります. 一方, A が正方行列で, A^n や指数関数 e^{xA} などを考えたい場合などが, (ii) の場合に当たります.

(い) 行列の rank の計算の見直し (第 8 回 : 6 節)

「行列の標準形の問題」うち, (i) の場合については, 皆さんが「行列の rank の計算」をするときに行なっていることを反省してみると, **すでに問題は解決済み**であることが, 次のようにして分かります. 第 3 回の問 1 のところで見たように, 行や列に関する基本変形を施すことにより, 与えられた行列 A を,

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{16}$$

というように, 対角線上に 1 がいくつか並び, 残りの成分は 0 となるような「見やすい形」に変形できることが分かります.[21] ここで,「行や列に関する基本変形を施すこと」は,「対応する基本行列を左や右から掛け算すること」であると解釈することができますから, (16) 式より, 与えられた行列 A に対して, 適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が存在して,

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{17}$$

となることが分かります. そこで, 基本行列は正則行列であることに注意して, (15) 式と (17) 式を見比べてみると,

$$P = F_1 F_2 \cdots F_t, \quad Q = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

として,「行列の標準形の問題」が解決されることが分かります. すなわち, (i) の場合には,

行列の標準形 ($P = Q$ と取らなくてよい場合)

与えられた行列 A に対して,

$$Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{18}$$

となるような正則行列 P, Q が存在する.

という形で「行列の標準形の問題」が解決することが分かります.

7 線型写像の大まかな様子

いま, V, W を線型空間として, V, W の次元を, それぞれ,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

[21] ここで, サイズが r の単位行列を I_r と表わし, 零行列を O と表わしました.

とします. また, V から W への線型写像

$$f : V \to W$$

が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて, これらの基底に関する線型写像 f の表現行列を A と表わすことにします. ただし, このままでは, 表現行列 A が「見やすい形」の行列であるとは限りませんから, 線型写像 f の表現行列が「見やすい形」の行列になるように, V や W の基底を「上手く取り替える」ことを考えてみます. すると, 6 節で見たように, V や W の基底を,

$$
\begin{array}{ccc}
\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n\} \\
\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \cdots, \mathbf{f}'_m\}
\end{array}
$$

というように「上手く取り替える」ことで, 線型写像 f の表現行列は,

$$A \rightsquigarrow \Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」の行列に変換できることが分かります. すなわち, V, W の「上手い基底」を用いた「上手い番地割り」のもとで,

「上手い番地割り」のもとで線型写像 f は「見やすい形」の行列 Λ に化ける

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \\
 & V \arrow[ul, phantom, "\ni"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & W \arrow[ur, phantom, "\ni"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_\Lambda"'] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, "\ni"] & \\
\mathbf{z} \arrow[rrr, mapsto] & & & \Lambda\mathbf{z} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\mathbf{z}
\end{tikzcd}
$$

というように, 線型写像 $f : V \to W$ は,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{19}$$

という「見やすい形」の行列の姿に「化ける」ことが分かります. こうした「上手い番地割り」のもとで考察することで, 線型写像の大まかな様子をより良く理解することができます.

(あ) 線型写像の大まかな様子 (その１) (第 8 回 : 11 節)

いま, (19) 式の行列 Λ の形に注目して, V の「上手い番地」$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ を, 最初の r 個の成分 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 個の成分 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$ に分けて,

$$V \ni \mathbf{u} \ \longleftrightarrow \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

というように表わすことにします．また,

$$\begin{aligned}\Lambda\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

となることに注目して, W の「上手い番地」も, 最初の r 個の成分 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r$ と残りの $(m-r)$ 個の成分 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{m-r}$ に分けて,

$$W \ni \mathbf{w} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

というように表わすことにします．すると, この「上手い番地割り」のもとで, 線型写像 $f : V \to W$ は,

「上手い番地割り」のもとで線型写像 f の具体的な姿

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[ul, phantom, "\in"] & W \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \arrow[ur, phantom, "\ni"] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_\Lambda"'] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, "\in"] & \\
\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] & & & \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

というように, とても単純な姿で記述できることが分かります.

(い) 線型写像の kernel と image (第 8 回 : 10 節)

一般に, V, W を線型空間として, V から W への線型写像 $f : V \to W$ に対して,

線型写像 $f : V \to W$ の像

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\mathbf{u}) \in W \mid \mathbf{u} \in V \}$$

という式によって定まる線型空間 W の部分集合 $\operatorname{Im} f$ を, 線型写像 f の**像** (image) と呼びます．また, W の元 $\mathbf{w} \in W$ に対して,

線型写像 $f : V \to W$ による元 $\mathbf{w} \in W$ の逆像

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \{ \mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \}$$

という式によって定まる線型空間 V の部分集合 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を, 線型写像 f による $\mathbf{w} \in W$ の**逆像** (inverse image) と呼びます．特に, W の「原点」$\mathbf{0} \in W$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{0})$ だけは特別扱いをして, これを, 線型写像 f の**核** (kernel) と呼び, 記号で,

線型写像 $f : V \to W$ の核

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= f^{-1}(\mathbf{0}) \\ &= \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\ \}\end{aligned}$$

と表わしたりします. 線型写像 f の核 $\operatorname{Ker} f$ や像 $\operatorname{Im} f$ は, それぞれ, 線型空間 V や W の線型部分空間になることが分かります.

特に, A を m 行 n 列の (実数) 行列として, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f_A(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$$

という式によって定まる線型写像

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

の場合には,[22] 線型写像 f_A の像を,

行列 A の像

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} A &= \operatorname{Im} f_A \\ &= \{A\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n\ \}\end{aligned}$$

と表わして, **行列 A の像**と呼び, 線型写像 f_A の核を,

行列 A の核

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} A &= \operatorname{Ker} f_A \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}\end{aligned}$$

と表わして, **行列 A の核**と呼びます.

(う) 線型写像の大まかな様子 (その2) (第 8 回 : 11 節)

そこで, 再び, (あ) の項で見た「上手い番地割り」を用いて, 線型写像 $f : V \to W$ の様子を直接調べてみます. 議論が見やすくなるように, 以下では,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}$$

というように, **線型空間の「点」と「(上手い) 番地」を同一視して表わす**ことにします. すると,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \ \cong\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

に対して,

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W \ \cong\ \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \tag{20}$$

[22] すなわち, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は「行列 A を掛け算する」写像のことです.

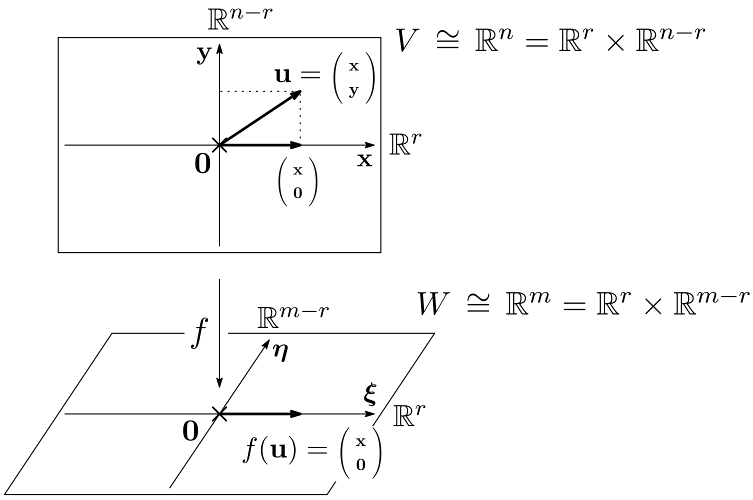

図 1: 「上手い番地割り」のもとでの線型写像 $f : V \to W$ の「大まかな様子」.

となることが分かりますから, 線型写像 f の「大まかな様子」は図 1 のように与えられることが分かります.

いま, (20) 式から,

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W \cong \mathbb{R}^m \;\middle|\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r \right\} \tag{21}$$

となることが分かりますから, 線型写像 f の像 $\operatorname{Im} f$ は $W \cong \mathbb{R}^m$ における「$\boldsymbol{\xi}$ 方向」$\mathbb{R}^r$ に対応していることが分かります. また,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \cong \mathbb{R}^r$$

に対して, $\mathbf{w}$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \tag{22}$$

となることも分かります. 特に, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ とすると,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \tag{23}$$

となることが分かりますから, 線型写像 f の核 $\operatorname{Ker} f$ は $V \cong \mathbb{R}^n$ における「$\mathbf{y}$ 方向」$\mathbb{R}^{n-r}$ に対応していることが分かります. さらに,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

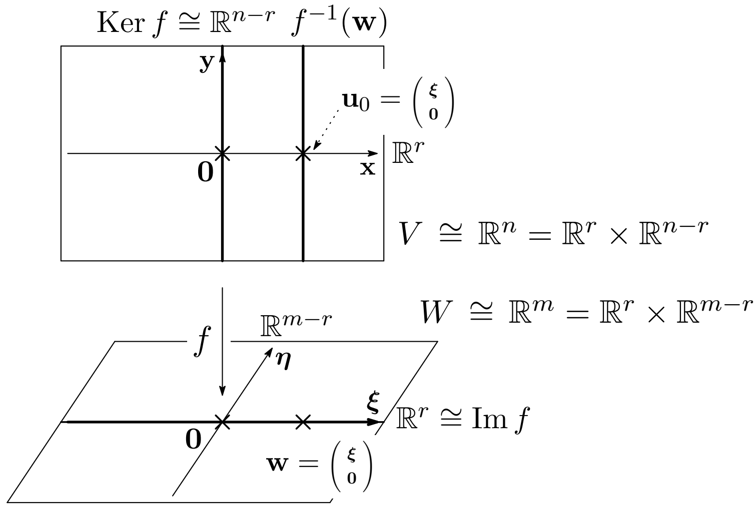

図 2: 線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$, 核 $\mathrm{Ker}\, f$, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ の様子.

と分解して考えると, (22) 式, (23) 式から,

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in f^{-1}(\mathbf{w})$$

として,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{u}_0 + \mathrm{Ker}\, f$$

というように表わせることが分かります. すなわち, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は, 線型部分空間 $\mathrm{Ker}\, f$ を「特殊解」$\mathbf{u}_0$ だけ平行移動したようなまっすぐな部分集合になっていることが分かります.

以上から, 線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$, 核 $\mathrm{Ker}\, f$, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は, それぞれ, 図 2 のように与えられることが分かります. 特に, 線型写像とは,「上手い番地割り」を用いて,

$$V \cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$
$$W \cong \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

というように, 線型空間 V, W を, それぞれ,「縦方向」と「横方向」に分解したときに, **V の「縦方向」である $\mathrm{Ker}\, f \cong \mathbb{R}^{n-r}$ の方向を「つぶして」, W の「横方向」である $\mathrm{Im}\, f \cong \mathbb{R}^r$ にそのまま「落とす」ような写像である**ことが分かります.

(え) 線型写像の大まかな様子 (その３) (第 8 回 : 11 節)

(う) の項で見た線型写像の具体的な記述を用いると, 線型写像 f の全射性や単射性が, 次のように記述できることが分かります.

