数学 II 演習（第 13 回）の略解

目 次

1　問 1 の解答

(1) $\varphi_A(x) = \det(xI - A)$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 2 \\ 3 & x-13 & 7 \\ 5 & -19 & x+10 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & x+1 & 7 \\ 5 & 2x+1 & x+10 \end{vmatrix} \qquad (\text{2 列目} + \text{3 列目} \times 2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & x+1 & 7 \\ -1 & -1 & x-4 \end{vmatrix} && (\text{ 3 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-2) \text{ }) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ -x+2 & x+1 & 7 \\ 0 & -1 & x-4 \end{vmatrix} && (\text{ 1 列目} + 2 \text{ 列目} \times (-1) \text{ }) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 0 & x+2 & 9 \\ 0 & -1 & x-4 \end{vmatrix} && (\text{ 2 行目} + 1 \text{ 行目} \times 1 \text{ }) \\
&= (x-2) \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 9 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} && (\text{ 1 列目で展開 }) \\
&= (x-2)\{(x+2)(x-4)+9\} \\
&= (x-2)(x^2-2x+1) \\
&= (x-1)^2(x-2)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(2) (1) の結果から, A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は, $(x-1)(x-2)$, $(x-1)^2(x-2)$ のうちのいずれかになることが分かります. そこで, $(A-I)(A-2I)$ を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
(A-I)(A-2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 19 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 11 & -7 \\ -5 & 19 & -12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & -15 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$(A-I)(A-2I) \neq O$$

となることが分かります. よって, A の最小多項式は,

$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

となることが分かります. したがって, 第 12 回の問 1 の (4) と同様にして, A の Jordan 標準形 J_A は,

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

また, 第 12 回の問 1 の (5) と同様に, 行列 P の列ベクトルを, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ として,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

と表わして, ***P* が正則行列である**という条件のもとで,

$$P^{-1}AP = J_A$$

という式を, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ という列ベクトルに対する条件として書き直してみると,

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \\
\iff \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \\
= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 & 2\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} & \\
\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3 \end{cases} & \\
\iff \begin{cases} (A - I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A - I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (A - 2I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \end{cases} & \qquad (1)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (1) 式の連立一次方程式を順番に解くことで, 例えば,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

と取ることができることが分かります.[1]

2 今回の問題について

さて, 第 12 回の問 1 のところでは,「見やすい形」の行列として, 対角行列だけでなく, Jordan 標準形まで許すことにすると,

[1] もちろん, P は, $P^{-1}AP = J_A$ となるような正則行列であれば, 上の行列でなくとも構いません.

行列の標準形の問題

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

という「行列の標準形の問題」はいつでも解決できるということを述べました. また, 勝手にひとつ与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, **行列 A を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像**

$$\boldsymbol{L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$$

を Jordan 標準形という「見やすい形」で表現するような $\mathbb{C}^n$ の「上手い基底」が実際に存在するということを確かめるためには, 行列 A の**一般固有ベクトル空間**

行列 A の (固有値 λ に対応した) 一般固有ベクトル空間

$$V(\lambda)_{\text{gen}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^m \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する. }\}$$

に注目して,

「Jordan 標準形の存在」を示すための基本的な戦略

(i) $\mathbb{C}^n$ **が,**

$$\boldsymbol{\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\text{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\text{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_N)_{\text{gen}}}$$

というように, 行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することを確かめる.

(ii) それぞれの一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)_{\text{gen}}$ に対して,「上手い基底」を定めることを考える.

という二つのステップを通して「行列の標準形の問題」を解決することを考えるということが基本的な戦略であることにも触れました. さらに, 第 12 回の問 2 のところでは, (ii) のステップへの準備として, 行列 A がベキ零行列のときに, 実際に, 線型写像 L_A を Jordan 標準形で表現するような $\mathbb{C}^n$ の「上手い基底」が存在することを確かめました.

そこで, 今回の演習では, (i) のステップである**「一般固有ベクトル空間への分解」**という問題について考えてみることにしました. (一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の持つ性質については, すでに, 第 11 回の問 2 のところでも触れましたが, **行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ に注目して, (一変数) 多項式環の持つ性質を上手く利用することで, (i) のような一般固有ベクトル空間への分解を行なうことができます**. 皆さんに, こうした Jordan 標準形に関する理論的な側面に, 具体例を通して触れてもらうことで, Jordan 標準形に対する理解を深めてもらおうと考えて, 今回の問題を出題してみました. ですから, 問 1, 問 2, 問 3 をバラバラの問題と考えるのではなく, 全体でひとつの問題であると考えて見直してもらえると, Jordan 標準形に対する理解が深まるのではないかと思います.

3 問 2 の解答

(1) いま, $|T| < 1$ に対して,

$$\frac{1}{1-T} = 1 + T + T^2 + T^3 + \cdots \tag{2}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{(x-1)-1} \\ &= -\frac{1}{1-(x-1)} \\ &= -\left\{1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots\right\} \qquad \text{((2) 式で } T = x-1 \text{ とした)} \\ &= -1 - (x-1) - (x-1)^2 - \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります.

(2) 問題文中の $(\heartsuit)$ 式より, $g_1(x)$ は,

$$g_1(x) = \frac{1}{x-2} - (x-1)^2 \cdot \frac{g_2(x)}{x-2} \tag{4}$$

と表わせることが分かります. そこで, いま, (4) 式の右辺の第二項に現われる

$$\frac{g_2(x)}{x-2}$$

という関数の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開を, $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{R}$ として,

$$\frac{g_2(x)}{x-2} = a_0 + a_1(x-1) + \cdots \tag{5}$$

と表わすことにすると, (3) 式, (4) 式, (5) 式から,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{x-2} - (x-1)^2 \cdot \frac{g_2(x)}{x-2} \\ &= \{-1 - (x-1) - (x-1)^2 - \cdots\} - (x-1)^2 \{a_0 + a_1(x-1) + \cdots\} \\ &= -1 - (x-1) - (a_0+1)(x-1)^2 + \cdots \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $g_1(x)$ の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$g_1(x) = -1 - (x-1) + \cdots$$

という形であることが分かります.

