

数学 II 演習の進め方について (夏学期)

1 はじめに

これから一年間、皆さんと一緒に線型代数学の演習を行なうことになりましたが、どのような意図で毎回の問題を選んでいるのかということや、どのような態度で毎回の演習に取り組んでいただきたいのかということをお話しておく、毎回の演習に取り組みやすくなる方がいるかもしれません。そこで、そうした点について少しご説明しておこうかと思います。

2 毎回の演習問題について

さて、数学の教科書や大学における数学の講義では、ページ数の制約や講義時間の制約などから、定義や定理を述べて、それを順番に証明してゆくという「教える側にとって」最も効率的な方法が取られるのが普通です。しかし、こうした方法は、学ぶ側にとって必ずしも理解しやすいものであるとは限りません。演習の最初の時間にも説明したことですが、数学を理解する上では「どのようなことを問題にして、それをどのように考えて解決しようとしているのか」という「考え方のアイデア」をしみじみと理解することが何よりも大切です。

そこで、個人的な実験として、「考え方のアイデア」を全面に出して説明するというような形で演習を進めていこうと考えました。おそらく、講義の方では一般論という形で数学的な事項に関する説明が進んでゆくことが多いのではないかと思います。演習の方では具体的な問題にもとづいて、なるべく「考え方のアイデア」がはっきりするような形で線型代数学の基本的な考え方を説明してみようと思っています。したがって、毎回の問題の選択にあたっては、講義で習った定理や公式を当てはめることで解けるような問題を選んでいるというよりも、線型代数学における基本的な考え方を具体例にもとづいて説明するための助けになるような問題を選んでいきます。

このような方針なので、毎回の演習問題は皆さん自身の「知識を確認する」ということより、それぞれの問題について皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらおう」ということを目的として出題しています。すなわち、具体的な問題についてあれこれ考えることで、「どのようなことを問題にして、それをどんなアイデアで解決しようとしているのか」という基本的な考え方を、皆さん自身がしみじみと理解できるようになるための助けになれば良いと思って問題を選択しているわけです。

これまで、皆さんは、最初に、教科書を読んだり講義を聞いたりして数学的な事柄を学び、次に、そこで理解した「考え方」や「公式」などを当てはめて問題を解いてみるという形

で問題演習をすることが多かったのではないかと思います。ところが、大学の数学では、内容が少し抽象的になってくることに加えて、残念なことに、教科書を読んでみても、何を考えているのかとか、それをどのようにして解決しようとしているのかといった「考え方」や「アイデア」が全面に出されて説明されていることも少なかったりするために、そもそも「数学的な事柄」を理解するという最初の段階で著しく困難を感じるということがしばしば起こります。

そこで、この演習では、順番を逆にして、最初に、皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらおう」ということをしていただき、次に、毎回解答とともにお配りする解説を合わせて読んでいただくことにより、「数学的な事柄」をより良く理解する助けにさせていただくということを考えました。ですから、皆さんもその場で「できた」とか「できない」とかいうことに一喜一憂したりせずに、むしろ「新しい考え方をより良く理解できるようになるために問題を考えてみる」というスタンスで、毎回の演習に取り組んでももらえたらと思います。

私の方の心づもりとしては、毎回の問題には「ヒント」も付ける予定ですので、問題を見てすぐに諦めたり、答えを見たりなどせずに、必要に応じて「ヒント」を参考にするなどして、とにかく皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらおう」と良いのではないかと思います。その後で解説を合わせて読んでいただければ、たとえ問題が最後まで解けなかった場合でも、そもそも何を問題にしているのかという線型代数学における「基本的な考え方」がより良く理解できるようになるのではないかと思います。そのようにして「数学的な事柄」の理解が進むと、今度は自分の理解を確かめるために問題を解いてみたいと思う方も出てくるのではないかと思います。そのような方のために、毎回の問題とは別に「数学Ⅱ演習問題」として、毎回1ページ問題を付けようと思います。その意味で、「数学Ⅱ演習問題」の方には、毎回の問題より少し難し目の問題も含まれています。¹

本当は、もう少し「基本的な計算練習」になるような問題も、例えば、「数学Ⅱ基本演習問題」として、もう1ページ付けることができれば良いのですが、現時点ではなかなかその時間が取れませんので、そうした「基本的な計算練習」をしたい方は、申し訳ありませんが、ご自分でそうした基本的な問題の載っている教科書や演習書を用意していただけると助かります。

私としては、上に述べたような意図の下で演習を行なおうと思っているのですが、これから演習の回数を重ねていく中で、「問題を解く時間が足りないので問題数を減らして欲しい」とか「もっと基本的な問題も入れて欲しい」というような感想を持たれる方も出てこられるのではないかと思います。私もこうした感想はもっともなことであると思うのですが、線型代数学における基本的な物の見方や考え方を具体的な問題を通して一年間で一通り説明しようと思うと、演習の時間というのは一年間で十三回しかないのでどうしても毎回二-三題は問題を出題する必要があります。もちろん基本的な考え方をすべて説明するというのは諦めて、十三回で進めるところまでゆっくり進むという選択肢もあるわけですが、取り上げなかった基本的な考え方が皆さんにとって将来必要になってくるかもしれません。上で述べたように、毎回の演習では、問題の解答だけでなく、出題した問題にもとづいて基本的な考え方を説明した解説もお配りする予定ですが、一通り基本的な考え方を網

¹特に、「問2*」というように*印を付けた問題は「力試し」のつもりで出題していますので、できなくとも余り気にしないで下さい。

羅したものをお配りする方が、将来、皆さんが勉強するときの助けになるのではないかなと思っています。

皆さんにお配りする予定の「数学Ⅱ演習」のプリントでは、全十三回のうち、第11回から第13回までの最後の三回で「Jordan標準形」について説明しています。一方、現在のカリキュラムでは、線型代数学に関しては、「対称行列の対角化」くらいまでを一年生の「数学Ⅱ」で取り上げ、その後続く「Jordan標準形」については二年生の夏学期に開講される「数理科学Ⅳ」で取り上げられることになっています。その意味で、「数学Ⅱ演習」のプリントのうち、第1回から第10回までの最初の十回くらいまでが、一年生の「数学Ⅱ」で学ぶべき内容ということになります。² 私としては、「Jordan標準形」まで扱うことで、線型代数学の話が一通り完結することと、皆さんとお付き合いするのが一年間だけであることとを考えて、一年生のうちに第13回までの内容を理解していただくかどうかは別として、線型代数学の基本的な考え方を一通り説明したものをお配りした方が、将来、皆さんにとって役に立つこともあるのではないかと考えています。

以上のような考えで毎回の問題を選択していますので、回によっては問題を解く時間が全然足りないということや、必ずしも講義と進度が合わないということが出て来るかもしれません。あるいは、問題が難しすぎて全く手が出ないということもあるかもしれません。最初の演習の時間にも説明しましたが、この演習の目的は、皆さん自身のペースで勉強を進めていただいて、線型代数学に関する基本的な考え方に対する理解を深めていただくということです。必ずしも毎回お配りする問題に取り組んでいただかなくともどのような問題に取り組んでいただいても構いません。数学を身に付けるためには、周りの人や講義や演習のペースに惑わされずに自分のペースでじっくり取り組むことが大切です。もう少し基本的な事柄から取り組みたいと思われる方は、毎回お配りする問題にとらわれずに、自分にあった教科書や問題集を用意して取り組んでみて下さい。また、演習のペースが自分の勉強のペースより速いと思われる方は、例えば、第4回の演習のときに、すでにお配りしている第2回の問題に取り組んでみるというように、自分の理解度に合わせたペースで毎回の演習問題に取り組んでいただいても構いません。また、毎回の問題を予め家で解いてきて、演習の時間にはひたすら解説を読むということでも構いません。とにかく、演習の時間を有意義に使っていただければと思っています。