いま, 写像 f が全射とは,

$$\mathrm{Im}\, f = W$$

となることでしたが, (21) 式から, これは, $W \cong \mathbb{R}^m$ における「$\boldsymbol{\eta}$ 方向」$\mathbb{R}^{m-r}$ が存在しないことと同値であることが分かります. したがって,

線型写像 $f : V \to W$ が全射となるための条件

$$
\begin{aligned}
f : V \to W \text{ が全射となる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = W \\
&\Longleftrightarrow \quad m = r
\end{aligned}
\tag{24}
$$

となることが分かります. また, 写像 f が単射とは, 勝手な元 $\mathbf{w} \in W$ に対して,

$$
{}^{\#} f^{-1}(\mathbf{w}) \leq 1
$$

となることでしたが,[23] (22) 式, (23) 式から, これは, $V \cong \mathbb{R}^n$ における「$\mathbf{y}$ 方向」$\operatorname{Ker} f \cong \mathbb{R}^{n-r}$ が存在しないことと同値であることが分かります. したがって,

線型写像 $f : V \to W$ が単射となるための条件

$$
\begin{aligned}
f : V \to W \text{ が単射となる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad n = r
\end{aligned}
\tag{25}
$$

となることが分かります.

特に, $m = n$ の場合には, **(24) 式の条件と (25) 式の条件は, 全く同じ条件になる**ことが分かりますから,

$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ のときの特殊事情

$$
\begin{aligned}
f : V \to W \text{ が単射となる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad f : V \to W \text{ が全射となる.} \\
&\Longleftrightarrow \quad f : V \to W \text{ が全単射となる.}
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すなわち, この場合には,**「f が全射である」ことさえ確かめられれば, あるいは,「f が単射である」ことさえ確かめられれば, 後は, 自動的に「f が全単射である」ことが結論できる**ことが分かります. また, このことを逆に考えれば,**「f が全単射でない」ということから,「f は全射でもなければ, 単射でもない」ということが自動的に結論できる**ことが分かります.

(お) 次元公式と行列の rank の意味 (第 8 回 : 11 節, 12 節)

さて, (21) 式, (23) 式から,

$$
\operatorname{Ker} f \;\cong\; \mathbb{R}^{n-r}, \quad \operatorname{Im} f \;\cong\; \mathbb{R}^r
$$

となることに注意して, 二つの線型空間の次元を足し算してみると,

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f &= (n - r) + r \\
&= n
\end{aligned}
$$

[23] ここで, 集合 $f^{-1}(\mathbf{w})$ の元の個数を ${}^{\#} f^{-1}(\mathbf{w})$ という記号を用いて表わしました.

$$= \dim_{\mathbb{R}} V$$

となることが分かります. したがって,

次元公式

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f \tag{26}$$

となることが分かりますが, (26) 式のことを**「次元公式」**と呼んだりします.

また, A を m 行 n 列の行列として, 線型写像 f として, 行列 A を掛け算する写像

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

を考えてみると,

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, f_A \cong \mathbb{R}^r \tag{27}$$

となることが分かりますが, もともと, r は,

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように, 行列 A に基本変形を施したときに対角線上に残った 1 の数であったことに注意して, (27) 式の両辺の次元を考えてみると,

行列 A の rank の意味

$$\mathrm{rank}\, A = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, A \tag{28}$$

となることが分かります.

8 行列の対角化の問題

「行列の標準形の問題」のうち, (ii) の場合には, すなわち, $P = Q$ と取らなければいけない場合には, これまでの知識だけでは, まだ問題が解決していないので, (i) の場合とは異なり, **「行列の標準形の問題」の解決を目指す**ということが主な目標となります. 一般には,「見やすい形」の行列として「対角行列」が取れるとは限らないのですが, 一般の場合を考える場合にも,「見やすい形」の行列として「対角行列」を取った場合が model case となるので, まずは, この場合をきちんと理解することが大切になります.

(あ) 行列の対角化の問題 (第 9 回 : 3 節)

「行列の標準形の問題」のうち, $P = Q$ と取らなければいけない場合で, かつ,「見やすい形」の行列として「対角行列」を取った場合を「行列の対角化の問題」と言います. これを数学的に表現すれば,

行列の対角化の問題

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{29}$$

となるような対角行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

ということになります.

「行列の対角化の問題」を解決するためのアイデアは, (29) 式の両辺に左から P を掛け算して,

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = \Lambda \implies AP = P\Lambda} \tag{30}$$

という形に書き直して考えるということと, **(30) 式が「行列 P の列ベクトルに対して何を意味しているのか」ということを考える**ということです. 一般のサイズの正方行列の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では, A が 3 行 3 列の行列である場合に説明することにします.

いま, 対角行列 Λ を,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と表わし, 行列 P の列ベクトルを,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

と表わすことにします. すると, (29) 式は,

「行列の対角化も問題」を解決するためのアイデア ((29) 式の書き直し)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = \Lambda \implies\ & AP = P\Lambda \\ \iff\ & A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ \iff\ & \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{p}_1 & \lambda_2\mathbf{p}_2 & \lambda_3\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \\ \iff\ & \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \lambda_3\mathbf{p}_3 \end{cases} \end{aligned} \tag{31}$$

というように書き直せることが分かります. したがって, (31) 式から, **「行列の対角化の問題」を解決するためには, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ として,**

$$\boldsymbol{A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}} \tag{32}$$

という形の連立一次方程式を考察すると良さそうなことが分かります.

(い) 固有値と固有ベクトル (第 6 回 : 3 節, 第 9 回 : 3 節)

一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ として,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{33}$$

という連立一次方程式を考えてみます.[24] このとき, (33) 式の連立一次方程式が, 自明でない解, すなわち, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つときに, 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を行列 A の**固有値**と呼びます. また, 固有値 λ に対して, (33) 式を満たすようなベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ を行列 A の **(固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対する) 固有ベクトル**と呼び, (固有値 λ に対する) 固有ベクトル全体の集合

行列 $\boldsymbol{A}$ の (固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対する) 固有ベクトル空間

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n |\ A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

を行列 A の **(固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対する) 固有ベクトル空間**と呼びます.

そこで, いま, (33) 式を,

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{34}$$

というように書き換えてみます. ここで, もし, $(\lambda I - A)$ という行列に逆行列が存在すると仮定すると, (34) 式の両辺に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛け算することで,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\lambda I - A)^{-1}\mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (34) 式の解は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ しか存在しないことが分かりますから, $\lambda \in \mathbb{C}$ は行列 A の固有値ではないことが分かります. すなわち,

$$(\lambda I - A) \text{ が正則行列である.} \implies \lambda \in \mathbb{C} \text{ は行列 } A \text{ の固有値ではない.} \tag{35}$$

となることが分かります. したがって, (35) 式の主張の対偶を考えてみると,

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ が行列 } A \text{ の固有値である.} \implies (\lambda I - A) \text{ は正則行列でない.} \tag{36}$$

となることが分かります. さらに,「線型写像の大まかな性質」を用いて議論すると, (36) 式の主張の逆も成り立つことが分かり,

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値であるための条件

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C} \text{ が行列 } A \text{ の固有値である.} &\iff (\lambda I - A) \text{ は正則行列でない.} \\ &\iff \det(\lambda I - A) = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

となることが分かります.

[24]もちろん, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ という設定でも, 同様の考察をすることができます. どちらの設定で考察するのかということは, **行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ として複素数が登場するかどうか**ということに係わっています. すなわち, 一般には, **行列 $\boldsymbol{A}$ が実数行列だとしても, 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ は複素数になりえます**から, このような場合に, (33) 式の連立一次方程式の $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を考えるためには, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ というように, 複素数の世界に設定を拡張して考える必要が出てくるわけです.

一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, t を変数として,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(t) = \det(tI - A) \tag{38}$$

という式で定まる n 次の多項式 $\varphi_A(t)$ を行列 A の**特性多項式**と呼びます. 特性多項式という概念を用いると, (37) 式から,

行列 A の固有値の特徴づけ

$\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値である. $\iff$ $\varphi_A(\lambda) = 0$

となることが分かります. すなわち, **行列 A の固有値は「特性多項式 $\varphi_A(t)$ の零点」として特徴づけられる**ことが分かります. よって, 与えられた正方行列 A の固有値を求めるためには,

行列 A の固有値を求める方法

(i) 行列式を計算して, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を求める.

(ii) $\varphi_A(t) = 0$ という方程式を解いて, 行列 A の固有値を求める.

というような計算をすれば良いことが分かります. こうして, 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ が求まってしまえば, **$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ は既知の数となります**から, 後は, それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解くことにより, 対応する固有ベクトルがすべて求まることになります.

以上から,「行列の対角化の問題」を解決するために,

「行列の対角化の問題」を解決する戦略

(i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める. ($\Longrightarrow$ 行列 A の固有値が求まる.)

(ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて,

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}\ \}$$

を求める. ($\Longrightarrow$ 行列 A の固有ベクトルが求まる.)

(iii) $V(\lambda)$ たちの中から, 適当にベクトル $\mathbf{p}_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を取り出して, 正則行列 P を作る.

という戦略を立てることができることが分かります.

(う) 直和 (第 9 回 : 8 節)

さて, 7 節では, 線型写像 $f : V \to W$ の大まかな様子を調べるために,「上手い番地割り」のもとで, 線型空間 V や W を,

$$\begin{aligned} V &\cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\ W &\cong \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \end{aligned}$$

というように, 最初の r 次元の「方向」$\mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 次元の「方向」$\mathbb{R}^{n-r}$ に, あるいは, 最初の r 次元の「方向」$\mathbb{R}^r$ と残りの $(m-r)$ 次元の「方向」$\mathbb{R}^{m-r}$ に分解して考えるということをしました.

このように, **与えられた線型空間 V をいくつかの線型部分空間の「方向」に分解する**ことを, 一般に, 線型空間 V の**「直和分解」**と言います. ただし, 線型空間 V がいくつかの「方向」に分解するということを直接表現しようとすると, 少しゴタゴタしてしまいますから, **そうした分解があれば, 線型空間 V の元も「成分分解」することになる**ということに注目して, 次のように,「直和」の概念を定義するのが普通です.

一般に, V を線型空間, $W_1, W_2, \cdots, W_m \subset V$ を V の線型部分空間として,

線型空間 V が線型部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ の直和となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_m$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2 \in W_2$, $\cdots$, $\mathbf{u}_m \in W_m$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2 \in W_2$, $\cdots$, $\mathbf{u}_m \in W_m$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_m \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \cdots = \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされるときに, 線型空間 V は線型部分空間 W_1, W_2, $\cdots$, W_m の**直和**であると言います. また, このとき, 記号で,

線型部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ による線型空間 V の直和分解

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \tag{39}$$

というように表わして, (39) 式の分解を線型部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ による線型空間 V の**直和分解**と呼びます.

(え) 固有ベクトル空間分解 (第 9 回 : 9 節)

さて, 一般に, 一般に, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^n$ として,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

とするとき, 行列 P が正則行列となるための条件を,

行列 P が正則行列となるための条件

$$P \text{ が正則行列になる.} \iff \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\} \text{ が } \mathbb{C}^n \text{ の基底になる.} \tag{40}$$

というように言い換えることができることが分かります. したがって, (40) 式から, **「行列 A の対角化の問題」は「行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底を求める問題」であると解釈することができる**ことが分かります.