もちろん, (4) 式, あるいは, $(\heartsuit)$ 式の両辺を直接微分して,

$$g_1(1) = -1, \;\; g_1'(1) = -1$$

となることを確かめることで, $g_1(x)$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_1(1) + g_1'(1)(x-1) + \cdots \\ &= -1 - (x-1) + \cdots \end{aligned}$$

という形になることを結論しても構いません.

(3) (2) 式の両辺を T で微分すると,

$$\frac{1}{(1-T)^2} = 1 + 2T + 3T^2 + 4T^3 + \cdots \tag{6}$$

となることが分かりますが, さらに, (6) 式において, $T \rightsquigarrow -T$ と置き換えることで,

$$\frac{1}{(1+T)^2} = 1 - 2T + 3T^2 - 4T^3 + \cdots \tag{7}$$

となることが分かります. これより,

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{\{1+(x-2)\}^2} \\ &= 1 - 2(x-2) + 3(x-2)^2 - \cdots \qquad (\text{ (7) 式で } T = x-2 \text{ とした })\end{aligned} \tag{8}$$

となることが分かります.

(4) (2) と同様に, (♡) 式より, $g_2(x)$ は,

$$g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - (x-2) \cdot \frac{g_1(x)}{(x-1)^2} \tag{9}$$

と表わせることに注意して, (9) 式の右辺の第二項に現われる

$$\frac{g_1(x)}{(x-1)^2}$$

という関数の $x=2$ のまわりでの Taylor 展開を, $b_0, b_1, \cdots \in \mathbb{R}$ として,

$$\frac{g_1(x)}{(x-1)^2} = b_0 + b_1(x-2) + \cdots \tag{10}$$

と表わすことにすると, (8) 式, (9) 式, (10) 式から,

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} - (x-2) \cdot \frac{g_1(x)}{(x-1)^2} \\ &= \{1 - 2(x-2) + 3(x-2)^2 - \cdots\} - (x-2)\{b_0 + b_1(x-2) + \cdots\} \\ &= 1 - (2+b_0)(x-2) + (3-b_1)(x-2)^2 - \cdots \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $g_2(x)$ の $x=2$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$g_2(x) = 1 + \cdots$$

という形であることが分かります.

もちろん, (4) 式, あるいは, (♡) 式を用いて,

$$g_2(2) = 1$$

となることを確かめることで, $g_2(x)$ の $x = 2$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} g_2(x) &= g_2(2) + g_2'(2)(x-2) + \cdots \\ &= 1 + \cdots \end{aligned}$$

という形になることを結論しても構いません.

(5) $g_1(x) = -x$, $g_2(x) = 1$ としてみると,

$$\begin{aligned} (x-2)g_1(x) + (x-1)^2 g_2(x) &= -(x-2)x + (x-1)^2 \\ &= -x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (♡) 式が成り立つことが分かります.

4　(♡) 式の一般解はどうなるのか

ここで, 気になる方もいるかもしれませんので, (♡) 式の一般解がどうなるのかということを考えてみることにします.

まず, 問 1 の (2) より, $g_1(x)$ の $x = 1$ における Taylor 展開に現われる項のうち, $(x-1)^2$ 以上の項を $(x-1)^2$ で括ってみると, $g_1(x)$ は,

$$g_1(x) = -x + (x-1)^2 h_1(x) \tag{11}$$

という形に表わせることが分かります. ここで, **$g_1(x)$ は多項式である**ということに注意すると, $g_1(x)$ の Taylor 展開には有限個の項しか登場しないということが分かりますから, **$h_1(x)$ も多項式になる**ということが分かります.[2] 同様にして, 問 1 の (4) より, $g_2(x)$ も, 適当な多項式 $h_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ を用いて,

$$g_2(x) = 1 + (x-2)h_2(x) \tag{12}$$

という形に表わせることが分かります. そこで, (11) 式, (12) 式を (♡) 式に代入してみると,

$$\begin{aligned} 1 &= (x-2)g_1(x) + (x-1)^2 g_2(x) \\ &= (x-2)\{-x + (x-1)^2 h_1(x)\} + (x-1)^2\{1 + (x-2)h_2(x)\} \\ &= 1 + (x-2)(x-1)^2\{h_1(x) + h_2(x)\} \end{aligned}$$

[2] 多項式 $g_1(x)$ を $x = 1$ のまわりで Taylor 展開するとは, $x = (x-1) + 1$ と考えて, $g_1(x)$ を $(x-1)$ のベキの形に整理するということでした.

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}(\heartsuit)\ \text{式が成り立つ.} &\iff (x-2)(x-1)^2\{h_1(x)+h_2(x)\}=0\\ &\iff h_1(x)+h_2(x)=0\\ &\iff h_1(x)=-h_2(x)\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$h_1(x)=-h_2(x)=m(x)$$

と書くことにすれば, $(\heartsuit)$ 式の一般解は, $m(x)\in\mathbb{C}[x]$ を, 勝手な多項式として,

$$\begin{cases} g_1(x)=-x+(x-1)^2m(x)\\ g_2(x)=1-(x-2)m(x)\end{cases}$$

という式で与えられることが分かります.

5　問 2 を見直すと

さて, 2 節でも触れたように, 今回の演習の目標は, 勝手にひとつ与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

行列 A の一般固有ベクトル空間による $\mathbb{C}^n$ の直和分解

$$\mathbb{C}^n=V(\lambda_1)_{\mathrm{gen}}\oplus V(\lambda_2)_{\mathrm{gen}}\oplus\cdots\oplus V(\lambda_N)_{\mathrm{gen}}$$

というように, **行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解される**ということを理解するということにあります. 以下で見るように, 議論の鍵となるのが, 問 2 で考えた $(\heartsuit)$ 式という等式なのですが, **「行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ に注目する」ということと, 「(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の持つ性質をうまく用いる」ということが, ここでのアイデアになります**. そこで, 一般的な状況を扱う前に, まずは, 問 2 の問題の意味を **(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアル**という立場から見直してみることにします. 慣れないうちは, 議論が抽象的に感じられるかもしれませんが, 余り気にせずに, 軽い気持ちで読み進めてみて下さい. 後で, もう少し, こうしたことを考える背景や幾何学的なイメージについても触れてみようと思います.