3 線型代数学における基本的な考え方 (夏学期分に関するもの)

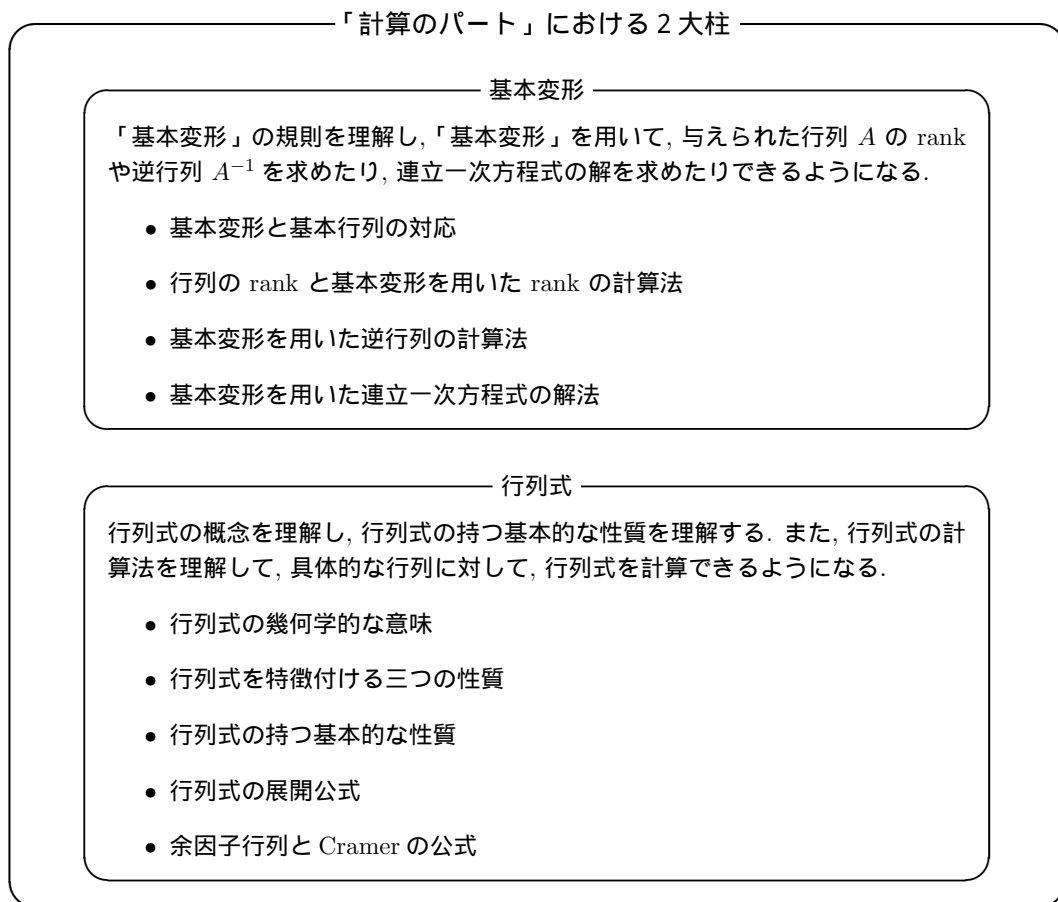
前節で述べたように、この演習で取り上げる予定の問題は、線型代数学における基本的な考え方を具体的な問題を通して一年間で一通り説明しようという目的に合わせて選択しています。そこで、線型代数学における基本的な考え方としてどのようなものがあって、それをどの回の演習で取り上げる予定なのかということを少しだけ説明してみることになります。

実際の講義や教科書では、残念ながら、それほどハッキリと分けられていることは稀ですが、私としては、線型代数学の内容を「計算のパート」と「概念のパート」という形で分けて説明した方が、皆さんにより良く理解していただけるのではないかと思いますので、この演習では、前半の第1回から第6回までで「計算のパート」に関する基本的な考え方を、

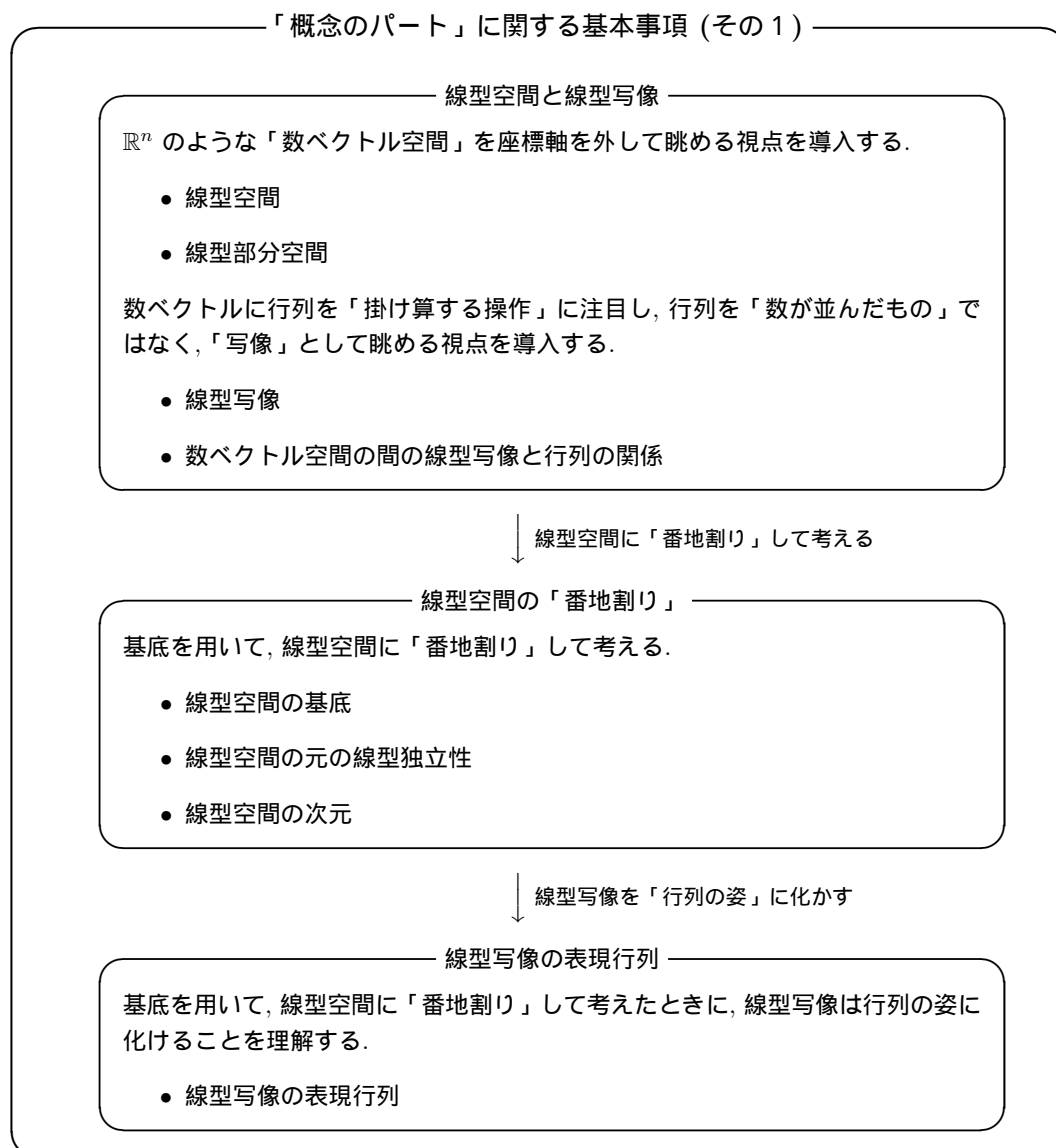
²ただし、講義の進み具合によっては、一年生の「数学Ⅱ」の中で「最小多項式」や「Jordan標準形」などの少し進んだ話題に触れる場合もあるようです。