このことに注意すると,「行列 A の対角化の問題」を, 座標軸の取り方に依らない形で表現することができることが分かります. すなわち,

「行列 A の対角化の問題」の言い換え

$P^{-1}AP = \Lambda$ となる対角行列 Λ と正則行列 P が存在する.

$\iff$ $\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$ と直和分解する.

というように言い換えられることが分かります. また,「行列の対角化の問題」を解決する戦略も,

「行列の対角化の問題」を解決する戦略の精密化

(i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める. ($\Longrightarrow$ 行列 A の固有値が求まる.)

(ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて,

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

を求める. ($\Longrightarrow$ 行列 A の固有ベクトルが求まる.)

(iii) **それぞれの固有ベクトル空間 $V(\lambda)$ の基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて並べることで, 正則行列 P を作る.**

というように精密化できることが分かります. ここで現われた

固有ベクトル空間分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$$

という直和分解を**固有ベクトル空間分解**と呼びます.

9 内積を持つ線型空間

さて, 8 節では,「行列の対角化の問題」について触れましたが, 一般には,「行列の対角化の問題」がいつでも解決するとは限りません. ところが, **物理学や工学など様々な分野で頻繁に登場する行列で,「行列の対角化の問題」が必ず解決するということが理論的に保証される行列が存在します.** その代表例が, **対称行列**や**エルミート行列**です. これらの行列に対しては, **いつでも「対角化の問題」が解決する**ことが分かるだけでなく, **対角化を実現する正則行列 P として直交行列やユニタリー行列が取れる**ことも分かります.

皆さん良くご存じのように, $\mathbb{R}^n$ というユークリッド空間上では, ベクトル同士の内積を考えることができます. すなわち, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して, ベクトル $\mathbf{u}$ の長さ $||\mathbf{u}||$ や, 二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ がなす角度を考えることができます. 以下で見るように, **「直交行列による対称行列の対角化」**や**「ユニタリー行列によるエルミート行列の対角化」**ということの意味をより良く理解するためには, **$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ を, 単に,「足し算」や「スカラー倍」のできる「線型空間」であると考えるのではなく, さらに「内積」という構造も定まった「内積を持つ線型空間」であると考えて,「基底」や「線型写像」や「直和分解」などといった概念を「内積」との関係をもとに見直してみる**ということが重要なポイントになります.

(あ) 対称行列 (あるいは, エルミート行列) (第 10 回 : 2 節)

一般に, n 行 n 列の実数行列 A が,

対称行列の定義式

$$ {}^tA = A $$

という条件を持たすときに, 行列 A が**対称行列**と呼びます.

そこで, いま, $\mathbb{R}^n$ の二つのベクトル

$$ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n $$

に対して, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の間の内積を,

$\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド内積

$$ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{41} $$

という記号を用いて表わすことにします. この $\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド内積を用いると, n 行 n 列の実数行列 A に対して, その**転置行列** ${}^tA$ を考えるということの意味を,

転置行列を特徴付ける式

$$ \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, {}^tA\mathbf{v} \rangle, \quad {}^\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{42} $$

というように, 線型写像の立場から表現できることが分かります. 特に, ${}^tA = A$ となる場合を考えると,

対称行列の特徴付け

$$ A \text{ が対称行列} \iff \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle, \quad {}^\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{43} $$

という形で対称行列を特徴付けることができることが分かります. この (43) 式が, 対称行列を考えるということの意味を,「内積を持つ線型空間」という視点から見直したものであるということになります.

全く同様に, $\mathbb{C}^n$ の二つのベクトル

$$ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n $$

に対して, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の間の**エルミート内積**を,

$\mathbb{C}^n$ 上の標準的なエルミート内積

$$ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n} $$

という記号を用いて表わすことにします.[25] この $\mathbb{C}^n$ 上の標準的なエルミート内積を用いると, n 行 n 列の複素数行列 A に対して, その**随伴行列** ${}^t\bar{A}$ を考えるということの意味を,

随伴行列を特徴付ける式

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, {}^t\bar{A}\mathbf{v}), \quad {}^\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \tag{44}$$

というように, 線型写像の立場から表現できることが分かります. 一般に, n 行 n 列の複素数行列 A が,

エルミート行列の定義式

$$A = {}^t\bar{A}$$

という条件を持たすときに, 行列 A を**エルミート行列**と呼びますが, (44) 式において, 特に, ${}^t\bar{A} = A$ となる場合を考えると,

エルミート行列の特徴付け

$$A \text{ がエルミート行列} \iff (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v}), \quad {}^\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \tag{45}$$

という形でエルミート行列を特徴付けることができることが分かります. この (45) 式が, エルミート行列を考えるということの意味を,「(エルミート) 内積を持つ ($\mathbb{C}$ 上の) 線型空間」という立場から見直したものであるということになります.

(い) 対称行列 (あるいは, エルミート行列) の基本的な性質 (第 10 回 : 2 節)

さて, (45) 式を用いると, エルミート行列の固有値や固有ベクトルに関する基本的な性質が, 次のようにして分かります.

いま, エルミート行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, λ に対応するゼロでない固有ベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ を, 勝手にひとつ取ってきます. このとき, 固有ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ として, (45) 式を適用してみることで,

エルミート行列の持つ基本的な性質 (その１)

$$A \text{ がエルミート行列} \implies A \text{ のすべての固有値は実数} \tag{46}$$

となることが分かります. すなわち, **エルミート行列は, 一般には, 複素数を成分に持つ行列であるにもかかわらず, その固有値は必ず実数になる**ことが分かります.[26]

[25] ここで, 不幸なことに, z と w のうちどちらに複素共役「$^-$」を付けてエルミート内積を定めるのかという慣習が, 数学と物理とでは逆になっています. この演習では, 一応, 数学の慣習に従うことにしましたが, 物理の慣習の方に馴染みがあるという方は, そちらの慣習に読み替えて下さい. また, 後の議論でいらない混乱をするといけないので, $\mathbb{R}$ 上のユークリッド内積に対しては $\langle\ ,\ \rangle$ という記号を用い, $\mathbb{C}$ 上のエルミート内積に対しては $(\ ,\ )$ という記号を用いるというように, 二種類の内積を区別して表わすことにしました.

[26] 量子力学においては, 物理量は「エルミート行列」(= エルミート作用素) により記述されることになりますが, (46) 式の事実は, 量子力学において,「物理量の観測値は必ず実数になる」という事実の理論的な保証を与えることになります.

そこで, エルミート行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, λ に対応する固有ベクトル空間を,

エルミート行列 A の (固有値 λ に対応した) 固有ベクトル空間

$$V(\lambda)_{\mathbb{C}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

という記号を用いて表わすことにします.[27] このとき, エルミート行列 A の相異なる固有値が二つ以上存在すると仮定して, 二つの相異なる固有値 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda \neq \mu)$ に対して, それぞれの固有値に対応した固有ベクトル

$$\mathbf{u} \in V(\lambda)_{\mathbb{C}},\ \mathbf{v} \in V(\mu)_{\mathbb{C}}$$

を, 勝手にひとつずつ取ってきて, (45) 式を適用してみることで, **エルミート行列の異なる固有値に対応する固有ベクトル空間は互いに直交する**ということ, すなわち,

エルミート行列の持つ基本的な性質 (その２)

$$\lambda \neq \mu \implies V(\lambda)_{\mathbb{C}} \perp V(\mu)_{\mathbb{C}} \tag{47}$$

となることが分かります.[28]

いま, **「実数を成分に持つ対称行列」は「実数を成分に持つエルミート行列」である**とみなすこともできるということに注意すると, (46) 式の主張から,

対称行列の持つ基本的な性質 (その１)

$$A\ \text{は対称行列} \implies A\ \text{のすべての固有値は実数} \tag{48}$$

となることが分かります. すなわち, **対称行列に対する対角化の問題を考える上では,「複素数の世界」に考察を広げて考える必要はなく, 固有値や固有ベクトルなども,「実数の世界」でだけ考えれば十分である**ということが分かります. そこで, 対称行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, λ に対応する固有ベクトル空間を,

対称行列 A の (固有値 λ に対応した) 固有ベクトル空間

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

という記号を用いて表わすことにします. このとき, 前と同様に, 対称行列 A の相異なる固有値が二つ以上存在すると仮定して, 二つの相異なる固有値 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda \neq \mu)$ に対して, それぞれの固有値に対応した固有ベクトル

$$\mathbf{u} \in V(\lambda),\ \mathbf{v} \in V(\mu)$$

[27] ここで, $\mathbb{C}^n$ の中で固有ベクトル空間を考えているということを強調するために,「$_{\mathbb{C}}$」という添え字を付けて表わすことにしました.

[28] こちらも, 量子力学における「波動関数の確率解釈」を考える上での理論的な保証を与えることになります.

を, 勝手にひとつずつ取ってきて, (43) 式を適用してみることで, **対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトル空間は互いに直交する**ということ, すなわち,

対称行列の持つ基本的な性質 (その２)

$$\lambda \neq \mu \implies V(\lambda) \perp V(\mu) \tag{49}$$

となることが分かります.

(う) 直交行列 (あるいは, ユニタリー行列) (第 10 回 : 3 節)

一般に,

直交行列の定義式

$${}^tPP = I \tag{50}$$

となるような n 行 n 列の正方行列 P を**直交行列**と呼びます. 特に, (50) 式より, 直交行列 P は正則行列であり, その逆行列は,

$$P^{-1} = {}^tP \tag{51}$$

という簡単な形で与えられることが分かります. このように**逆行列を簡単に求めることができる**ということが, 実際の計算にあたっては, **直交行列を用いて対角化をする**ということの直接のご利益になります.

次に, こうした直交行列を考えるということの意味を「内積を持つ線型空間」という立場から見直してみます. いま, n 行 n 列の行列 P に対して,

行列 P の列ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ と表わす

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

というように, 行列 P の列ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ と表わすことにします. このとき, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド内積は, 行列の積を用いて,

$\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド内積 (行列の積を用いた表示)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {}^t\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

というように表わせるということに注意して, ${}^tPP$ という行列の行列成分を求めてみると,

$${}^tPP = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_n \rangle \\ \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_n \rangle \end{pmatrix} \tag{52}$$

というように表わされることが分かります.

一般に, $\mathbb{R}^n$ のいくつかのベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_L \in \mathbb{R}^n$ が,

正規直交系の定義式

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, L) \tag{53}$$

という条件を満たすときに, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_L\}$ を**正規直交系**と呼びます. 正規直交系 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_L\}$ は, 常に線型独立になることが分かりますが, 特に, $L = n$ のときには, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底になることも分かります. このように, 正規直交系からなる基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の**正規直交基底**と呼びます. これらの言葉を用いると, (52) 式より, P が直交行列となる条件を,

直交行列を考えることの意味（その１）

P が直交行列 $\iff$ P の列ベクトル $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる.

というように言い換えることができることが分かります.