いま, 問 1 の結果から, 与えられた行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x)=(x-1)^2(x-2)$$

となることが分かります. **この多項式 $\psi_A(x)$ は「$x=1$ に対応した部分」である $(x-1)^2$ と「$x=2$ に対応した部分」である $(x-2)$ からできている**と考えることができます. そこで, $\psi_A(x)$ から,「$x=1$ に対応した部分」,「$x=2$ に対応した部分」を, それぞれ取り除くことで,

多項式 $f_1(x), f_2(x)$ の定義式

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{\psi_A(x)}{(x-1)^2} = x-2 \\ f_2(x) = \dfrac{\psi_A(x)}{x-2} = (x-1)^2 \end{cases}$$

という二つの多項式を考えて, (一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の中で, $f_1(x), f_2(x)$ の生成するイデアル I を考えてみることにします. 第 11 回の問 2 のところでは, このようなイデアルのことを,

多項式 $f_1(x), f_2(x)$ の生成するイデアル

$$I = \langle\, f_1(x), f_2(x)\,\rangle \subset \mathbb{C}[x]$$

という記号で表わすことにしましたが, イデアル I は, **$f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ という二つの多項式を含むようなイデアルの中で, 包含関係 $\subset$ に関して最小のイデアル**であり, 具体的には, 次のように記述できるのでした.

まず, I は $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ を含むイデアルであるということから, 勝手な二つの多項式 $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f_1(x)g_1(x),\ f_2(x)g_2(x) \in I$$

となることが分かりますから,

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) \in I \tag{13}$$

となることが分かります. したがって, イデアル I は, (13) 式のような形の多項式をすべて含まなければならないことが分かります. 一方, $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ を用いて,

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)$$

という形に表わされる多項式全体の集合がイデアルになるということも確かめることができますから,[3] 結局, $f_1(x), f_2(x)$ の生成するイデアル I は, 具体的に,

イデアル I の具体的な記述 (その１)

$$I = \{\, f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x] \,\} \tag{14}$$

というように記述できることが分かるのでした.

さて, こちらも, 第 11 回の問 2 のところで見たように, (一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の勝手なイデアル I の抽象的な構造はとても簡単な形をしていて, **イデアル I に属する 0 と異なる多項式の中で, 多項式の次数の最も低い多項式 $d(x) \in I$ を, 勝手にひとつ取ってくると, I に属するすべての多項式は $d(x)$ で割り切れる**ということが証明できるのでした. すなわち, イデアル I は, このような多項式 $d(x)$ を用いて,

[3] 皆さん, 確かめてみて下さい.

イデアル I の具体的な記述（その２）

$$
\begin{aligned}
I &= \{\, d(x)h(x) \in \mathbb{C}[x] \mid h(x) \in \mathbb{C}[x] \,\} \\
&= d(x) \cdot \mathbb{C}[x]
\end{aligned}
$$

というように記述することができるのでした.

そこで, 我々が問題としている $f_1(x), f_2(x)$ の生成するイデアル I の場合に, $d(x)$ が何になるのかということを考えてみます.[4] いま, 定義により,

$$f_1(x) \in I$$

となりますから, $d(x)$ は $f_1(x) = (x-2)$ を割り切らなければならないことが分かります. したがって, この時点で, $d(x)$ は,

$$d(x) = 1,\ (x-2)$$

のうちのいずれかでなければならないことが分かります. さらに,

$$f_2(x) \in I$$

となりますから, $d(x)$ は $f_2(x) = (x-1)^2$ も割り切らなければならないことが分かります. したがって, この時点で, $d(x) = (x-2)$ である可能性はなくなって,

$$d(x) = 1$$

となることが分かります.

以上から,

$$
\begin{aligned}
I &= \langle\, 1 \,\rangle \\
&= 1 \cdot \mathbb{C}[x] \\
&= \{\, 1 \cdot h(x) \in \mathbb{C}[x] \mid h(x) \in \mathbb{C}[x] \,\} \\
&= \mathbb{C}[x]
\end{aligned}
$$

となることが分かりました. 特に,

$$1 = d(x) \in I$$

となることが分かりますが, イデアル I の (14) 式という表示を考えると,

$$
\begin{aligned}
1 &= f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) \\
&= (x-2)g_1(x) + (x-1)^2 g_2(x)
\end{aligned}
$$

[4] 第 11 回の問 2 のところでも注意したように, 与えられたイデアル I に対して, $d(x) \in \mathbb{C}[x]$ の取り方は唯一通りではありませんが, さらに, 多項式 $d(x)$ の x に関する最高次の係数が 1 になるという条件を課すと, $d(x)$ は唯一通りに定まりますから, 以下では, 常に, $d(x)$ として, このような多項式を考えることにします.

となる多項式 $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在するはずです．これらの多項式を具体的に求めて下さいというのが, 問 2 の問題の意味です．すなわち, 上の議論から, $f_1(x), f_2(x)$ の生成するイデアル

$$I = \langle\, f_1(x), f_2(x) \,\rangle$$

に属する 0 と異なる多項式の中で, 次数が最も低い多項式は定数関数 1 になるはずですが, 定数関数 1 をイデアル I の「生成元」$f_1(x), f_2(x)$ を用いて具体的に表わしてみて下さいということです.