また、後半の第 6 回から第 13 回までで「概念のパート」に関する基本的な考え方を取り上げることにしました。³

そこで、ここでは第 6 回までで取り上げる予定である「計算のパート」に関する基本的な考え方と「概念のパート」に関する基本的な考え方のうち、最初の部分について少し説明してみることになります。言葉の説明は後回しにして、第 6 回までで取り上げる内容に関する基本事項を図にまとめるとおおよそ次のようになります。



³実際には、第 6 回から第 8 回までで「概念のパート」に関する基本的な考え方が取り上げられ、第 8 回から第 13 回までで、「線型代数学の心」とも言うべき「計算のパート」と「概念のパート」を総合した考え方が取り上げられています。



皆さんにも, 上で挙げた基本事項のつながりや登場するキーワードに注意して学んでいただければ, 線型代数学に対する理解が深まるのではないかと思います. 以下, 順番に, これらのキーワードについて少しだけ説明してみることになります.

4 基本変形について

線型代数学の目標は, 行列の性質をより良く理解できるようになるということです. そこで, まず, 行列を「数が並んだもの」と考えて, 「数が並んだもの」としての行列に対する理解を深めることが大切になりますが, そのための2大柱が「基本変形」と「行列式」です. これらの二つの事柄は, 線型代数学における「計算のパート」を与えていると見ることもできますから, 単に, 概念を理解するだけでなく, 具体的な計算ができるようになると

ということが大切です.

以下では,「基本変形」に関する基本事項を簡単に説明してみることにします.

(あ) 基本変形とは(第3回:2節)⁴

与えられた行列 A に対して,

—— 行に関する基本変形 ——

- (イ) ある二つの行を入れ替える.
- (ロ) ある行に別な行の何倍かを足す.
- (ハ) ある行を何倍かする. (ただし, 0 倍することは許さないものとする.)

という三種類の操作を「行に関する基本変形」と呼び,

—— 列に関する基本変形 ——

- (イ) ある二つの列を入れ替える.
- (ロ) ある列に別な列の何倍かを足す.
- (ハ) ある列を何倍かする. (ただし, 0 倍することは許さないものとする.)

という三種類の操作を「列に関する基本変形」と呼びます.

(い) 基本変形と基本行列の対応(第3回:2節)

例えば,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

という 2 行 2 列の行列に,

$$E_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列を左から掛け算してみると,

$$E_{(1)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

となることが分かりますが, このことは「 $E_{(1)}$ という行列を左から掛け算する」ということは「行列 A の一行目と二行目をひっくり返す」ことであるというように読み取ることができます.

全く同様にして, 一般に, m 行 n 列の行列 A に対して, 「行に関する基本変形」は,

$$A \rightsquigarrow EA$$

⁴皆さんの参考のために, 関連事項の説明が「数学 II 演習の解説」の中のどの節で行なわれているのかということと一緒に記すことにしました.

というように、ある m 行 m 列の行列 E を「左から掛け算する」ことにより実現でき、「列に関する基本変形」は、

$$A \rightsquigarrow AF$$

というように、ある n 行 n 列の行列 F を「右から掛け算する」ことにより実現できることが分かります。このように、基本変形を実現する行列 E, F を基本行列と言います。

基本変形に関して大切なことは、単に基本変形の手続きを覚えるのではなく、行や列に関する基本変形を施すことは、対応する基本行列を左や右から掛け算することで実現されることをしっかりと理解して、「日本語」と「行列語」の間の通訳になるということです。

(う) 行列の rank とは (第3回：3節；第4回：4節；第6回：5節)

与えられた行列 A に対して、行や列に関する基本変形を施して、行列 A を「見やすい形」に変形することを考えてみます。すると、

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように、対角線上に 1 がいくつか並び、その他の行列成分は 0 であるような「見やすい形」に変形できることが分かります。⁵ このとき、「見やすい形」の対角線に残った 1 の数を、行列 A の階数(rank)と呼び、記号で、 $\text{rank } A$ と表わしたりします。⁶ 「計算のパート」だけを眺めていると、「だから、何？」という気もしますが、後で、「概念のパート」と合わせて考えることにより、実は、行列 A の rank は、行列 A を掛け算する写像の「大まかな様子」を教えてくれる基本的な不変量であることが分かります。

(え) 基本変形を用いた逆行列の計算法 (第3回：5節, 7節；第4回：7節)

いま、 A を正方行列⁷として、行列 A の横に A と同じサイズの単位行列 I を並べてできる行列

$$B = \left(A \mid I \right)$$

を考えて、⁸ 行列 B に「行変形だけ」を施して、行列 B の A に対応する部分を単位行列 I にすることを考えます。行列 A が正則行列⁹のときには、このような変形がいつでも可能であることが分かり、このような変形のもとで、行列 B は、

⁵ここで、対角線に残った 1 の数を $r \in \mathbb{N}$ として、 r 行 r 列の単位行列を I_r という記号で表わし、零行列を O という記号で表わしました。

⁶今の場合、 $r = \text{rank } A$ ということになります。

⁷すなわち、行の数と列の数が等しい行列のことです。

⁸役割の違いをハッキリさせるために、 $B = (\cdot \mid \cdot)$ というように、 A と I の間に縦棒「 $\mid$ 」を入れて表わすことにしました。

⁹すなわち、逆行列を持つ行列のことです。

— 行に関する基本変形を用いて逆行列を求める —

$$B = \left(A \mid I \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(I \mid A^{-1} \right)$$

というように姿を変えることが分かります. すなわち, 与えられた正則行列 A に対して, このような変形を試みることで, 行列 B の単位行列 I に対応した部分の変形の結果として, 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めることができます.

(お) 基本変形を用いた連立一次方程式の解法 (第 5 回 : 10 節, 11 節)

いま, m 行 n 列の行列 A に対して, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ として, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対する

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

という連立一次方程式を考えてみます. このとき, 一般には, 行列 A は正則行列とは限りませんから, 「行変形だけ」では,

$$A \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」に変形できるとは限りません. しかしながら, 勝手な行列 A は, 「行変形」だけで,

$$\begin{pmatrix} I_r & \star \\ O & O \end{pmatrix}$$

という形,¹⁰ あるいは, このうちのいくつかの列が入れ替わったような形の「精一杯の見やすい形」の行列 A' に変形できることが分かります.