また, 勝手なベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, {}^tPP\mathbf{v} \rangle$$

と表わせることに注意すると,

直交行列を考えることの意味（その２）

$$ {}^tPP = I \iff \langle P\mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad {}^\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

というように言い換えられることが分かります. すなわち, 直交行列とは, **内積を保つような線型写像を表わす行列**であることが分かります.

以上から,「内積を持つ線型空間」という視点から見直すことで, 直交行列の条件を,

直交行列の特徴付け

P が直交行列となる. $\iff$ P の列ベクトルが $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる.
$\iff$ P は $\mathbb{R}^n$ の内積を保つ線型写像を定める.

というように言い換えられることが分かります.

上では, $\mathbb{R}^n$ という「$\mathbb{R}$ 上の線型空間」をもとにして, 直交行列について説明しましたが, $\mathbb{R}^n$ の代わりに $\mathbb{C}^n$ という「$\mathbb{C}$ 上の線型空間」を考えて, $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の代わりに $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積 $(\ ,\ )$ を考えることで, $\mathbb{C}^n$ に対して, 全く同様の議論をすることもできます.

一般に,

ユニタリー行列の定義式

$$ {}^t\overline{U}U = I \tag{54} $$

となるような n 行 n 列の複素行列 U を**ユニタリー行列**と呼びます．このとき, $\mathbb{C}^n$ を「(エルミート) 内積を持つ ($\mathbb{C}$ 上の) 線型空間」であると考えて, $\mathbb{R}^n$ の場合と同様な議論をしてみると, U がユニタリー行列となる条件を,

ユニタリー行列の特徴付け

U がユニタリー行列となる．
$\iff$ U の列ベクトルが $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となる．
$\iff$ U は $\mathbb{C}^n$ の内積を保つ線型写像を定める．

というように言い換えることができることが分かります．

(え) 内積を持つ線型空間 (第 10 回：11 節)

皆さん良くご存じのように, $\mathbb{R}^3$ のようなユークリッド空間上では, ユークリッド内積を考えることにより, **「ベクトルの長さ」**や**「二つのベクトルの間の角度」**といった概念を意味付けることができます．こうした内積の概念は, 一般の線型空間にも拡張して考えることができ, 内積をひとつ定めることによって, ユークリッド空間の場合と同様に, **「線型空間の元の長さ」**や**「二つの元の間の角度」**といった概念を意味付けることができるようになります．

一般に, $\mathbb{R}$ 上の線型空間 V に対して,

$$ \langle\ \ ,\ \ \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R} $$

という写像が,

$\mathbb{R}$ 上の線型空間 V 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle_V$ の条件

(イ) 双線型性：勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}+\mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle_V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V + \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle_V \\ \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V = c\cdot\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{v}'\rangle_V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}'\rangle_V \\ \langle \mathbf{u}, c\mathbf{v}\rangle_V = c\cdot\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V \end{cases}$$

(ロ) 対称性：勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して, 次が成り立つ.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_V$$

(ハ) 正値性：勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_V \geq 0$$

となり, かつ, 次が成り立つ.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_V = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という三つの条件を満たすとき, $\langle\ ,\ \rangle_V$ を線型空間 V 上の**内積**と呼びます.[29] 特に, (ハ) という条件から, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して, $\mathbf{u}$ **の長さ**を,

内積を持つ線型空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ の元 $\mathbf{u} \in V$ の長さ

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_V}$$

という式によって定めることができることが分かります. また, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

Schwarz の不等式

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V| \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \tag{55}$$

となることが分かりますが, この (55) 式を **Schwarz の不等式**と呼びます. すると, (55) 式より,

内積と二つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のなす角度の間の関係

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_V = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos\theta \tag{56}$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することが分かりますから, このような実数 θ として, **二つの元 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角度**が定義できることが分かります.

いま, $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ を内積を持つ ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間とします. このとき, 標準的な

[29] 後の議論で余計な混乱を生じないように, 線型空間 V 上の内積を $\langle\ ,\ \rangle_V$ というように添え字を付けて表わすことにしました.

ユークリッド内積を持つユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n})$ の場合と全く同様に, V のいくつかの元 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_L \in \mathbb{V}$ が,

正規直交系の定義式

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_V = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, L)$$

という条件を満たすときに, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_L\}$ を**正規直交系**と呼びます. 正規直交系 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_L\}$ は, 常に線型独立になることが分かりますが, 特に, $L = n$ のときには, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ は V の基底になることも分かります. このように, 正規直交系からなる基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を V の**正規直交基底**と呼びます. 正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を用いて線型空間 V に「番地割り」して考えることにすると, 内積の構造まで込めて,

正規直交基底を用いると内積の構造まで込めて V と $\mathbb{R}^n$ を同一視できる

$$(V, \langle\ ,\ \rangle_V) \cong (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n})$$

というように同一視ができることが分かります. このことは, **一見, とても抽象的に見える線型空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ も, ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n})$ から座標軸を消し去った「真っ直ぐな空間」としてイメージすることができる**ということを意味しています. 特に, **線型空間 V の元の「長さ」や二つの元のなす「角度」も, ユークリッド空間上のベクトルの「長さ」や二つのベクトルのなす「角度」としてイメージすることができる**ということが分かります.

上では, $\mathbb{R}$ **上の線型空間に対する内積**を考えましたが, $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積を一般化して, $\mathbb{C}$ **上の線型空間に対する内積**を考えることもできます. すなわち, $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $V_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$(\ ,\ )_{V_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

という写像が,

$\mathbb{C}$ 上の線型空間 $V_{\mathbb{C}}$ 上の内積 $(\ ,\ )_{V_{\mathbb{C}}}$ の条件

(イ) "双線型性" : 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V_{\mathbb{C}}$ と勝手な複素数 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} (\mathbf{u}+\mathbf{u}', \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} + (\mathbf{u}', \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} \\ (\zeta\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} = \zeta \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{v}')_{V_{\mathbb{C}}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} + (\mathbf{u}, \mathbf{v}')_{V_{\mathbb{C}}} \\ (\mathbf{u}, \zeta\mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} = \bar{\zeta} \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} \end{cases}$$

(ロ) 対称性 : 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{\mathbb{C}}$ に対して, 次が成り立つ.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}} = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{V_{\mathbb{C}}}}$$

(ハ) 正値性 : 勝手な元 $\mathbf{u} \in V_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_{\mathbb{C}}} \geq 0$$

となり, かつ, 次が成り立つ.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_{\mathbb{C}}} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という三つの条件を満たすときに, $(\ ,\ )_{V_{\mathbb{C}}}$ を線型空間 $V_{\mathbb{C}}$ 上の**内積**と呼びます. ここで, (イ) という条件では, $\mathbf{u} \in V_{\mathbb{C}}$ を勝手にひとつ固定したときに,

$$(\mathbf{u},\ )_{V_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

という写像は線型写像ではなく, 勝手な複素数 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して, ζ 倍を外に出すときに, $\bar{\zeta}$ 倍という複素共役に化けるので, (イ) という条件を「" "」を付けて,「"双線型性"」というように表現しました.[30] また, (ロ) という条件から, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_{\mathbb{C}}} \in \mathbb{R}$$

となることが分かるので, (ハ) という条件が意味を持つことに注意して下さい. これより, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V_{\mathbb{C}}$ に対して, $\mathbf{u}$ **の長さ**を,

内積を持つ線型空間 $(V_{\mathbb{C}}, (\ ,\ )_{V_{\mathbb{C}}})$ の元 $\mathbf{u} \in V_{\mathbb{C}}$ の長さ

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_{\mathbb{C}}}}$$

という式によって定めることができます. さらに, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_{\mathbb{C}}$ に対して,

[30] こうした「線型写像もどき」の写像のことを**反線型写像** (anti-linear map) と呼んだりします. また, (あ) の項でも注意しましたが, 不幸なことに, (イ) という条件において, 第一成分に対して反線型性の条件を課すのか, 第二成分に対して反線型性の条件を課すのかという慣習が, 数学と物理では逆になっています. ここでは, 数学の慣習に従うことにしましたが, 物理の慣習に慣れている方は, そちらの慣習に読み替えて理解して下さい.

Schwarz の不等式

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_{\mathbb{C}}}| \le ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \tag{57}$$

となることが分かりますが, この (57) 式も **Schwarz の不等式**と呼ばれています.

(お) 直交補空間 (第 10 回 : 5 節)

一般に, 線型空間 V とその線型部分空間 $W \subset V$ に対して,

$$V = W \oplus W'$$

となるような線型部分空間 $W' \subset V$ を (線型空間 V における) 線型部分空間 W の**補空間**と呼びます. 与えられた線型部分空間 $W \subset V$ に対して, 一般には, W の補空間 W' の取り方は色々とあり, 一意的に定まるとは限りませんが, V が内積を持つ線型空間の場合には, 次のように,「W に直交する方向」として, W の補空間をひとつ定めることができます.

いま, $(V, \langle\ \ ,\ \ \rangle_V)$ を内積を持つ線型空間として, V の線型部分空間 $W \subset V$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, W のすべての元と直交するような V の元全体の集合

線型部分空間 W の直交補空間

$$W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_V = 0,\ {}^{\forall}\mathbf{w} \in W\ \}$$

を考えると, $W^{\perp} \subset V$ も V の線型部分空間になることが分かりますが, こうして定まる線型部分空間 $W^{\perp}$ を (線型空間 V における) **W の直交補空間**と呼びます. 直交補空間を用いると,

線型部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ による V の直和分解

$$V = W \oplus W^{\perp} \tag{58}$$

というように, 線型空間 V は「W の方向」と「W に直交する方向」$W^{\perp}$ に直和分解されることが分かります.

(か) 直交行列による対称行列の対角化 (第 10 回 : 6 節, 7 節)

さて, 8 節の (え) の項では,「行列の対角化の問題」の座標軸の取り方に依らない表現として,「固有ベクトル空間分解」ということを述べましたが, 行列 A が対称行列の場合には, 実際に, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ が,

対称行列 A に関する $\mathbb{R}^n$ の固有ベクトル空間分解

$$\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)$$

というように, 対称行列 A の固有ベクトル空間の直和に分解することが分かります. したがって, それぞれの固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, L)$ の基底を勝手に

一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて並べることで, 行列 A を対角化するような正則行列 P が作れることが分かります.

ここで, **それぞれの固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)$, $(i=1,2,\cdots,L)$ の基底として**, 単なる基底ではなく, **正規直交基底を選んでくる**とどうなるかということを考えてみます. すると, (い) の項で述べたように,

対称行列の持つ基本的な性質 (その２)

$$i \neq j \implies V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j)$$

というように, それぞれの固有ベクトル空間は互いに直交することが分かりますから, **各 $V(\lambda_i)$ の正規直交基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて並べたもの $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる**ことが分かります. したがって, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ を列ベクトルとする行列 P は直交行列となることが分かります. 以上より, **行列 A が対称行列の場合には, 行列 A を対角化する正則行列 P として直交行列を取ることができる**ということが分かります.