いま, ($\heartsuit$) 式を $g_1(x)$ について解いてみると,

$$g_1(x) = \frac{1}{x-2} - (x-1)^2 \cdot \frac{g_2(x)}{x-2} \tag{15}$$

となることが分かりますが, (15) 式の右辺の第二項には $(x-1)^2$ が掛っていることに注意すると, **$g_1(x)$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開の形は, $(x-1)$ について一次の項までは, 第一項である $\frac{1}{x-2}$ からピッタリ決まってしまう**ということが分かります．すなわち, 問 2 の解答でも見たように, $\frac{g_2(x)}{x-2}$ という関数の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開を, $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{R}$ として,

$$\frac{g_2(x)}{x-2} = a_0 + a_1(x-1) + \cdots$$

と表わすことにすると, $g_1(x)$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{x-2} - (x-1)^2 \cdot \frac{g_2(x)}{x-2} \\ &= \{-1-(x-1)-(x-1)^2-\cdots\} - (x-1)^2\{a_0 + a_1(x-1) + \cdots\} \\ &= -1-(x-1)-(a_0+1)(x-1)^2+\cdots \end{aligned}$$

というように, $(x-1)$ について一次の項までは, 第一項である $\frac{1}{x-2}$ からピッタリ決まってしまうことが分かります．そこで, 問 2 では, この事実に注目して, ($\heartsuit$) 式の解を具体的に求めてもらうという形で問題を出題してみました．このとき, Taylor 展開の各項のうち, ピッタリと値が定まる最初の部分だけを取り出すことで, ($\heartsuit$) 式の解が得られるということは, 例えば, 複素関数論の知識を用いるとスッキリと議論できるのですが, そうした予備知識を必要とする話は用いずに, 問 2 の (5) で見たように, 実際に解になっていることを直接確かめてもらうという形で出題してみました.

ここでは, **(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアル**という視点から, ($\heartsuit$) 式を見直してみましたが, イデアルを用いた議論は抽象的で分かりづらいと思われる方は, 次のように, **有理関数の部分分数展開**と関連付けて, ($\heartsuit$) 式を理解してみて下さい．いま, ($\heartsuit$) 式の両辺を, 行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

で割り算してみると, ($\heartsuit$) 式は,

$$(\heartsuit) \iff \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{g_1(x)}{(x-1)^2} + \frac{g_2(x)}{x-2} \tag{16}$$

というように書き直せることに注意します. 一方, 有理関数

$$\frac{1}{\psi_A(x)} = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$

の部分分数展開を, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ として,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{\alpha}{(x-1)^2} + \frac{\beta}{(x-1)} + \frac{\gamma}{x-2} \tag{17}$$

と表わすことにします. ここで, (17) 式の右辺に現われる項のうち,「$x=1$ に対応した部分」と「$x=2$ に対応した部分」を, それぞれ, ひとつの項にまとめて表わすと,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{\alpha+\beta(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{x-2} \tag{18}$$

となることが分かりますが, (16) 式, (18) 式を見比べてみると,

$$\begin{cases} g_1(x) = \alpha + \beta(x-1) \\ g_2(x) = \gamma \end{cases}$$

が ($\heartsuit$) 式の解となることが分かります. そこで, 実際に, 部分分数展開を求めてみると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} \\ &= \frac{-x}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{cases} g_1(x) = -1-(x-1) \\ g_2(x) = 1 \end{cases} \tag{19}$$

となることが分かります.[5]

(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアルを用いた議論は抽象的で分かりづらいと思われる方は, 上のように, **($\heartsuit$) 式とは, (18) 式という有理関数 $\frac{1}{\psi_A(x)}$ の部分分数展開を表わす式から, 両辺の分母を払って得られる式である**と考えてみて下さい. このような視点で ($\heartsuit$) 式を眺めることにすると, 問 2 で行なった考察も**「Taylor 展開を用いた部分分数展開の計算法」**であると解釈することができます.

6 ($\heartsuit$) 式の幾何学的なイメージについて

次に, 数学者が, ($\heartsuit$) という式で, どんなことをイメージしているのかということを, 少し説明してみることにします. 議論の根底には, 第 11 回の問 2 のところで触れた**「代数学と幾何学の同値性」**という考え方があるのですが, すぐには納得できないと思う部分があっても, あまり気にせずに, 気楽に眺めてみて下さい.

[5] もちろん, (19) 式は, 問 2 の (2), (4) の主張と矛盾しては困るわけです.

第 11 回の問 2 のところで説明したように,

空間と可換環の間の対応

$$\text{空間}:M=\mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \text{可換環}:R=\mathscr{F}_M=\mathbb{C}[x]$$

という「空間」と「可換環」の間の対応を信じることにすると, 部分空間とイデアルの間に,

部分空間とイデアルの間の対応

$$\text{部分空間}:N=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\} \quad \longleftrightarrow \quad \text{イデアル}:I_N=\langle\, \textstyle\prod_{k=1}^{m}(x-\lambda_k)\,\rangle \tag{20}$$

という一対一対応があると考えることは自然なことのように思われます. そこで, 以下では, **「(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアルを考える」ということは,「複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有限個の点からなる部分空間を考える」ということと同じことである**と「見切って」考察を進めてみることにします.

さて, 第 11 回の問 2 のところで見たように, 一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, **行列 A を「根」に持つような多項式全体の集合**

行列 A に対応したイデアル

$$\boldsymbol{I_A=\{f(x)\in\mathbb{C}[x]\mid f(A)=O\ \}}$$

は (一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアルになるのでした. 具体的には, このような多項式の中で, 次数が最も低いもののことを**行列 A の最小多項式**と呼び, $\psi_A(x)\in\mathbb{C}[x]$ という記号を用いて表わすことにすると, イデアル I_A は,

最小多項式 $\psi_A(x)$ を用いたイデアル I_A の記述

$$\begin{aligned} I_A&=\langle\,\psi_A(x)\,\rangle \\ &=\{\psi_A(x)g(x)\in\mathbb{C}[x]\mid g(x)\in\mathbb{C}[x]\ \} \end{aligned}$$

というように記述することができるのでした. 我々が問題としている

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$$

という行列の場合には,

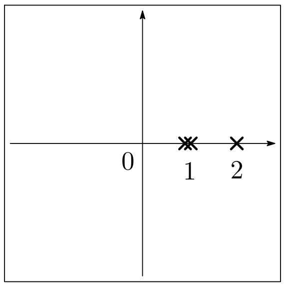
行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x)=(x-1)^2(x-2)$$

となりますから, 対応するイデアル I_A は,

行列 A に対応したイデアル

$$I_A=\langle\,(x-1)^2(x-2)\,\rangle\subset\mathbb{C}[x]$$



$\xleftrightarrow{\text{一対一対応}}$

$$I_A = \langle\, \psi_A(x)\, \rangle$$
$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

空間：$\mathbb{C}$　　　　可換環：$\mathbb{C}[x]$

図 1: 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ が生成するイデアル I_A には, 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の $N = \{1, 1, 2\}$ という部分空間が対応する.