そこで, (え) の項と同様に, 行列 A の横にベクトル $\mathbf{b}$ を並べてできる行列

$$B = \left(A \mid \mathbf{b} \right)$$

を考えて, 行列 B に「行変形だけ」を施して,

— 基本変形を用いて連立一次方程式を「精一杯の見やすい形」に変形する —

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(A' \mid \mathbf{b}' \right)$$

というように, 行列 B の A に対応する部分を「精一杯の見やすい形」の行列 A' にすることを考えます. このとき, それぞれの行列に対応する連立一次方程式の解全体の集合を, それぞれ,

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \mathbf{b} \}$$

$$\mathcal{S}' = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A'\mathbf{u} = \mathbf{b}' \}$$

¹⁰ここで, サイズが r の単位行列を I_r と表わしました. また, 「 $\star$ 」の部分は r 行 $n-r$ 列の行列であれば何でもよいとします.

と表わすことにすると,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}' \quad (1)$$

となることが分かります. すなわち, 与えられた連立一次方程式

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

の解を求めるためには, 「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式

$$A'\mathbf{u} = \mathbf{b}' \quad (2)$$

の解を求めればよいということが分かります.

このとき, 大切なことは, (1) 式の等号をしっかりと理解することと, 単に「精一杯の見やすい形」を覚えるのではなく, このような形に係数行列 A が変形されると, (2) 式という対応する連立一次方程式は, いくつかの変数を移項するだけでアッという間に解けてしまうということを納得することです.

5 行列式について

次に, 「行列式」に関する基本事項を簡単に説明してみることにします.

(あ) 行列式の幾何学的な意味について (第5回: 3節)

一般に, 正方行列 A に対して, 行列式と呼ばれる数を対応させることができ, 正方行列 A の行列式を「 $\det A$ 」という記号を用いて表わしたり,¹¹

$$\left| A \right| \quad (3)$$

という記号を用いて表わしたりします.¹² すると, 行列式とは,

$$A \mapsto \det A$$

というように, 正方行列 A に対して, $\det A$ という数を対応させる関数であると考えることができます. ただし, 行列式に対するより良い理解を得るためには, A の各列ベクトルを, 例えば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ と表わすことにして, 行列 A を,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

と表わすことで, 「 n 行 n 列の行列 A を考えること」と「 $\mathbb{R}^n$ の中の n 個のベクトル

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$$

¹¹行列式のことを英語で「determinant」と言います.

¹² A が 1 行 1 列の行列のときには, (3) 式の記号は「絶対値」と紛らわしいですが, 「絶対値」とは別物であるということに注意して下さい.

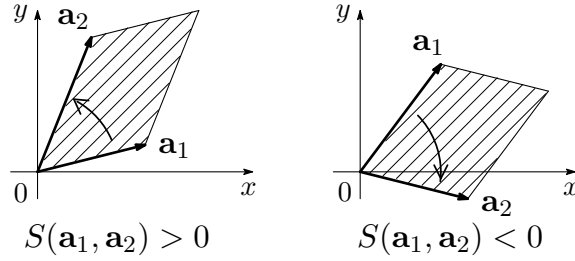


図 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を二辺とする平行四辺形の「符号付きの面積」 $S(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ を考えることができる.

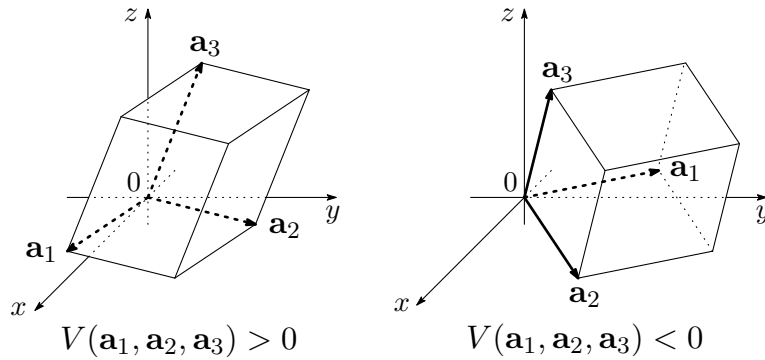


図 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の定める平行六面体の「符号付きの体積」 $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を考えることができる.

を「考えること」とは同じことであると考えて, 行列式を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ という n 個のベクトルを変数とする関数として考察するというのが大切なポイントになります.¹³

このとき, 例えば, A を 2 行 2 列の行列とすると, 行列式 $\det A$ は, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の二つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ に数を対応させる関数とみなすことができますが, 実は,

$$\det A = S(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

というように, 行列式 $\det A$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を二辺とする平行四辺形の「符号付きの面積」 $S(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ を対応させる関数であることが分かります (図 1 を参照). 全く同様に, 3 行 3 列の行列 A の行列式 $\det A$ は,

$$\det A = V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

というように, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ の定める平行六面体の「符号付きの体積」 $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を対応させる関数であることが分かります (図 2 を参照).

¹³ここでは, 列ベクトルにもとづいて説明することにしましたが, 列ベクトルの代わりに行ベクトルを考えて, 以下の議論を行なっても, 実は, 同じ結論にたどり着きます. また, 「面積」や「体積」という概念が直感的に理解しやすいように, 実数行列にもとづいて行列式を説明することにしましたが, 複素行列の場合にも全く同様の議論ができます.

(い) 行列式を特徴付ける三つの性質 (第5回: 3節)

前項でも注意しましたが, 行列式をより良く理解するためには, 行列式とは, $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して, 数に対応させる関数であると考えることが大切です. このとき, 行列式は,

—— 行列式の特徴づける三つの性質 ——

- (イ) 多重線型性
- (ロ) 歪対称性
- (ハ) 規格化条件

という三つの性質で特徴づけられることが分かります. 例えば, A が 2 行 2 列の行列のときに,

$$\det A = f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

と表わすことにすると, 上の三つの性質とは,

—— 行列式を特徴づける三つの性質 (2 行 2 列の場合) ——

- (イ) 多重線型性: 勝手なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}'_2 \in \mathbb{R}^2$ と, 勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}_2) \\ f(c \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = c \cdot f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}'_2) = f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_2) \\ f(\mathbf{a}_1, c \cdot \mathbf{a}_2) = c \cdot f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \end{cases}$$

- (ロ) 歪対称性: 勝手なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -f(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$$

- (ハ) 規格化条件: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次が成り立つ.

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$$

ということになります.