全く同様に, 行列 A がエルミート行列の場合には, 数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ が,

エルミート行列 A に関する $\mathbb{C}^n$ の固有ベクトル空間分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\mathbb{C}} \oplus V(\lambda_2)_{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)_{\mathbb{C}}$$

というように, エルミート行列 A の固有ベクトル空間の直和に分解することが分かります. また, (い) の項で述べたように,

エルミート行列の持つ基本的な性質 (その２)

$$i \neq j \implies V(\lambda_i)_{\mathbb{C}} \perp V(\lambda_j)_{\mathbb{C}}$$

というように, それぞれの固有ベクトル空間は互いに直交することが分かりますから, **各 $V(\lambda_i)_{\mathbb{C}}$ の正規直交基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて並べたもの $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となる**ことが分かります. したがって, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ を列ベクトルとする行列 P はユニタリー行列となることが分かりますから, **行列 A がエルミート行列の場合には, 行列 A を対角化する正則行列 P としてユニタリー行列を取ることができる**ということが分かります.

(き) Gram-Schmidt の直交化法 (第 10 回 : 7 節)

さて, $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ を内積を持つ線型空間として, **V の勝手な基底を正規直交基底に作り変える**標準的な方法が知られています. 一般の場合でも, 考え方の本質は変わりませんから, 以下では,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 3$$

であるとして, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を, 勝手にひとつ取ってきたという場合に説明することにします.

そこで, まず, $\mathbf{e}_1$ の長さを 1 にすることを考えて,

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{||\mathbf{e}_1||}$$

と定めることにします. こうして, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ の代わりに, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ という基底を考えることにすれば, 取りあえず, $\mathbf{p}_1$ の長さは 1 となることが分かります.

次に, $\mathbf{e}_2$ を $\mathbf{p}_1$ と直交するように取り直すために, $a_1 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{e}_2 = a_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{f}_2 \tag{59}$$

というように, ベクトル $\mathbf{e}_2$ を「$\mathbf{p}_1$ 方向の成分」$a_1\mathbf{p}_1$ と「$\mathbf{p}_1$ に直交する方向の成分」$\mathbf{f}_2$ に分解することを考えてみます. そのために,

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 0$$

となることに注意して, $\mathbf{p}_1$ と (59) 式の両辺との間の内積を考えてみると,

$$a_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$$

となることが分かりますから, $\mathbf{e}_1$ は,

$$\mathbf{e}_2 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{f}_2$$

というように分解することが分かります. そこで,

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \cdot \mathbf{p}_1 \tag{60}$$

と定めると, $\mathbf{f}_2$ は $\mathbf{p}_1$ と直交することが分かりますから, 後は, $\mathbf{f}_2$ の長さを 1 にすることを考えて,

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{||\mathbf{f}_2||}$$

と定めることにします. こうして, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ の代わりに, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{e}_3\}$ という基底を考えることにすれば, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の長さは 1 で互いに直交することが分かります.

最後に, $\mathbf{e}_3$ を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ と直交するように取り直すために, ベクトル $\mathbf{e}_3$ を「$\mathbf{p}_1$ 方向の成分」と「$\mathbf{p}_2$ 方向の成分」と「$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ に直交する方向の成分」$\mathbf{f}_3$ に分解することを考えると, 前と同様にして,

$$\mathbf{e}_3 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \cdot \mathbf{p}_1 + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{f}_3$$

というように分解することが分かります. そこで,

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \cdot \mathbf{p}_1 - \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \cdot \mathbf{p}_2 \tag{61}$$

と定めると, $\mathbf{f}_3$ は $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ と直交することが分かりますから, 後は, $\mathbf{f}_3$ の長さを 1 にすることを考えて,

$$\mathbf{p}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{||\mathbf{f}_3||}$$

と定めることにします. こうして, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{e}_3\}$ の代わりに, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ という基底を考えることにすれば, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ は長さが 1 で互いに直交することが分かりますから, めでたく, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ という正規直交基底が得られることが分かります.

一般に, 内積を持つ線型空間 V の勝手な基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ から始めて, 上のような形で正規直交基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ を構成する方法を **Gram-Schmidt の直交化法**と呼びます.

10 Jordan 標準形

さて, 9 節では, 対称行列やエルミート行列など, 行列 A が「内積と相性が良い行列」の場合には, 実際に「行列の対角化の問題」が解決できることを見ましたが, 一般には,「行列の対角化の問題」がいつでも解決するとは限りません. したがって,「行列の標準形の問題」をいつでも解決できるようにするためには,「見やすい形」の行列を「対角行列」より少しだけ一般化して考える必要があります. この目的のために導入されたのが **Jordan 標準形**であり, **「見やすい形」の行列として Jordan 標準形を採用することにより,「行列の標準形の問題」がいつでも解決できる**ことが分かります.

(あ) Jordan 標準形 (第 11 回 : 2 節, 第 12 回 : 2 節)

一般に, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

Jordan 細胞

$$J_n(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{n\,\text{コ}} \tag{62}$$

というように, 対角線上に λ が並び, その一段上だけに 1 が並んだような行列を **Jordan 細胞** (Jordan block) と呼びます. また, $n_1, n_2 \cdots, n_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ として,

Jordan 標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{63}$$

というように, 対角線上に Jordan 細胞がいくつか並んだような形の行列 J を **Jordan**

標準形と呼びます. 特に, $n = 1$ のときには, Jordan 細胞 $J_1(\lambda)$ は,

$$J_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$$

となりますから,

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$$

となる場合として, すなわち, **対角線上に並ぶ Jordan 細胞のサイズがすべて 1 である場合として, (63) 式は「対角行列」を含んでいる**ことに注意します.

さて, Jordan 標準形 J は対角行列になるとは限りませんが, 以下で見るように, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, 比較的簡単に J^m を計算することができます. その意味で, **Jordan 標準形も「見やすい形」の行列である**と考えることができます. いま, (63) 式から,

$$J^m = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1)^m & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2)^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k)^m \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから, J^m を求めるためには, Jordan 細胞 $J_n(\lambda)$ に対して, $J_n(\lambda)^m$ を求めることができればよいということが分かります. そこで,

「見やすい形」のベキ零行列

$$N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{ コ}}$$

として, (62) 式で与えられる Jordan 細胞 $J_n(\lambda)$ を,

Jordan 細胞

$$J_n(\lambda) = \lambda I + N \tag{64}$$

というように, **スカラー行列 λI と「見やすい形」のベキ零行列 N の和**の形に表わ

してみます. ここで, $N^2, N^3, \cdots$ を具体的に計算してみると,

$$N^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}, \ \cdots, \ N^{n-2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}},$$

$$N^{n-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}, \ N^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

というように, **N を掛ける毎に 1 が対角線の上の方へ一段づつ押し上げられて, 最後には,**

$$\boldsymbol{N^n = O}$$

となることが分かります. よって, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, 二項展開を用いることで,

$$\begin{aligned} J_n(\lambda)^m &= (\lambda I + N)^m \\ &= \lambda^m I + m\lambda^{m-1}N + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}\lambda^{m-n+1}N^{n-1} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \cdots & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}\lambda^{m-n+1} \\ 0 & \lambda^m & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & m\lambda^{m-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}} \end{aligned}$$

というように, 比較的簡単に $J_n(\lambda)^m$ を求めることができることが分かります.

(い) 最小多項式 (第 11 回：2 節, 3 節, 7 節)

さて, A を正方行列とすると, $A^2, A^3, \cdots$ などを考えることができますから, 勝手な多項式 $f(x)$ に対して, 変数 x のところに A という行列を代入して, $f(A)$ という行列を考えることができます. すなわち, 複素数を係数とする多項式全体の集合を,

複素数を係数とする多項式全体の集合

$$\mathbb{C}[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

として,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$$

に対して,

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

という行列を考えることができます. このとき, 実は, **行列 A の性質は, 行列 A を「根」に持つような多項式に注目することで, より良く理解することができる**ということが分かっています. すなわち, いま, 行列 A を「根」に持つような多項式全体の集合を,

行列 A を「根」に持つような多項式全体の集合

$$I_A = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O \}$$

という記号を用いて表わすことにすると, **行列 A の性質は I_A という集合に強く反映される**ということが分かっています. そこで, 行列 A の (固有な) 性質が「見やすい形」で表現されるような「上手い「番地割り」を見つける」という**「行列の標準形の問題」**を考える上でも, **I_A という集合の持つ性質をよく調べてみる**ということが大切になります.

行列 A が, 例えば,

$$A = J_n(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

というように「見やすい形」の行列のときには, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\lambda I + N) & (65) \\ &= f(\lambda) I + f'(\lambda) N + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} N^{n-1} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}} & (66) \end{aligned}$$

というように, 直接 $f(A)$ を計算することができますから, (66) 式から,

多項式 $f(x)$ が行列 A を「根」に持つための条件

$$\begin{aligned} f(A) = O &\iff f(\lambda) = f'(\lambda) = \cdots = f^{(n-1)}(\lambda) = 0 \\ &\iff f(x) \text{ は } (x-\lambda)^n \text{ で割り切れる.} \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

行列 A の最小多項式 (行列 A が Jordan 細胞のとき)

$$\psi_A(x) = (x-\lambda)^n$$

として, I_A は,

$$\begin{aligned} I_A &= \{\psi_A(x)g(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g(x) \in \mathbb{C}[x]\ \} \\ &= \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

というように記述できることが分かります.

行列 A が「見やすい形」の行列とは限らないときには, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, 直接, $f(A)$ を計算することは困難になりますが, この場合にも, 少し抽象的な議論を行なうことで, 次のように, I_A という集合を記述できることが分かります.

いま, **I_A に属する 0 でない多項式のうち, 次数が最も低い多項式**(のうちのひとつ) を $0 \neq \psi_A(x) \in I_A$ とします. このとき,

多項式 $f(x)$ が行列 A を「根」に持つための条件

$$f(A) = O \iff f(x) \text{ は } \psi_A(x) \text{ で割り切れる.}$$

となることが分かります. したがって, I_A は,

I_A の記述

$$\begin{aligned} I_A &= \{\psi_A(x)g(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g(x) \in \mathbb{C}[x]\ \} \\ &= \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \end{aligned} \tag{67}$$

というように記述できることが分かります. こうして得られる多項式 $\psi_A(x)$ を行列 A の**最小多項式**と呼びます.[31]

(う) Cayley-Hamilton の定理 (第 11 回 : 8 節)

(い) の項で見たように, 行列 A が「見やすい形」の行列のときには, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, 比較的簡単に行列 $f(A)$ を計算することができますから,

[31] 最小多項式 $\psi_A(x)$ は, 0 でない定数を掛け算するだけの不定性がありますが, こうした不定性を除くために, 最小多項式 $\psi_A(x)$ として, 変数 x に関する最高次の係数が 1 の多項式を考えるのが普通です.

$f(A)=O$ となるための多項式 $f(x)$ が満たすべき条件を直接調べることにより, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めることができます. 一方, 行列 A が「見やすい形」の行列とは限らないときには, 行列 $f(A)$ を直接計算することは困難になりますから, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めるためには別な工夫が必要になります. そのための工夫 (のひとつ) が **Cayley-Hamilton の定理に注目する**ということです.

いま, 勝手な正方行列 A に対して, 行列 A の特性多項式を,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(x)=\det(xI-A)$$

とします. このとき, **特性多項式 $\varphi_A(x)$ に A 自身を代入してみると,**

Cayley-Hamilton の定理

$$\boldsymbol{\varphi_A(A)=O}$$

というように, 常に零行列になるということが分かり, この事実を**Cayley-Hamilton の定理**と呼びます.