というように表わせることが分かります. すると, (20) 式で与えられる対応によって, 幾何学的な描像では, これは,

イデアル $\boldsymbol{I_A}$ に対応した $\mathbb{C}$ の部分空間

$$N = \{1, 1, 2\} \subset \mathbb{C}$$

という複素平面 $\mathbb{C}$ 内の部分空間を考えることであると解釈することができます (図 1 を参照).

そこで, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の点のうち, **このような点だけが興味の対象である**と考えて, 勝手にひとつ取ってきた多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対しても, **関数 $\boldsymbol{h(x)}$ のこれらの点での値にのみ関心がある**と考えてみることにします. ここで, $x = 1$ という点は, $\psi_A(x)$ の $(x-1)^2$ という因子に対応していますから, 二重点であると考えるのが自然です. すると, 二重点での関数 $h(x)$ の値 (の情報) ということが問題になりますが, これを, 次のように考えてみることにします.

一般に, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が, 相異なる複素数であるとして,

$$N' = \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}$$

という部分空間を考えてみます. このとき, 部分空間 N' 上での多項式 $h(x)$ の値は,

$$h(\alpha),\ h(\beta) \in \mathbb{C}$$

で与えられますが, 同じ情報は, $h(\alpha), h(\beta)$ の代わりに, 例えば,

$$h(\alpha),\ h(\beta) + h(\alpha) \in \mathbb{C}$$

などを考えても復元することができます. そこで, 部分空間 N' 上での多項式 $h(x)$ の値の情報として,

$$h(\alpha),\ \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \in \mathbb{C}$$

という組を考えることにして, β を α に近付けたと考えてみることにします. すると,

$$\boldsymbol{h(\alpha),\ h'(\alpha)} \in \mathbb{C}$$

が, 二重点 $\{\alpha, \alpha\}$ での多項式 $h(x)$ の値の情報を担っていると解釈することができます. 以下, 三重点, 四重点などでの「値」も, 同様に考えることができます.[6]

我々の場合には, $N = \{1, 1, 2\}$ という部分空間が興味の対象でしたから, **勝手な多項式 $h(x)$ に対して, これらの点での関数 $h(x)$ の「値」**

部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での多項式 $h(x)$ の「値」

$$\boldsymbol{h(1),\ h'(1),\ h(2)} \in \mathbb{C}$$

にのみ関心があるということになります. そこで, この立場から, 問 2 の問題文中の (♡) 式の意味を見直してみることにします.

いま, (♡) 式の左辺に現われる第一項, 第二項を, それぞれ,

多項式 $p_1(x), p_2(x)$ の定義式

$$\begin{cases} p_1(x) = f_1(x)g_1(x) \\ p_2(x) = f_2(x)g_2(x) \end{cases}$$

と表わすことにして, (♡) 式を,

1 の分解

$$p_1(x) + p_2(x) = 1 \tag{21}$$

というように表わしてみます. すると, (21) 式は, **1 という定数関数を $p_1(x), p_2(x)$ という二つの関数に分解した**と解釈することができます.

そこで, どのような関数に分解できたのかということを調べてみるために, それぞれの関数の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での「値」を調べてみることにします. いま, 定義によって,

$$f_1(x) = (x - 2)$$

となりますから,

$$f_1(2) = 0$$

となることが分かります. したがって, $p_1(x)$ の定義から,

$$\begin{aligned} p_1(2) &= f_1(2)g_1(2) \\ &= 0 \cdot g_1(2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

となることが分かります. さらに, (21) 式と (22) 式を合わせると,

$$p_2(2) = 1$$

となることも分かります. 全く同様に, 定義によって,

$$f_2(x) = (x - 1)^2$$

[6] 興味のある方は, その意味付けを考えてみて下さい.

となりますから,

$$f_2(1) = f_2'(1) = 0$$

となることが分かります. したがって, $p_2(x)$ の定義から,

$$\begin{aligned} p_2(1) &= f_2(1)g_2(1) \\ &= 0 \cdot g_2(1) \\ &= 0 \qquad (23) \\ p_2'(1) &= f_2'(1)g_2(1) + f_2(1)g_2'(1) \\ &= 0 \cdot g_2(1) + 0 \cdot g_2'(1) \\ &= 0 \qquad (24) \end{aligned}$$

となることが分かります. さらに, (21) 式と (23) 式, (24) 式を合わせると,

$$\begin{cases} p_1(1) = 1 \\ p_1'(1) = 0 \end{cases}$$

となることも分かります.

以上から, $p_1(x), p_2(x)$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での「値」は, それぞれ,

多項式 $p_1(x), p_2(x)$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での「値」

$$\begin{cases} p_1(1) = 1 \\ p_1'(1) = 0 \\ p_1(2) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} p_2(1) = 0 \\ p_2'(1) = 0 \\ p_2(2) = 1 \end{cases} \qquad (25)$$

という式で与えられることが分かりました. ここで, (25) 式をじっと眺めてみると, **$p_1(x)$ は, $x = 2$ では「情報を持たない」**ということが,[7] 逆に, **$p_2(x)$ は, $x = 1$ では「情報を持たない」**ということが分かります. すなわち, **$p_1(x)$ は「定数関数 1 の $x = 1$ での情報」のみを背負い込み, $p_2(x)$ は「定数関数 1 の $x = 2$ での情報」のみを背負い込むというように, 定数関数 1 が分解されている**と考えることができます. こうした理由で, (21) 式で与えられる分解を **(部分空間 N における) 1 の分解**などと呼んだりします.