皆さんにとって大切なことは, 「符号付きの面積」や「符号付きの体積」などは上の (イ), (ロ), (ハ) という三つの性質を持つことを納得することと, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ を変数とする関数

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

が、(イ)、(ロ)、(ハ) という三つの性質を持つときに、その値は、(イ)、(ロ)、(ハ) という三つの性質を用いて、完全に計算できてしまうことを納得することです。¹⁴

(う) 行列式の持つ基本的な性質 (第5回：4節)

前項では、行列式が、(イ)、(ロ)、(ハ) という三つの性質で特徴付けられることを注意しましたが、全く同じ議論から、(イ)、(ロ) という二つの性質だけでも行列式はほぼ特徴付けられてしまうこと、すなわち、(イ)、(ロ) という二つの性質を持つ関数は行列式という関数の定数倍しか存在しないことが分かります。この事実を用いると、行列式の持つ基本的な性質を色々と議論することができます。

例えば、 A, B を同じサイズの二つの正方行列とすると、

—— 行列式の持つ重要な性質 (その1) ——

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (4)$$

となることが分かります。ここで、 $\det A, \det B$ は単なる数であることに注意すると、

$$\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$$

となることが分かりますから、

—— 行列式の持つ重要な性質 (その2) ——

$$\det(AB) = \det(BA) \quad (5)$$

となることも分かります。さらに、(5) 式を用いると、勝手な n 行 n 列の正則行列 P と、勝手な n 行 n 列の行列 A に対して、

—— 行列式の持つ重要な性質 (その3) ——

$$\det(P^{-1}AP) = \det A \quad (6)$$

となることが分かります。この (6) 式は後半戦である「概念のパート」において色々と重要な役を果たすことになります。

(え) 行列式の展開公式 (第5回：5節, 6節)

いま、 A を n 行 n 列の行列として、行列 A に対して、対角線上に 1 をひとつだけ付け加えて、

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} \quad (7)$$

という $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列の行列 A' を考えてみます。このとき、前項と同様にし、(イ)、(ロ) という二つの性質を持つ関数は行列式という関数の定数倍しか存在しないという事実を用いて議論すると、

¹⁴その計算結果が、教科書に載っている「行列式の定義式」ということになります。

行列式の計算の原理

$$\begin{vmatrix} 1 & & \\ & A & \\ & & \end{vmatrix}_{n+1} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix}_n \quad (8)$$

となることが分かります。¹⁵ すなわち、(7) 式のような特別な形をした $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列の行列 A' に対しては、その $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列の行列式 $|\cdot|_{n+1}$ の計算が n 行 n 列の行列式 $|\cdot|_n$ の計算に帰着できるということが分かります。

例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると、

行列式の計算の原理 (基本形)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_2 \quad (9)$$

となることが分かります。全く同様に、 n 行 n 列の行列 A を、素直に $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列の行列に埋め込むのではなく、例えば、 A を 2 行 2 列の行列として、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

というように分断して埋め込むことを考えると、

行列式の計算の原理 (発展形)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}_3 = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_2 \quad (10)$$

となることが分かります。

以上の準備のもとで、一般に、 n 行 n 列の行列に対する行列式の計算を、サイズがひとつ小さい $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列の行列に対する行列式の計算に帰着することができることが分かり、これを「行列式の展開公式」と言います。

例えば、 B が 3 行 3 列の行列であるとして、

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

¹⁵ここで、式の意味がハッキリするように、 n 行 n 列の行列に対する行列式を考えているということを、 $|\cdot|_n$ というように「 n 」という添字を付けて表わすことにしました。

としたときに、再び、行列式は (イ), (ロ) という二つの性質を持つということを用いて議論すると、行列 B の行列式の値を、

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_3 \\ &= a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix}_3 + d \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{vmatrix}_3 + g \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}_3 \quad (11)\end{aligned}$$

というように書き直せることが分かります。そこで、(11) 式に、(9) 式、(10) 式などを代入することで、

—— (一列目に関する) 行列式の展開公式 ——

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_3 \\ &= a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}_2 - d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}_2 + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}_2 \quad (12)\end{aligned}$$

という式が得られます。

全く同様に、行ベクトルをもとに議論をしてみると、例えば、

—— (二行目に関する) 行列式の展開公式 ——

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_3 \\ &= -d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}_2 + e \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}_2 - f \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}_2\end{aligned}$$

というような「行に関する展開公式」も成り立つことが分かります。

実際に行列式を計算するに当たっては、基本変形に対する行列式の振る舞いを理解した上で、いきなり、行や列に関する展開公式を用いるのではなく、行や列に関する基本変形を行なって、ある行、あるいは、ある列に、なるべくたくさん 0 が登場するような形に変形してから、その行、あるいは、その列に関して展開公式を用いるという方針を取ると、計算が楽になることが多いです。

(お) 余因子行列と Cramer の公式 (第 6 回 : 4 節)

さて, (え) の項で説明した「行列式の計算原理」では, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$$

という特別の形をした行列の行列式が登場しましたが, 一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A の i 行目と j 列目だけを,

$$\begin{matrix} & & j \text{ 列目} \\ i \text{ 行目} & \begin{pmatrix} * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \end{matrix}$$

という形に取り替えることで得られる行列の「行列式」を行列 A の第 (i, j) 余因子と呼びます. 例えば, A が 3 行 3 列の行列として,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とすると, 行列 A の第 (i, j) 余因子を $\tilde{A}_{ij}$ と表わすことにして,

— 行列 A の余因子 (3 行 3 列の場合) —

$$\tilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \tilde{A}_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ということになります. 余因子を用いると, (え) の項で説明した「行列式の展開公式」も, 例えば,

— 余因子を用いた (一行目に関する) 行列式の展開公式 (3 行 3 列の場合) —

$$\det A = a_{1\bar{1}}\tilde{A}_{1\bar{1}} + a_{1\bar{2}}\tilde{A}_{1\bar{2}} + a_{1\bar{3}}\tilde{A}_{1\bar{3}} \quad (13)$$

や,

— 余因子を用いた (二列目に関する) 行列式の展開公式 (3 行 3 列の場合) —

$$\det A = a_{\bar{1}2}\tilde{A}_{\bar{1}2} + a_{\bar{2}2}\tilde{A}_{\bar{2}2} + a_{\bar{3}2}\tilde{A}_{\bar{3}2} \quad (14)$$

というように簡明な形で表わすことができます.¹⁶

¹⁶ただし, 式の意味が分かりやすいように, ここでは, $\{1, 2, 3\}$ という集合に関する和を考える添え字には「 $\bar{}$ 」というように下線を付けて表わしました.

いま、行列 A の第 (i, j) 余因子 $\tilde{A}_{ij}$ を j 行 i 列成分とする行列を $\tilde{A}$ と表わすことにします。¹⁷ こうして得られる行列 $\tilde{A}$ を行列 A の余因子行列と呼びます。このとき、(13) 式、(14) 式のような「行列式の展開公式」と「行列の積の計算」とを比較してみると、

余因子行列の重要な性質

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot I \quad (15)$$

となることが分かります。そこで、(う) の項で説明した (4) 式と、上の (15) 式を合わせて考えると、

逆行列が存在するための判定条件

$$\text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} \iff \det A \neq 0$$

というように、行列 A に逆行列が存在するかどうかということが、行列 A の行列式 $\det A$ が 0 にならないかどうかということで判定できることが分かります。また、 $\det A \neq 0$ のときには、(15) 式の両辺を $\det A$ で割り算することで、

逆行列の公式 (Cramer の公式)

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}}_{n \text{ 行 } n \text{ 列}} \end{aligned} \quad (16)$$