さて, Cayley-Hamilton の定理によれば,

Cayley-Hamilton の定理（言い換え）

$$\varphi_A(x)\in I_A$$

となることが分かりますから, (67) 式と合わせて, **最小多項式 $\psi_A(x)$ は特性多項式 $\varphi_A(x)$ を割り切るような多項式である**ということが分かります. この事実を用いると, 例えば, A が 3 行 3 列の行列の場合というように, **行列 A のサイズが余り大きくないときには, 特性多項式 $\varphi_A(x)$ を割り切るような多項式に行列 A を代入して, その結果が零行列 O になるかどうかを調べてみることで, 最小多項式を求めることができます**. 例えば, 行列 A の特性多項式が,

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda)^3$$

となったとすると, この時点で, 行列 A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ は,

$$(x-\lambda),\ (x-\lambda)^2,\ (x-\lambda)^3\in\mathbb{C}[x]$$

のうちのいずれかの多項式になることが分かります. そこで, 後は, それぞれの多項式に行列 A を順番に代入して, 例えば,

$$(A-\lambda I)\neq O,\ (A-\lambda I)^2\neq O,\ (A-\lambda I)^3=O$$

となったとすれば, 行列 A の最小多項式は,

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda)^3$$

となることが分かるというわけです.

(え) 「Jordan 標準形の存在」について (第 12 回：5 節)

さて, この節の最初でも述べたように, **「見やすい形」の行列として, 対角行列だけでなく, Jordan 標準形まで許す**ことにすると,

行列の標準形の問題

> 与えられた正方行列 A に対して,
>
> $$P^{-1}AP = \Lambda$$
>
> となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

という「行列の標準形の問題」はいつでも解決できることが分かります. すなわち, 勝手にひとつ与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, **行列 $\boldsymbol{A}$ を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ 上の線型写像**

$$\boldsymbol{L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$$

を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ の「上手い基底」が実際に存在するということが分かります. このことをきちんと確かめてみるためには, 行列 A の固有ベクトル空間の概念を少し一般化して,

行列 $\boldsymbol{A}$ の (固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応した) 一般固有ベクトル空間

> $V(\lambda)_{\text{gen}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda I)^m \mathbf{u} = \mathbf{0}$ となるような自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在する $\}$

という式によって定まる行列 A の**一般固有ベクトル空間**に注目して,

「Jordan 標準形の存在」を示すための基本的な戦略

> **(i) $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ が,**
>
> $$\boldsymbol{\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\text{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\text{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_N)_{\text{gen}}}$$
>
> **というように, 行列 $\boldsymbol{A}$ の一般固有ベクトル空間の直和に分解することを確かめる.**
>
> **(ii) それぞれの一般固有ベクトル空間 $\boldsymbol{V(\lambda_i)_{\text{gen}}}$ に対して,「上手い基底」を定めることを考える.**

という二つのステップを通して「行列の標準形の問題」を解決することを考えるということが基本的な戦略になります.

(お) 一般固有ベクトル空間分解 (第 13 回：5 節, 6 節, 8 節, 9 節, 10 節)

いま, n 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ の相異なる根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ とし, それぞれの根の重複度を $d_1, d_2, \cdots, d_L \in \mathbb{N}$ として, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を,

行列 A の最小多項式

$$
\begin{aligned}
\psi_A(x) &= (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\cdots(x-\lambda_L)^{d_L} \\
&= \prod_{i=1}^{L}(x-\lambda_i)^{d_i}
\end{aligned}
$$

というように表わすことにします．このとき,

$$
\frac{1}{\psi_A(x)}
$$

という有理関数の部分分数展開を考えて, $k=1,2,\cdots,L$ に対して,「$x=\lambda_k$ に対応した部分」を, それぞれ, ひとつの項にまとめて,

$$
\frac{1}{\psi_A(x)} = \frac{g_1(x)}{(x-\lambda_1)^{d_1}} + \frac{g_2(x)}{(x-\lambda_2)^{d_2}} + \cdots + \frac{g_L(x)}{(x-\lambda_L)^{d_L}} \tag{68}
$$

という形に表わすことにします．ここで,

多項式 $f_k(x)$ の定義式

$$
\begin{aligned}
f_k(x) &= \frac{\psi_A(x)}{(x-\lambda_k)^{d_k}} \\
&= \prod_{i\neq k}(x-\lambda_i)^{d_i}
\end{aligned}
$$

として, (68) 式の両辺の分母を払った式を考えると,

多項式 $p_k(x)$ の定義式

$$
p_k(x) = f_k(x)g_k(x), \quad (k=1,2,\cdots,L)
$$

として,

1 の分解

$$
1 = p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_L(x) \tag{69}
$$

という式が得られますが, (69) 式を **1 の分解**と呼びます．さらに, (69) 式の両辺に, $x=A$ を代入することで,

行列 P_k の定義式

$$
P_k = p_k(A), \quad (k=1,2,\cdots,L)
$$

として,

「単位行列の分解」

$$
I = P_1 + P_2 + \cdots + P_L \tag{70}
$$

という**「単位行列の分解」**が得られます.

そこで, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ に対して, (70) 式の両辺を $\mathbf{u}$ に施してみると,

ベクトル $\mathbf{u}_k$ の定義式

$$\mathbf{u}_k = P_k \mathbf{u}, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として, ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ が,

「単位行列の分解」を用いたベクトル $\mathbf{u}$ の分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_L \tag{71}$$

というように分解できることが分かります. このとき, それぞれのベクトル $\mathbf{u}_k$ は, 行列 A の固有値 λ_k に対応した一般固有ベクトルとなることが分かり, すなわち,

$$\mathbf{u}_k \in V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$$

となることが分かり, (71) 式から, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ は,

行列 A の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^n$ の直和分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\mathrm{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\mathrm{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)_{\mathrm{gen}} \tag{72}$$

というように, 行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することが分かります. この (72) 式の直和分解を, 行列 A の**一般固有ベクトル空間分解**と呼びます. また, それぞれの一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$ に対しても,

一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$ に対する経済的な表示

$$V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n |\ (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0} \ \} \tag{73}$$

というような経済的な表示が得られることも分かります. この (73) 式の表示をもとに, (72) 式の直和分解を考えることで,

行列 A が対角化可能であるための条件

行列 A は対角化可能である. $\Longleftrightarrow$ 最小多項式 $\psi_A(x)$ が重根を持たない.

となることも分かります.

(か) ベキ零行列の標準形 (第 12 回 : 7 節, 8 節, 9 節, 第 13 回 : 11 節)

さて, n 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ として, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して, 行列 A の固有値 λ_k に対応する一般固有ベクトル空間を,

一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ に対する経済的な表示

$$V(\lambda_k)_{\text{gen}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n |\ (A - \lambda_k I)^{d_k}\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \} \tag{74}$$

とすると,

線型部分空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ は行列 A を掛け算する操作に関して閉じている

$$\mathbf{v} \in V(\lambda_k)_{\text{gen}} \implies A\mathbf{v} \in V(\lambda_k)_{\text{gen}}$$

となることが分かります．すなわち, 線型部分空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ は行列 A を掛け算する操作に関して閉じていることが分かります．したがって, (72) 式の直和分解と合わせて考えると,**「行列 A を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像**

$$\boldsymbol{L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$$

を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような $\mathbb{C}^n$ の「上手い基底」を見つける問題」が, 線型写像 L_A を $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ 上に制限することによって得られる線型写像を,

$$L_A|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}} : V(\lambda_k)_{\text{gen}} \to V(\lambda_k)_{\text{gen}}$$

と表わすことにして,**「$V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ 上の線型写像 $L_A|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}}$ を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ の「上手い基底」を見つける問題」に帰着する**ことが分かります.

ここで, (74) 式の表示に注意すると, **$(A - \lambda_k I)$ という n 行 n 列の行列はベキ零行列となるとは限らないものの, $(A - \lambda_k I)$ という行列を掛け算することによって定まる線型写像**

$$\boldsymbol{L_{(A-\lambda_k I)} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$$

を, $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ 上に制限して得られる線型写像は「ベキ零な線型写像」になるということが分かります．すなわち, この線型写像を,

線型写像 N_k の定義式

$$N_k = L_{(A-\lambda_k I)}|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}} : V(\lambda_k)_{\text{gen}} \to V(\lambda_k)_{\text{gen}}$$

という記号を用いて表わすことにすると, (74) 式から,

線型写像 N_1 はベキ零な線型写像になる

$$(N_k)^{d_k} = O$$

となることが分かります．さらに, 線型空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ の勝手な基底に対して, 線型写像 $L_A|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}}$ の表現行列と線型写像 $N_k = L_{(A-\lambda_k I)}|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}}$ の表現行列はスカラー行列 $\lambda_k I$ の差しかないことに注意すると,**「$V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ 上の線型写像 $L_A|_{V(\lambda_k)_{\text{gen}}}$ を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ の「上手い基底」を見つける問題」が「$V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ 上のベキ零線型写像 N_k を Jordan 標準形**

という「見やすい形」で表現するような $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ の「上手い基底」を見つける問題」に帰着することが分かります.

以上から,「Jordan 標準形の存在」を確かめるためには, 後は, **勝手にひとつ与えられた線型空間 V と V 上のベキ零線型写像**

$$\boldsymbol{N : V \to V}$$

に対して, ベキ零線型写像 N を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような V の「上手い基底」が存在することを示せばよいということになります.

そこで, いま,

線型写像 N を施すことによって繋がった一連のベクトル

$$\mathbf{u}_0 \xmapsto{N\cdot} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xmapsto{N\cdot} \mathbf{u}_2 = N\mathbf{u}_1 \xmapsto{N\cdot} \cdots \xmapsto{N\cdot} \mathbf{u}_m = N\mathbf{u}_{m-1} \xmapsto{N\cdot} \mathbf{0} \tag{75}$$

というように, 線型写像 N を施すことによって繋がった一連のベクトルが見つかったとします. このとき, (75) 式は,

(75) 式の行列を用いた表現

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} N\mathbf{u}_m & N\mathbf{u}_{m-1} & \dots & N\mathbf{u}_0 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_m & \mathbf{u}_{m-1} & \dots & \mathbf{u}_0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1\,\text{コ}}\end{aligned} \tag{76}$$

と表わせることが分かります. さらに, $\{\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \cdots, \mathbf{u}_0\}$ は線型独立になることも分かります. よって, $\{\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \cdots, \mathbf{u}_0\}$ が生成する線型部分空間上で, 線型写像 N は $\{\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \cdots, \mathbf{u}_0\}$ という基底に関して,

$$J_{m+1}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1\,\text{コ}}$$

というひとつの Jordan 細胞の形で表現されることが分かります. したがって, **(75) 式のようにベキ零線型写像 N を施すことによって繋がった一連のベクトルを何組**

か見つけ, それらのベクトルをすべて集めてくることで, V の基底を定めることができれば, これらの基底に関して, ベキ零線型写像 N は,

「上手い基底」に関するベキ零線型写像 N の表現行列

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}$$

というように Jordan 標準形で表現されることが分かります. 実際, いつでもこのような基底を構成できることが分かり,「ベキ零行列に対する Jordan 標準形の存在」の問題は解決されることが分かります.