そこで, この「1 の分解」の意味をより良く理解するために, 多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ を, 勝手にひとつ取ってきて, (21) 式の両辺に掛け算してみると, どうなるのかということを考えてみることにします. すると, 前と同様に,

多項式 $h_1(x), h_2(x)$ の定義式

$$\begin{cases} h_1(x) = h(x)p_1(x) \\ h_2(x) = h(x)p_2(x) \end{cases}$$

などと書き表わすことにすれば, 関数 $h(x)$ が,

[7] すなわち, **$x = 2$ では 0 という定数関数に見える**ということです.

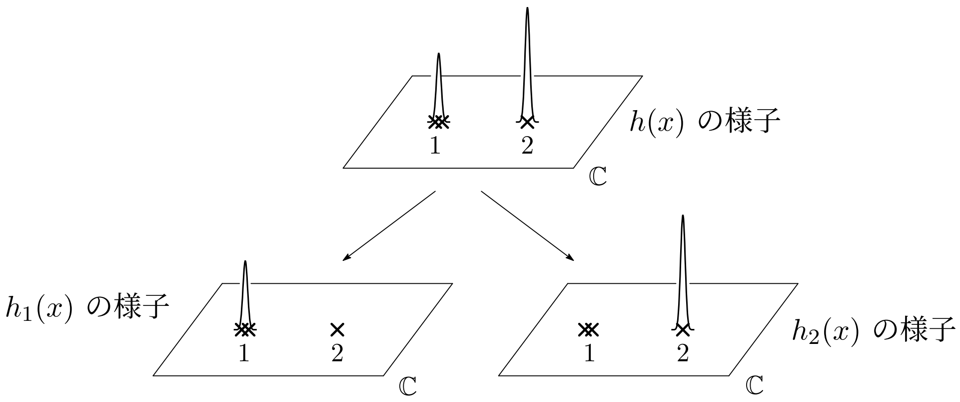


図 2: 「1 の分解」を用いることで, 部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上の関数 $h(x)$ の情報は「$x = 1$ にのみ情報を持つ部分」$h_1(x)$ と「$x = 2$ にのみ情報を持つ部分」$h_2(x)$ に「局所化」される.

「1 の分解」を用いた多項式 $h(x)$ の分解

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) \tag{26}$$

というように分解されるということになります. ここで, (26) 式の分解が, どのような分解なのかを見極めるために, (25) 式に注意して, $h_1(x), h_2(x)$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での「値」を調べてみると,

多項式 $h_1(x), h_2(x)$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での「値」

$$\begin{cases} h_1(1) = h(1) \\ h_1'(1) = h'(1) \\ h_1(2) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} h_2(1) = 0 \\ h_2'(1) = 0 \\ h_2(2) = h(2) \end{cases}$$

となることが分かります.[8] すなわち, **関数 $h_1(x)$ は「$h(x)$ の $x = 1$ での情報」だけを背負い, 関数 $h_2(x)$ は「$h(x)$ の $x = 2$ での情報」だけを背負うように, 関数 $h(x)$ が分解されている**ことが分かります.

以上から, (21) 式という「1 の分解」とは, **多項式 $h(x)$ の値を部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上でのみ考えるとき, $x = 1$, $x = 2$ という, それぞれの点での関数 $h(x)$ の値の情報を「局所化」するような分解**

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

を生み出す「分解の素」であると理解することができることが分かりました (図 2 を参照).[9]

ここでは, $\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ という特別な多項式をもとにして説明しましたが,

[8]皆さん, 確かめてみて下さい.

[9]多項式 $h(x)$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上での値だけに注目しているということを強調するために, 図 2 では, 部分空間 N 以外の点での $h(x)$ の値は 0 であると解釈して表わすことにしました. また, 本当は, 二重点 $x = 1$ における関数 $h(x)$ の値は, $(h(1), h'(1))$ というベクトル値になるわけですが, あくまでも大まかなイメージを与えることを第一に考えたので, 図 2 では, この点は無視して描くことにしました.

全く同様の考察を, 一般の多項式に対して行なうことができます. すなわち, 相異なる複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ と自然数 $d_1, d_2, \cdots, d_L \in \mathbb{N}$ に対して,

行列 A の最小多項式 (一般の場合)

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{d_i}$$

であるとして, 同様の考察を行なうことができます. すると, この場合には,

イデアル I_A に対応した $\mathbb{C}$ の部分空間

$$N = \{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{d_1\text{ 個}}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{d_2\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{\lambda_L, \cdots, \lambda_L}_{d_L\text{ 個}}\} \subset \mathbb{C}$$

という部分空間 N 上でのみ多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ の「値」を考えるということになります.

そこで, 前と同様に, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して, $\psi_A(x)$ から $x = \lambda_k$ での情報だけを取り除いた

多項式 $f_k(x)$ の定義式

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{\psi_A(x)}{(x - \lambda_k)^{d_k}} \\ &= \prod_{i \neq k} (x - \lambda_i)^{d_i} \end{aligned}$$

という多項式たちを考えて, $f_k(x)$ たちの生成する $\mathbb{C}[x]$ のイデアル

$f_k(x)$ たちの生成する $\mathbb{C}[x]$ のイデアル

$$I = \langle\, f_1(x), f_2(x), \cdots, f_L(x) \,\rangle \subset \mathbb{C}[x]$$

を考えてみます. すると, 前と同様に, イデアル I は,

イデアル I は $\mathbb{C}[x]$ と等しくなる

$$\begin{aligned} I &= \langle 1 \rangle \\ &= \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

となることが分かります.[10] したがって,

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \cdots + f_L(x)g_L(x) = 1 \tag{27}$$

となるような多項式 $g_k(x) \in \mathbb{C}[x]$, $(k = 1, 2, \cdots, L)$ が存在することが分かります. 実際, これらの多項式 $g_k(x)$ たちは, 例えば, 問 2 と同様に考えることで, 具体的に求めることができます.

[10] 皆さん, 確かめてみて下さい.