というように、行列 A に対する逆行列の公式が得られます。この (16) 式を Cramer の公式と言います。

6 線型空間と線型写像について

さて、行列の性質をより良く理解できるようになるということが線型代数学の目標であることは上でも述べましたが、「数が並んだもの」としての行列の中には、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という行列のように「見やすい形」をした行列が存在している一方で、ほとんどの行列は、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

¹⁷ 行列 $\tilde{A}$ の i 行 j 列成分は、 $\tilde{A}_{ij}$ ではなく、 $\tilde{A}_{ji}$ であることに注意して下さい。

という行列のようにあまり「見やすい形」はしていません.¹⁸

そこで、このような一般には「見やすい形」をしているとは限らない行列のこともより良く理解できるようになるために、「最初に与えられた姿」に騙されずに行列のことを理解しようということが考えられました。すなわち、「行列とは見方を変えるとコロコロと姿を変えるものである」と考えて、「最初に与えられた姿」ではなく、行列が「見やすい形」になるような視点から眺めてやることで、より良く理解できるようになるのではないかという「作戦」が立てられました。この「作戦」を実行に移すということが、線型代数学における「概念のパート」ということになります。

行列を「数が並んだもの」としてだけ考えることにすると、例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

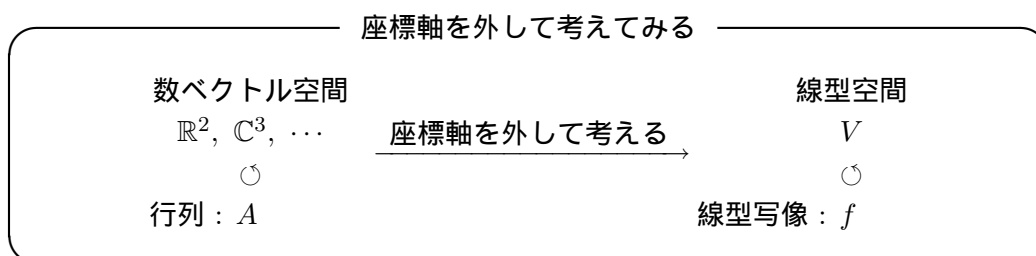
という二つの行列 A と B は「異なる行列」ということになります。したがって、「行列 A は見方を変えると、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

というように「姿」を変える」というような言明が意味を持つためには、「行列」を「数が並んだもの」ではなく、別な視点から眺める必要が出てきます。こうした目的のために導入された概念が「線型空間」や「線型写像」です。

(あ) 線型空間とは (第6回：7節, 8節)

上でも注意したように、「最初に与えられた姿」に騙されずに行列のことを理解しようと試みるということが、線型代数学における「概念のパート」における主目標です。そのためのアイデアは、



というように、 $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」から「座標軸を外して眺める」という視点を導入するということです。皆さん、よくご存じのように、「座標」は具体的な計算を進める上では大変便利です。ところが、この世の中に「万人に共通の座標軸」が存在するわけではないということからも察せられるように、「座標」というも

¹⁸ここで、(正方) 行列が「見やすい形」かどうかということは、数学的には、例えば、 $n \in \mathbb{N}$ として、行列の n 乗が簡単に計算できるかどうかということで判断できます。例えば、 A のような「対角行列」に対しては、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

というように、 n 乗の計算が簡単にできてしまうのに対して、 B のような「見やすすくない形」の行列に対しては、 B^n がどうなるのかということはすぐには分からないというわけです。

のは具体的な計算を進める上では便利なものの、物事の本質には関わっていないと思われます。そこで、「座標軸を外して眺める」という視点から「数ベクトル空間」や「行列」を眺めてみることで、「数ベクトル空間」や「行列」の本質が見えてくるのではないかと考えてみるというのが線型代数学における基本的な考え方になっています。

さて、 $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」から「座標軸を外して」みると、「原点のある真っ直ぐな空間」が残るように思われますが、「原点のある真っ直ぐな空間」というのが「線型空間」の直感的な定義（あるいは、幾何学的なイメージ）です。ただし、「真っ直ぐである」というのは極めて感覚的な定義なので、「足し算」や「スカラー倍」ができるということが、「原点があり、かつ、真っ直ぐである」ということの言い換えになると考えて、数学的には、「足し算」や「スカラー倍」ができる集合を線型空間と定義します。¹⁹

(い) 線型部分空間とは (第5回：8節)

一般に、線型空間 V の部分集合 $W \subset V$ が、

—— W が線型部分空間であるための条件 ——

(イ) 勝手な元 $u, v \in W$ に対して、 $u + v \in W$ となる。

(ロ) 勝手な元 $u \in W$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して、 $cu \in W$ となる。

という二つの条件を満たすとき、²⁰ W を (線型空間 V の) 線型部分空間と言います。²¹ すなわち、線型部分空間 $W \subset V$ とは、それ自身が線型空間であるような部分集合のことです。

皆さんにとって、大切なことは、まずは、 W として、 $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の部分集合を考えて、 W が、「原点を通る直線」や「原点を通る平面」など、「原点を通る真っ直ぐな部分集合」であることと、線型部分空間であることが上手に対応していることを納得することです。一般に、 A を m 行 n 列の行列として、

$$W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$$

というような (同次) 連立一次方程式の解全体の集合が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間の代表例です。

(う) 線型写像とは (第6回：14節)

¹⁹「数ベクトル空間」において、ベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」は座標軸が無くとも考えることができることに注意して下さい。また、実際には、線型空間を定義する上で、「結合法則」や「分配法則」が成り立つことなど、「足し算」や「スカラー倍」が「まっとうである」ということを要請します。これらの性質は、線型空間の元の「足し算」や「スカラー倍」を、平面 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトルの「足し算」や「スカラー倍」のようにイメージしても「変なこと」が起こらないということを保証します。

²⁰ここでは、「スカラー倍」=「 $\mathbb{R}$ 倍」であるような場合、すなわち、 V が「 $\mathbb{R}$ 上の線型空間」である場合として、定義を書きました。

²¹教科書によっては、線型部分空間のことを部分線型空間と呼んでいることもあります。両者は同じもののことです。

上でも述べたように、「行列」を「数が並んだもの」としてではなく、別な視点から眺めてみるというのが「概念のパート」における基本的な考え方です。そのためのアイデアは、「行列を掛け算する操作」に注目するということです。

いま、 A を m 行 n 列の行列として、 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に行列 A を「掛け算する操作」を、

$$f_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

と表わして、 f_A を、

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

という写像であるとみなすことにします。このとき、行列 A の掛け算は、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ として、

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad (17)$$

$$A(c\mathbf{u}) = c \cdot A\mathbf{u} \quad (18)$$

という式を満たすことが分かりますが、(17) 式、(18) 式を、写像 f_A の言葉を用いて表わすと、

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

$$f_A(c\mathbf{u}) = c \cdot f_A(\mathbf{u})$$

ということになります。

そこで、一般に、線型空間 V, W に対して、 V から W への写像

$$f : V \rightarrow W$$

が、

線型写像の条件

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

となる。

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(c\mathbf{u}) = c \cdot f(\mathbf{u})$$

となる。

という二つの条件を満たすときに、写像 f を線型写像と呼びます。上で見たことから、行列 A を「掛け算する操作」 $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は線型写像ということになります。

(う) 数ベクトル空間の間の線型写像と行列の関係 (第1回 : 5節 ; 第6回 : 15節)

前項で見たように, 一般に, m 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A を「掛け算する操作」

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

は, 線型写像になることが分かりますが, 逆に, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像はこのようなものしか存在しないことが分かります. すなわち,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

を勝手にひとつ与えられた線型写像とすると, 写像 f は, ある m 行 n 列の行列 A を用いて,

$$f = f_A$$

と表わせるということ, すなわち, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

と表わせるということが分かります. また, A, B を m 行 n 列の行列として, $A \neq B$ であるとする, 写像としても, $f_A \neq f_B$ となることが分かります. こうして, 「数ベクトル空間の間の線型写像」とは「行列を掛け算する操作」に他ならないということが分かります.