(き) Jordan 標準形を求めるには (第 12 回 : 4 節)

さて, 前項までの議論から,「見やすい形」の行列として Jordan 標準形を採用することにすると,

Jordan 標準形の問題

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = J \tag{77}$$

となるような Jordan 標準形 J と正則行列 P を見つけよ.

という形での「行列の標準形の問題」は, いつでも解決できるということが分かりますが, 与えられた正方行列 A に対して, 具体的に Jordan 標準形 J や正則行列 P を求めるためには,「行列の対角化の問題」のときと全く同様の考え方ができることが分かります. すなわち, **「Jordan 標準形の問題」を解決するためのアイデアは, (77) 式の両辺に左から P を掛け算して,**

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = J \implies AP = PJ} \tag{78}$$

という形に書き直して考えるということと, **(78) 式が「行列 P の列ベクトルに対して何を意味しているのか」ということを考える**ということです. 一般のサイズの正方行列の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では, A が 3 行 3 列の行列である場合に説明することにします.

そこで, いま, 正則行列 P の列ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ と書くことにして, 行列 P を,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

というように表わすことにして, 例えば,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

という場合を考えてみます. このとき, (77) 式は,

Jordan 標準形の問題 (特別な場合)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{79}$$

ということになりますが, P が正則行列であるという条件のもとで,

(79) 式の書き直し

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \lambda\mathbf{p}_3 \end{cases}$$

というように書き直せることが分かります. したがって, この場合には,

$$\begin{cases} (A-\lambda I)\,\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A-\lambda I)\,\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (A-\lambda I)\,\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \end{cases}$$

という連立一次方程式を順番に解くことによって, (79) 式を満たすような正則行列 P が求まることになります.

次に,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

という場合を考えてみます. このとき, (77) 式は,

Jordan 標準形の問題 (特別な場合)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{80}$$

ということになりますが, P が正則行列であるという条件のもとで,

(80) 式の書き直し

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} &\iff AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\iff A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \lambda\mathbf{p}_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

というように書き直せることが分かります. したがって, この場合には,

$$
\begin{cases} (A-\lambda I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A-\lambda I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \\ (A-\lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \end{cases} \tag{81}
$$

という連立一次方程式を順番に解くことによって, (80) 式を満たすような正則行列 P が求まることになります. ただし, この場合に注意しないといけないことは, 与えられたベクトル $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$
(A-\lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1
$$

という連立一次方程式が解を持つためには,

$$
\mathbf{p}_1 \in \mathrm{Im}(A-\lambda I) = \{(A-\lambda I)\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \mid \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3\ \}
$$

でなければならないということです. したがって,

$$
(A-\lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}
$$

という連立一次方程式の解全体の集合

$$
\mathrm{Ker}(A-\lambda I) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^3 \mid (A-\lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}\ \}
$$

を求めたときに, **$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ の基底を, 勝手にひとつ取ってきて, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\}$ と定めるのではなく, まず, $\mathrm{Im}(A-\lambda I)$ という集合を求めておいて, $\mathbf{p}_1$ を,**

$$
\boldsymbol{\mathbf{p}_1 \in \mathrm{Im}(A-\lambda I)}
$$

となるように選んでから, 次に, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\}$ が $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ の基底になるように $\mathbf{p}_3$ を選ぶ必要があります. このように, 少し注意しなければならない点はありますが, 基本的には (81) 式の連立一次方程式を順番に解くことによって, (80) 式を満たすような正則行列 P が求まることになります.

このように,「対角化の問題」のときと全く同様にして,「Jordan 標準形の問題」を解決することができます. ただし,「対角化の問題」のときとは違って, 一般には, 与えられた行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求めただけでは, 行列 A の Jordan 標準形 J を決定することはできず, 連立一次方程式の解の様子を調べながら, Jordan 標準形 J の形を決定しなければいけないという分だけ少し複雑になっています.

例えば, 3 行 3 列の行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ が,

$$\varphi_A(x) = (x-2)^3$$

であるとすると, この時点で, 行列 A の Jordan 標準形 J は,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という三つの行列のうちのいずれかであることが分かります. このとき, さらに, 固有ベクトル空間

$$\begin{aligned} V(2) &= \mathrm{Ker}(A-2I) \\ &= \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^3 \mid (A-2I)\mathbf{p} = \mathbf{0}\ \} \end{aligned}$$

を計算して, $V(2)$ の次元を求めたときに, $\dim_{\mathbb{C}} V(2) = 1$ なら $J = J_3$ となり, $\dim_{\mathbb{C}} V(2) = 2$ なら $J = J_2$ となり, $\dim_{\mathbb{C}} V(2) = 3$ なら $J = J_1$ となるというわけです.

(く) 最小多項式と「Jordan 標準形の問題」との関係 (第 11 回 : 5 節, 6 節, 第 12 回 : 3 節)

いま, A を正方行列, P を行列 A と同じサイズの正則行列としたときに, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P \tag{82}$$

となることが分かります. よって, (82) 式から,

I_A の共役不変性

$$I_{P^{-1}AP} = I_A$$

となることが分かりますから,

最小多項式 $\psi_A(x)$ の共役不変性

$$\psi_{P^{-1}AP}(x) = \psi_A(x) \tag{83}$$

となることが分かります.

この (83) 式を用いると, 与えられた正方行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めることで, 行列 A の Jordan 標準形 J に対して, ある程度の「当たり」を付けることができることが, 次のようにして分かります. いま, 行列 A の Jordan 標準形を J とすると,「Jordan 標準形の問題」はいつでも解決できるということから,

$$P^{-1}AP = J \tag{84}$$

となる正則行列 P が存在することが分かります. よって, (83) 式, (84) 式から,

$$\psi_J(x) = \psi_A(x) \tag{85}$$

となることが分かります. 一方, (い) の項でも注意したように, Jordan 標準形 J に対しては, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, $f(J)$ という行列を直接計算することができて, $f(J) = O$ となるための多項式 $f(x)$ が満たすべき条件を書き下してみることにより, $\psi_J(x)$ を求めることができます. そこで, 実際に計算を行なってみると, **Jordan 標準形 J の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ として, それぞれの固有値に対して, 最もサイズの大きな Jordan 細胞を $J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \cdots, J_{m_L}(\lambda_L)$ とすると,**

Jordan 標準形 J の最小多項式 $\psi_J(x)$

$$\boldsymbol{\psi_J(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_L)^{m_L}} \tag{86}$$

となることが分かります. よって, (85) 式と (86) 式を合わせて考えてみることで, **正方行列 A に対して, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めることにより, それぞれの固有値に対応する最もサイズの大きな Jordan 細胞の情報が得られる**ということが分かります. 特に, 行列 A が, 例えば, 3 行 3 列の行列など, サイズが小さい行列の場合には, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ (と特性多項式 $\varphi_A(x)$) を求めることで, 行列 A の Jordan 標準形を決定できることも分かります.

11　Jordan 標準形の応用例

さて, 10 節では, **「見やすい形」の行列として Jordan 標準形を採用することにより,「行列の標準形の問題」をいつでも解決できる**ことを見ましたが, Jordan 標準形の知識を用いてスッキリと理解することができる代表的な例として,「数列に対する定数係数の線型漸化式」と「関数に対する定数係数の線型微分方程式」があります.

(あ) 数列に対する定数係数の線型漸化式 (第 7 回 : 2 節, 4 節, 第 13 回 : 12 節)

一般に, 数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対する

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{87}$$

というような形の漸化式を**定数係数の線型漸化式**と呼びます. そこで, ここでは**「定数係数の線型漸化式の解法」を線型代数学の立場から見直してみる**ことにします. 一

般の定数係数の線型漸化式の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, ここでは, (87) 式の漸化式をもとにして説明してみることにします.

さて, (87) 式のような漸化式を線型代数学の立場から見直すためのアイデアは, **(87) 式の漸化式を「(a_{n-1}, a_{n-2}) から a_n が決まる」と読まないで,「わざわざ a_{n-1} を付け加えて」,「(a_{n-1}, a_{n-2}) から (a_n, a_{n-1}) が決まる」というように読み替えてみる**ということです. すなわち, (87) 式の漸化式を,

$$
\begin{aligned}
a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \iff & a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\
\iff & \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

というように書き直して考えてみるということです. 実際,

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

と表わすことにすると, (88) 式から, (87) 式の漸化式が,

定数係数の線型漸化式の行列による読み替え (3 項間漸化式の場合)

$$
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \qquad (89)
$$

というように読み直せることが分かります. すると, (89) 式の漸化式は, すぐに解くことができて,

行列で読み替えた定数係数の線型漸化式の一般解 (3 項間漸化式の場合)

$$
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad (90)
$$

となることが分かります.

全く同様にして, 一般の場合でも, **「定数係数の漸化式を満たす数列の一般項 a_n を求める問題」が「A^n という行列 A の n 乗を求める問題」に帰着する**ことが分かります. ここで, Jordan 標準形の知識を用いると,

$$
P^{-1}AP = J \qquad (91)
$$

となる Jordan 標準形 J と正則行列 P が存在することが分かりますから, (91) 式から, 行列 A は,

$$
A = PJP^{-1} \qquad (92)
$$

と表わせることが分かります．よって, (92) 式の両辺の n 乗を考えることで,

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

というように, A^n を求めることができることが分かります.

(い) 関数に対する定数係数の線型微分方程式 (第 7 回：2 節, 5 節, 第 13 回：12 節)

一般に, 関数 $f(x)$ に対する

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{93}$$

というような形の微分方程式を**定数係数の線型常微分方程式**と呼びます．そこで, ここでは**「定数係数の線型常微分方程式の解法」を線型代数学の立場から見直してみる**ことにします．一般の定数係数の線型常微分方程式の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, ここでは, (93) 式の微分方程式をもとにして説明してみることにします.

さて, (93) 式のような定数係数の線型常微分方程式を線型代数学の立場から見直すためのアイデアは, **(93) 式の微分方程式を「関数 $(f'(x), f(x))$ から $f''(x)$ が決まる」と読まないで, わざわざ, $f'(x)$ を付け加えて,「関数 $(f'(x), f(x))$ から $(f''(x), f'(x))$ が決まる」と読み替えてみる**ということです．すなわち, (93) 式の微分方程式を,

$$\begin{aligned} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 &\iff f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\ &\iff \begin{cases} f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\ f'(x) = f'(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{94}$$

というように書き直して考えてみるということです．いま,

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} \tag{95}$$

となることに注意すると, (94) 式, (95) から,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として, **(93) 式の微分方程式が,**

定数係数の線型常微分方程式の行列による読み替え (二階の方程式の場合)

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}} \tag{96}$$

というように, 一階の常微分方程式の形に書き直すことができることが分かります.

さらに,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{97}$$

と表わすことにすれば, (96) 式は,

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{98}$$

というように表わすことができますから, (98) 式から, **「定数係数の線型常微分方程式の解を求める問題」が「微分すると A 倍される関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります.