あるいは, 5 節と同様に,

$$\frac{1}{\psi_A(x)}$$

という有理関数の部分分数展開を考えて, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,「$x = \lambda_k$ に対応した部分」を, それぞれ, ひとつの項にまとめて,

$$\frac{1}{\psi_A(x)} = \frac{g_1(x)}{(x-\lambda_1)^{d_1}} + \frac{g_2(x)}{(x-\lambda_2)^{d_2}} + \cdots + \frac{g_L(x)}{(x-\lambda_L)^{d_L}} \tag{28}$$

という形に表わすことにします. このとき, (28) 式の分母を払って得られる式が, (27) 式であると考えてもらっても構いません.

そこで, (27) 式の左辺に現われるそれぞれの項を,

多項式 $p_k(x)$ の定義式

$$p_k(x) = f_k(x)g_k(x), \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

と表わすことにして, (27) 式も,

1 の分解

$$p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_L(x) = 1 \tag{29}$$

というように表わすことにします. このとき, $k_0 \in \{1, 2, \cdots, L\}$ を勝手にひとつ取ってきて, それぞれの関数 $p_k(x)$ の $x = \lambda_{k_0}$ での「値」がどうなるかということを考えてみます.

いま, $x = \lambda_{k_0}$ は d_{k_0}-重点ですから, 勝手な多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ の $x = \lambda_{k_0}$ での「値」は,

多項式 $h(x)$ の $x = \lambda_{k_0}$ での「値」

$$h(\lambda_{k_0}),\ h'(\lambda_{k_0}),\ \cdots,\ h^{(d_{k_0}-1)}(\lambda_{k_0}) \in \mathbb{C}$$

という値たちで表わされることになります. そこで, 定義に戻って考えてみると, $k \neq k_0$ に対して, $f_k(x)$ は,

$$f_k(x) = (x-\lambda_{k_0})^{d_{k_0}} \cdot \prod_{i \neq k, k_0} (x-\lambda_i)^{d_i}$$

というように, $(x-\lambda_{k_0})^{d_{k_0}}$ で括れることが分かります. したがって, $k \neq k_0$ のとき,

$$f_k(\lambda_{k_0}) = f_k'(\lambda_{k_0}) = \cdots = f_k^{(d_{k_0}-1)}(\lambda_{k_0}) = 0 \tag{30}$$

となることが分かります.[11] よって,

$$p_k(x) = f_k(x)g_k(x)$$

[11] 例えば, $f_k(x)$ の $x = \lambda_{k_0}$ での Taylor 展開には $(x-\lambda_{k_0})^{d_{k_0}}$ 以上の次数の項しか登場しないことから, (30) 式が成り立つことが分かります. あるいは, 積の微分に関する Leibniz 則

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\ &= f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \cdots + f(x)g^{(n)}(x)\end{aligned}$$

を用いて, (30) 式を確かめることもできます. Leibniz 則自体は, n に関する数学的帰納法を用いて確かめることができます.

という関数に対して, Leibniz 則を適用してみると, (30) 式から, $k \neq k_0$ に対して,

$$p_k(\lambda_{k_0}) = p'_k(\lambda_{k_0}) = \cdots = p_k^{(d_{k_0}-1)}(\lambda_{k_0}) = 0 \tag{31}$$

となることが分かります.[12] さらに, (29) 式と (31) 式を合わせて考えると,

$$\begin{aligned} &p_{k_0}(\lambda_{k_0}) = 1 \\ &p'_{k_0}(\lambda_{k_0}) = \cdots = p_{k_0}^{(d_{k_0}-1)}(\lambda_{k_0}) = 0 \end{aligned}$$

となることも分かります.

以上から, $k, l \in \{1, 2, \cdots, L\}$ として,

多項式 $p_1(x), \cdots, p_L(x)$ たちの部分空間 N 上での「値」

$$\begin{cases} p_k(\lambda_k) = 1 \\ p'_k(\lambda_k) = 0 \\ \quad\vdots \\ p_k^{(d_k-1)}(\lambda_k) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_l(\lambda_k) = 0 \\ p'_l(\lambda_k) = 0 \\ \quad\vdots \\ p_l^{(d_k-1)}(\lambda_k) = 0 \end{cases}, \ (l \neq k \text{ のとき}) \tag{32}$$

となることが分かりました. 前と同様に. ここで, (32) 式をじっと眺めてみると, **それぞれの多項式 $p_k(x)$ は「定数関数 1 の $x = \lambda_k$ における情報」だけを担っている**ことが分かります. その意味で, (29) 式で与えられる分解を **(部分空間 N における) 1 の分解**と呼びます. また, 多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ を勝手にひとつ取ってきて, (29) 式の両辺に掛け算してみると,

多項式 $h_k(x)$ の定義式

$$h_k(x) = h(x)p_k(x), \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として,

「 1 の分解」を用いた多項式 $h(x)$ の分解

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_L(x)$$

という多項式 $h(x)$ の分解が得られますが, 前と同様にして, (32) 式を用いると, $k, l \in \{1, 2, \cdots, L\}$ として,

多項式 $h_1(x), \cdots, h_L(x)$ たちの部分空間 N 上での「値」

$$\begin{cases} h_k(\lambda_k) = h(\lambda_k) \\ h'_k(\lambda_k) = h'(\lambda_k) \\ \quad\vdots \\ h_k^{(d_k-1)}(\lambda_k) = h^{(d_k-1)}(\lambda_k) \end{cases}, \quad \begin{cases} h_l(\lambda_k) = 0 \\ h'_l(\lambda_k) = 0 \\ \quad\vdots \\ h_l^{(d_k-1)}(\lambda_k) = 0 \end{cases}, \ (l \neq k \text{ のとき}) \tag{33}$$

[12] 皆さん, 確かめてみて下さい.

となることが分かります.[13] したがって, (33) 式から, $k=1,2\cdots,L$ に対して, **それぞれの関数 $h_k(x)$ は「関数 $h(x)$ の $x=\lambda_k$ における情報」だけを担っている**ことが分かります. すなわち, (29) 式という「1 の分解」を用いることで, 部分空間 N 上の関数の「値」の情報が「局所化」できることが分かりました.