一般に, V, W を線型空間として, 線型空間の間の写像

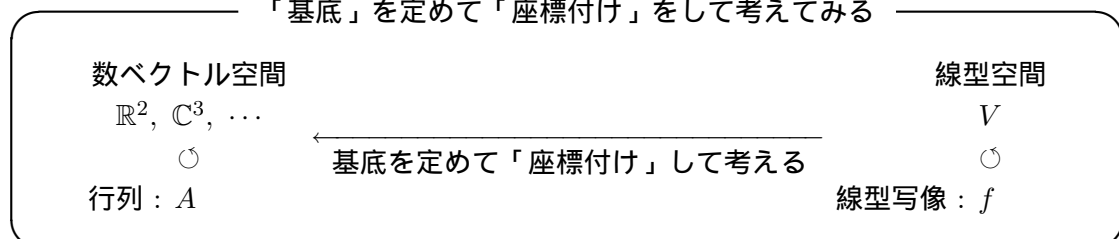
$$f : V \rightarrow W$$

は, 「原点のある真っ直ぐな空間」である V の点 $\mathbf{u} \in V$ が「原点のある真っ直ぐな空間」である W の点 $f(\mathbf{u}) \in W$ に写されるというように, 座標軸に依らずにイメージすることができますから, 上のように, 「数が並んだもの」としての行列 A と行列 A を「掛け算する操作」 f_A を同一視して考えることにより, 行列 A を座標軸に依らずに眺める視点が獲得できたことになります.

7 線型空間の「番地割り」について

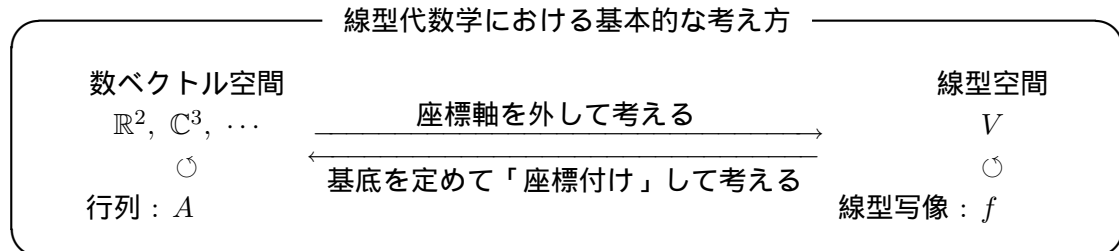
前節で見たように, 「線型空間」や「線型写像」という概念を導入することにより, 行列 A を座標軸に依らずに眺める視点が得られることが分かりますが, 逆に, 一見, 抽象的に見える「線型空間」や「線型写像」も, 「基底」という概念を用いて,

「基底」を定めて「座標付け」をして考えてみる



というように, 具体的な「数ベクトル空間」や「行列」の姿に見えてくることが分かります

す。したがって、線型代数学において、具体的な「数ベクトル空間」や「行列」と、抽象的な「線型空間」や「線型写像」の関係は、



というように、同一の数学的な対象を、「座標軸」を外して眺めるのか、あるいは、「座標付け」して眺めるのかという違いとして理解することができるということになります。この演習でも、追々、見ていくように、こうした二通りの見方を行ったり来たりすることによって、「行列の本質」をより良く理解することができるようになりますし、行列を用いて理解することのできる対象も大幅に広がることになります。

(あ) 基底とは(第6回: 9節)

上で注意したように、線型空間 V に座標付けするための概念が「基底」というものです。

いま、 V を線型空間としたときに、「原点があり、かつ、真っ直ぐである」という特徴を生かして、線型空間 V に「番地割り」することを考えます。²² そこで、いま、例えば、「番地割り」の基準となる「方向」を二つ取って、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ と表わすことにします。²³ このとき、例えば、 V の元 $\mathbf{u} \in V$ が、

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \tag{19}$$

というように表わせるときに、(19) 式を、「線型空間 V の原点 $\mathbf{0}$ を出発して、 $\mathbf{e}_1$ の方向に 1 歩進み、 $\mathbf{e}_2$ の方向に 2 歩進むと、 $\mathbf{u} \in V$ という点に至る」ということを表わしていると解釈して、

$$V \ni \mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」を割り振ることを考えてみます。²⁴ より一般に、 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ とし、

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

というように表わせるときに、

²² どのようなことを行なっているのかというイメージが持ちやすいように、以下では、「座標付け」のことを「番地割り」と呼ぶことにします。

²³ 後で見るように、「番地割り」の際に、基準となる「方向」がいくつ必要になるのかということは、それぞれの線型空間 V によって異なります。

²⁴ すなわち、 $\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ を「1 丁目 2 番地」と考えて、「1-2」と「番地」を割り振るということです。

「番地割り」の方針

$$V \ni \mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」を割り振ることを考えてみます。このとき、上の方針のもとで、「番地割り」が上手くいくとき、すなわち、

基底の条件

- (イ) V のすべての元に対して、「番地」が割り振られる。
- (ロ) 「番地割り」に「二重番地」のような混乱が生じない。

という二つの条件が満たされるときに、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を線型空間 V の基底と呼びます。
全く同様にして、一般に、

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m \in V$$

というように、「番地割り」の基準として、 V の元をいくつか取ってくるときに、

基底の条件 (数学的な定義)

- (イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して、

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \quad (20)$$

となるような数 $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ が存在する。

- (ロ) $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ として、

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

となる。

という二つの条件が満たされるときに、 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ を線型空間 V の基底であると言います。線型空間 V の基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ を、勝手にひとつ定めると、それぞれの元 $\mathbf{u} \in V$ を、(20) 式のように表わすことで、

基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ を用いて、 $\mathbf{u} \in V$ に「番地」を割り振る

$$V \ni \mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

というように「番地割り」をすることができ、これにより、 V の元と「番地全体の集合」である $\mathbb{R}^m$ の点がぴったり一対一に対応して、

線型空間 V に「番地割り」する

$$V \cong \mathbb{R}^m$$

というように同一視できることになります。

(い) 線型空間の元の線型独立性 (第6回: 9節)

一般に, 線型空間 V の元 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ が, 基底の条件のうち, (ロ) という条件を満たすとき,²⁵ すなわち,

線型独立性の条件

$a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

となる。

という条件を満たすときに, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ は線型独立であると呼びます。²⁶ 例えば, $m=3$ として,

$$\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \quad (21)$$

であるとする, (21) 式から,

$$\mathbf{0} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + (-1)\mathbf{e}_3$$