全く同様に, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ として,

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \tag{99}$$

という一般の定数係数の線型常微分方程式に対して, 同様の書き換えを行なってみると,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ f^{(n-2)}(x) \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{100}$$

として, **(99) 式の微分方程式が,**

定数係数の線型常微分方程式の行列による読み替え

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{101}$$

というように, 一階の常微分方程式の形に書き直すことができることが分かりますから, (101) 式から, **「定数係数の線型常微分方程式の解を求める問題」が「微分すると A 倍される関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります. さらに, (101) 式の微分方程式は, 行列の指数関数

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I + (xA) + \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + \cdots \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}A^n \end{aligned} \tag{102}$$

を導入することにより,

行列で読み替えた定数係数の線型常微分方程式とその一般解

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \iff F(x) = e^{xA}F(0) \tag{103}$$

というように具体的に解くことができることが分かります. よって, **「(99) 式の微**

分方程式を解く問題」が「(100) 式で与えられる正方行列 A に対して, 行列の指数関数 e^{xA} を求める問題」に帰着することが分かります.

ここで, (あ) の項と同様に, Jordan 標準形の知識を用いると,

$$P^{-1}AP = J \tag{104}$$

となる Jordan 標準形 J と正則行列 P が存在することが分かりますから, (104) 式から,

$$A^n = PJ^nP^{-1} \tag{105}$$

となることが分かります. よって, (105) 式の両辺に $\frac{x^n}{n!}$ を掛け算して, n について和を取ることで,

$$e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$$

というように, e^{xA} を求めることができることが分かります.

実際に, e^{xA} という行列の行列成分にどのような形の関数が現われるのかを知るためには, 行列 A の Jordan 標準形 J を具体的に求める必要がありますが, これは, 例えば, 次のようにして求めることができます. いま, 具体的に行列式を計算してみることで, (100) 式で与えられる行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ は,

(100) 式で与えられる行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{106}$$

という式によって与えられることが分かります. ここで, (99) 式と (106) 式を見比べてみると, **行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ は, 形式的には, (99) 式の微分方程式 (の左辺) において,**

$$\boldsymbol{f^{(i)}(x) \rightsquigarrow x^i, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)}$$

という置き換えをすることによって得られることが分かります. さらに, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は,

(100) 式で与えられる行列 A の最小多項式

$$\begin{aligned} \psi_A(x) &= \varphi_A(x) \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \end{aligned} \tag{107}$$

というように, **(100) 式で与えられる行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は, 常に, 特性多項式 $\varphi_A(x)$ と一致する**ということも分かります.

そこで, いま, 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ として, A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ が,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{L}(x - \lambda_i)^{m_i} \tag{108}$$

というように因数分解されるとします．このとき, (107) 式から, A の最小多項式 $\psi_A(x)$ も,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L}(x-\lambda_i)^{m_i} \tag{109}$$

というように表わされるということになります．すると, 10 節の (く) の項で見たように, 最小多項式 $\psi_A(x)$ は, それぞれの固有値に対応した最もサイズの大きな Jordan 細胞の情報を与えてくれますから, (109) 式から, 行列 A の Jordan 標準形には,

$$J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \cdots, J_{m_L}(\lambda_L) \tag{110}$$

という Jordan 細胞が登場することが分かります．そこで, これらの Jordan 細胞を並べた行列

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_L}(\lambda_L) \end{pmatrix} \tag{111}$$

を考えてみます．ここで, (108) 式の両辺の多項式の次数を比べてみると,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_L = n$$

となることが分かりますから, **正方行列 J のサイズは行列 A のサイズと同じになる**ことが分かります．よって, 行列 A の Jordan 標準形の中には, (110) 式の Jordan 細胞以外の Jordan 細胞が登場する余地はないことが分かりますから, 行列 A の Jordan 標準形は,

(100) 式で与えられる行列 A の Jordan 標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_L}(\lambda_L) \end{pmatrix} \tag{112}$$

という式によって与えられることが分かります．すなわち, **(100) 式で与えられる行列 A の Jordan 標準形には, それぞれの固有値 λ_i に対して, ちょうどひとつの Jordan 細胞 $J_{m_i}(\lambda_i)$ が登場する**ことが分かります．また, **これらの Jordan 細胞のサイズを求めるには, (108) 式のように, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を因数分解してみればよい**ことも分かりました．

いま, (112) 式から,

Jordan 標準形 J に対する指数関数

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_{m_1}(\lambda_1)} & & & \\ & e^{xJ_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_{m_L}(\lambda_L)} \end{pmatrix} \tag{113}$$

となることが分かりますから, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} を求めるためには, Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数 $e^{xJ_m(\lambda)}$ が求まればよいということになります. そこで, 前と同様に,

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}}, \quad N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}}$$

として, Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ を,

$$J_m(\lambda) = \lambda I + N$$

というように分解して考えてみると,

Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数

$$\begin{aligned} e^{xJ_m(\lambda)} &= e^{\lambda x I} \cdot e^{xN} \\ &= e^{\lambda x} \cdot \left(I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1} \right) \\ &= e^{\lambda x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}} \end{aligned} \tag{114}$$

というように, Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数 $e^{xJ_m(\lambda)}$ を比較的簡単に求めることができることが分かります. よって, (113) 式, (114) 式から, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} も計算できることになります.

以上の結果を用いて, **定数係数の線型常微分方程式の解がどのような形をしているのか**ということを議論してみると, 微分方程式の解を求めるために, 次のような戦略を立てることができることが分かります.

定数係数の線型常微分方程式の解を求める戦略

(i) 与えられた微分方程式に対して, $f^{(i)}(x) \rightsquigarrow x^i$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ というような置き換えを行なって, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求め,

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{L}(x - \lambda_i)^{m_i}\end{aligned}$$

というように因数分解する.

(ii) (i) で得られた因数分解のパターンから, $C_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ として,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{L}\left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)}x + \cdots + C_{m_i-1}^{(i)}x^{m_i-1}\right)e^{\lambda_i x}$$

を考える.

(iii) 例えば, 初期値 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$ を用いることで, 係数 $C_j^{(i)}$ を決定する.

このような戦略で微分方程式の解を求めることにすれば, 正則行列 P を具体的に求めたり, 行列の指数関数 e^{xA} を計算する必要がなくなるので, 物理学の教科書などでは, このような解法が説明されていることが多いわけです.

12 演習問題で扱う内容について

最初に述べたように, **上で見てきたような基本的な事柄を具体的な問題にもとづいて説明する**ことを目標にして演習問題を選んでみたのですが, 実際の演習問題との対応はおおよそ次のようになっています.

(1) 線型空間と線型写像について

第 5 回の問 2 : $\mathbb{R}^3$ の中の線型部分空間の具体的な例

第 6 回の問 2 : 数列の空間の中の線型部分空間の具体的な例

第 6 回の問 3 : $\mathbb{R}^2$ 上の線型写像とその表現行列の具体的な例

第 7 回の問 1 : 数列の空間の中の線型部分空間の具体的な例,
(漸化式を満たす数列と微分方程式を満たす関数の間の関係)

第 7 回の問 2 : $\mathbb{R}^3$ 上の内積を保つ線型写像の具体的な例
(固有ベクトル空間に注目して, 線型写像の様子を理解すること)

第 8 回の問 1 : 関数の空間上の線型写像とその表現行列の具体的な例
(並行移動と微分の関係)

(2) 線型写像の大まかな様子について

第 8 回の問 2, 問 3： 具体的な行列の Ker や Im の基底や次元の計算

(3) 「行列の対角化の問題」について

第 9 回の問 1： 有限集合上の関数の空間上の線型写像とその表現行列の具体的な例
(基底を取り換えると表現行列の姿が変わること)

第 9 回の問 2： 具体的な行列の行列式の計算とその因数分解
(「行列の対角化の問題」の応用例)

第 9 回の問 3： 線型写像の固有ベクトル空間分解の具体的な例

第 10 回の問 1： 対称行列の直交行列による対角化の具体的な例

第 10 回の問 2： 内積を持つ線型空間や内積を保つ線型写像の具体的な例

(4) Jordan 標準形について

第 11 回の問 1： Jordan 細胞 A に対する $f(A)$ の計算の具体的な例

第 11 回の問 2： 正方行列 A に対する I_A の持つ基本的な性質

第 12 回の問 1： Jordan 標準形の具体的な計算

第 12 回の問 2： ベキ零行列に関する基本的な性質
(「ベキ零行列の標準形」の存在証明のための基本事項の確認)

第 13 回の問 1： Jordan 標準形の具体的な計算

第 13 回の問 2：「1 の分解」の Taylor 展開を用いた計算法

第 13 回の問 3： 行列の一般固有ベクトル空間分解の具体的な例

以上のことを参考にして, 演習の時間内に問題が解けなかった場合でも, 毎回の問題を一度は自分で解いてみて, **皆さんなりに「線型代数学における基本的な考え方」を反省してみる**と, より良く理解できるようになるのではないかと思います. そのような形で基本的な考え方が分かってきたら, 毎回 2 枚目につけている演習問題をやってみたり, 適当な演習書の問題をやってみると, さらに理解が進むのではないかと思います.

どんな科目であれ,「生きた知識」を身につけるためには,「自分のペースで主体的に勉強する」ことが何よりも大切です. ですから, 大学の講義の進度とは関係なしに, 先の方へ進めると思える方は自分でどんどん教科書などを読み進めたら良いのではないかと思いますし, 逆に, 今の講義や教科書が分かりづらいと思われる方は, 夏学期にお配りした演習問題に取り組んでいただいても構いませんし, 本屋や図書館へ行って自分に合った教科書を見つけて, **理解できる部分に立ち返ってじっくりと取り組まれたら良い**のではないかと思います.

「連立一次方程式の解法」をその故郷として, **「数が並んだもの」としての「行列」に対する理解を目指す**という意味での線型代数学の歴史は大変古いのですが, **「線型空間」や「線型写像」という抽象的な概念が導入されて, 皆さんが現在学ばれているような形に線型代数学が整理されてから, まだほんの百年程しか経っていない**ということを考えると, **人**

類にとって現在の形での線型代数学というものはそれほど易しいものではないことが分かります. それにもかかわらず, 現在では, **十分な努力を傾ければ, わずか一年間という短い時間で, 皆さんにも「難しい線型代数学」が習得できるようになる**ということは**とても素晴らしいこと**ではないでしょうか.

皆さんが数学に対して, どのような印象を持たれているのか, また, これまで演習を続けてきて, その印象が変り始めているということがあるのかどうか分かりませんが, 数学を学ばれてゆく中で, **先人たちが重ねてきた「工夫」を, 皆さんなりに吸収することで,「物事をしみじみと理解する喜び」をたくさん経験していって欲しい**と思っています. そうした努力を重ねることで, **皆さん自身の「生きた知識」が身についてゆく**のではないかと思いますし, それにより, **将来,「皆さん自身が工夫をしてみる助け」になる**こともあるのではないかと思います. 私としては, 将来, 皆さんがどのような分野に進まれるのかということとは関係なしに, **皆さんの中の一人でも多くの方に「数学のよき理解者」となっていただける**と良いなと思っています.