ということになりますから, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は線型独立ではないということになります。²⁷ このように, ある元が, その元以外の元を用いて表わせるとすると, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ は線型独立ではないということが分かります。すなわち, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ が線型独立であるということは, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ の表わす方向が, それぞれ「独立の方向を向いている」ということの数学的な表現になっています。

(う) 線型空間の次元 (第6回: 9節)

一般に, 線型空間 V に「番地割り」をするために必要な基底の元の個数を,²⁸ を線型空間の次元と呼び, 記号で,

$$\dim_{\mathbb{R}} V$$

というように表わしたりします。²⁹ 与えられた線型空間 V の基底の取り方は, 一通りではありませんが, どのような取り方をしても, 「基底の元の個数」は等しくなることが分かり, この個数のことを線型空間 V の次元と呼ぶということです。

²⁵すなわち, (イ) の条件を満たすかどうかということは問わないということです。

²⁶教科書によっては, 線型独立のことを一次独立と呼んでいることもありますが, 両者は同じことを表わしています。

²⁷このとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は線型従属であるとか, 一次従属であるとか言ったりします。

²⁸すなわち, 基底を $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ と書いたとき, m のことです。

²⁹ V が複素数上の線型空間のときには, $\dim_{\mathbb{C}} V$ と表わしたりします。

(え) 線型写像の表現行列 (第6回 : 16 節)

一般に, 二つの線型空間 V, W の間の線型写像

$$f : V \rightarrow W$$

が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて,

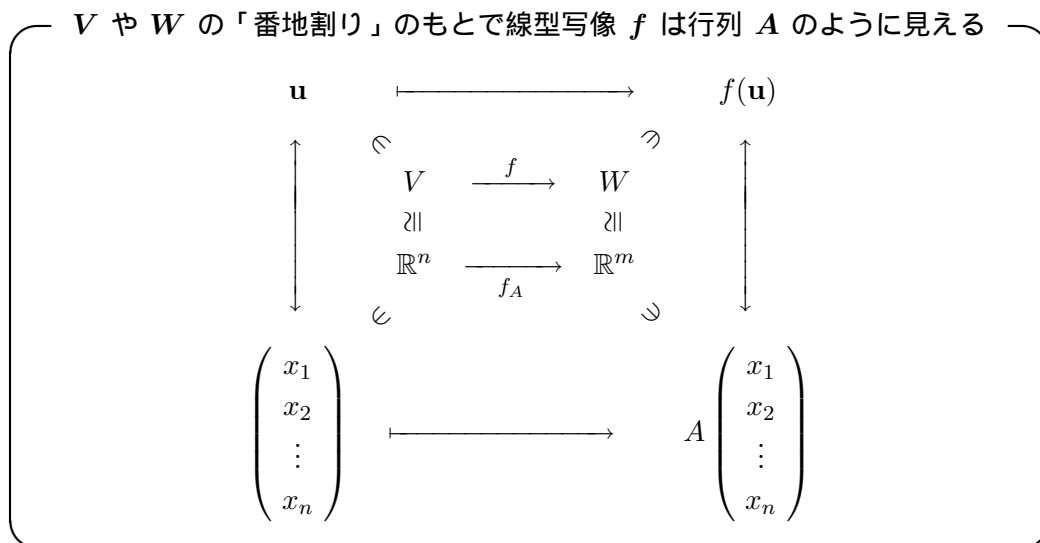
$$\begin{aligned} V \ni \mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ W \ni \mathbf{v} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 + \dots + y_m \mathbf{f}_m &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

という「番地割り」によって,

$$V \cong \mathbb{R}^n$$

$$W \cong \mathbb{R}^m$$

というように「座標付け」してみると,



というように, 線型写像 f は, ある m 行 n 列の行列 A を掛け算するような写像 f_A のように見えることが分かります. すなわち, 「線型空間 V のどの点が, 線型空間

W のどの点に写るのか」という記述ではなく、「線型空間 V のどの「番地」が、線型空間 W のどの「番地」に写るのか」という記述を行なうと、線型写像 f は「行列の姿」 A に「化ける」ことが分かります。このようにして得られる行列 A を線型写像 f の (V の基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ と W の基底 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ に関する) 表現行列と呼びます。

8 演習問題で扱う内容について

最初に述べたように、上で見てきたような基本的な事柄を具体的な問題にもとづいて説明することを目標にして演習問題を選んでみたのですが、実際の演習問題との対応はおおよそ次のようになっています。

(1) 行列の計算

第 1 回の問 1：具体的な行列の行列成分の計算

第 1 回の問 2：具体的な行列の n 乗の計算

(2) 複素数について

第 1 回の問 3：複素数の掛け算の行列表示

第 2 回の問 1：複素数と特別な形をした 2 行 2 列の行列との間の対応

第 2 回の問 2：回転行列の基本的な性質

第 2 回の問 3：三角関数、指数関数の Taylor 展開

第 2 回の問 4：Euler の公式と関連する等式について

(3) 基本変形について

第 3 回の問 1：具体的な行列の rank の計算

第 3 回の問 2：具体的な行列の逆行列の計算

第 4 回の問 1：具体的な行列の逆行列の計算

第 4 回の問 2：具体的な行列の rank の計算

第 4 回の問 3：具体的な行列の rank と逆行列の計算

第 5 回の問 3：具体的な連立一次方程式の解を求めること

(4) 行列式について

第 5 回の問 1：具体的な行列の行列式の計算

第 6 回の問 1：具体的な行列の固有値、固有ベクトルの計算

(5) 線型空間と線型写像について

第 5 回の問 2： $\mathbb{R}^3$ 中の線型部分空間の具体的な例

第 6 回の問 2：数列の空間中の線型部分空間の具体的な例

第 6 回の問 3： $\mathbb{R}^2$ 上の線型写像の具体的な例

以上のことを参考にして、演習の時間内に問題が解けなかった場合でも、毎回の問題を一度は自分で解いてみて、皆さんなりに線型代数学における基本的な考え方を反省してみると、より良く理解できるようになるのではないかと思います。そのような形で基本的な考え方が分かってきたら、毎回2枚目につけている演習問題をやってみたり、適当な演習書の問題をやってみると、さらに理解が進むのではないかと思います。

どんな科目であれ、「生きた知識」を身につけるためには自分のペースで主体的に勉強することが何よりも大切です。ですから、大学の講義の進度とは関係なしに、先の方へ進めると考える方は自分でどんどん教科書などを読み進めたら良いのではないかと思いますし、逆に、今の講義や教科書が分かりづらいと思われる方は、本屋や図書館へ行って自分に合った教科書を見つけて、理解できる部分に立ち返ってじっくりと取り組まれたら良いのではないかと思います。「連立一次方程式の解法」をその故郷として、「数が並んだもの」としての「行列」に対する理解を目指すという意味での線型代数学の歴史は大変古いのですが、「線型空間」や「線型写像」という抽象的な概念が導入されて、皆さんが現在学ばれているような形に線型代数学が整理されてから、まだほんの百年程しか経っていないということを考えると、人類にとって現在の形での線型代数学というものはそれほど易しいものではないことが分かります。それにもかかわらず、現在では、十分な努力を傾ければ、わずか一年間という短い時間で、皆さんにも「難しい線型代数学」が習得できるようになるということとはとても素晴らしいことではないでしょうか。