さて, 第 11 回の解説の最後の部分で, **(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ と整数全体の作る環 $\mathbb{Z}$ とは似ている**ということに少し触れました. 例えば, 勝手な多項式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ が, $0\neq a\in\mathbb{C}$ として,

$$f(x)=a\prod_{i=1}^{L}(x-\lambda_i)^{d_i}$$

というように**一次式の積に分解できる**ということは, 整数の世界では, 勝手な整数 $n\in\mathbb{Z}$ が,

$$n=\pm\prod_{i=1}^{L}p_i^{d_i}$$

というように**素数の積に分解できる**ということに似ています. このとき, 多項式の世界では, $(x-\lambda)$ という一次式に対して, 複素平面の点 $\lambda\in\mathbb{C}$ を対応させたのでした.[14] すると, 整数の世界でも, 各素数 p に対して, 対応する点 $\hat{p}$ が存在すると考えて, そうした点からなるような空間を考えることは自然なことのように思えます. このように, 二つの世界を対比させて考えてみると, 次のような類似があることが分かります.

(一変数) 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ と整数全体の作る環 $\mathbb{Z}$ との類似

複素平面 : $\mathbb{C}$	$\longleftrightarrow$	素数の空間 : $M=\left\{\hat{2},\hat{3},\hat{5},\hat{7},\cdots\right\}$
多項式 : $f(x)=a\prod_{i=1}^{L}(x-\lambda_i)^{d_i}$	$\longleftrightarrow$	整数 : $n=\pm\prod_{i=1}^{L}p_i^{d_i}$
一次式 : $(x-\lambda)$	$\longleftrightarrow$	素数 : p
Taylor 展開 : $f(x)=a_0+a_1(x-\lambda)+\cdots$	$\longleftrightarrow$	p 進展開 : $n=b_0+b_1p+\cdots$
	$\vdots$	

このように考えてみると, **整数とは, 単なる数ではなく, 素数の空間 M 上の「関数」である**と考える方が, より自然な見方なのではないかという気がジワジワとしてきます. 例えば, 一次式 $(x-1)$ とは, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上で, $x=1$ にのみ一位の零点[15]を持つ関数ですから, 上の類似を信じると, 例えば,「素数 7 とは, 素数の空間 M 上で, $\hat{7}$ にのみ一位の零点を持つような関数である」という気がしてきますし,「整数 $12=2^2\cdot 3$ とは, 素数の空間 M 上で, $\hat{2}$ に二位の零点[16]を持ち, $\hat{3}$ に一位の零点を持つような関数である」という気がしてきます. また, 多項式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ の $x=\lambda\in\mathbb{C}$ での値とは, $f(x)$ の $x=\lambda$ のまわりでの Taylor 展開

$$f(x)=a_0+a_1(x-\lambda)+a_2(x-\lambda)^2+\cdots$$

[13] 皆さん, Leibniz 則を用いて, 確かめてみて下さい.

[14] より正確には, $(x-\lambda)$ の生成するイデアル $I=\langle\,(x-\lambda)\,\rangle$ に対して, 複素平面の点 $\lambda\in\mathbb{C}$ を対応させたのでした.

[15] すなわち, 重根ではないということです.

[16] すなわち, 二重根ということです.

を考えると, 定数項 a_0 のことですから, 再び, 上の類似を信じると, 整数 n の点 $\hat{p} \in M$ での値とは, n の p 進展開

$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots$$

を考えると, n を素数 p で割った余り b_0 のことであるという気がしてきます. 例えば,「関数 8 の 点 $\hat{3}$ での値は 2 である」という気がしてきます.[17] このように, 整数を単なる数と考えるのではなく,「素数の空間の上の関数である」と「見切る」ことで, 整数の「関数としての性質」をより良く理解しようという努力の下に, 現在の整数論は発展していると言えます.

このように, 数学の世界では, 皆が「当たり前で分かりきったもの」として一面的な姿でしか見ることができなかった対象を, 異なる角度から考え直してみることで, 思わぬ視点が得られ,「なるほど」という喜びと共に理解が進むということがあります. そして, こうしたより良い視点の発見が, 数千年の歴史を持つ数学の発展を支える原動力になってきたのではないかと思います. このように, 新しい視点で眺めてみることで,「なるほど」という喜びと共に理解が進むということは, 数学に限らず, 他の学問や, ひいては, 人間の文化活動すべてに共通することではないかと思います. ですから, 皆さんが, 将来, どの道に進むことになるにしても, すぐに,「当たり前」とか「つまらない」とか決めつけずに, 色んなことを学び, あれこれ試行錯誤して, 苦労を積み重ねた上で,「なるほど」という喜びとともに, 皆さん自身の世界を深めていかれると良いのではないかと思います.

7　問 3 の解答

(1) 問 2 の ($\heartsuit$) 式の変数 x のところに, 行列 A を代入してみると, P_1, P_2 の定義により, I を 3 行 3 列の単位行列として,

$$\begin{aligned} I &= f_1(A)g_1(A) + f_2(A)g_2(A) \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned} \tag{34}$$

となることが分かります. そこで, (34) 式の両辺に現われる行列を, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に施してみると,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= I\mathbf{u} \\ &= (P_1 + P_2)\mathbf{u} && \text{((34) 式から)} \\ &= P_1\mathbf{u} + P_2\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ は,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

というように分解されることが分かります.

[17] $8 = 2 + 2 \cdot 3$ となります.

(2) 問 1 の (2) の結果から, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は,

$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2) \tag{35}$$

となることが分かりますが, 最小多項式の定義によって,

$$\psi_A(A) = O \tag{36}$$

となることに注意します. いま, (35) 式と問 2 における $f_1(x),\ f_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ の定義から,

$$\psi_A(x) = (x-1)^2 f_1(x) \tag{37}$$

$$\psi_A(x) = (x-2) f_2(x) \tag{38}$$

と表わせることが分かりますが, (37) 式, (38) 式の両辺に, $x = A$ を代入してみると, (36) 式より,

$$(A-I)^2 f_1(A) = O \tag{39}$$

$$(A-2I) f_2(A) = O \tag{40}$$

となることが分かります. よって, (39) 式より,

$$\begin{aligned}
(A-I)^2\mathbf{u}_1 &= (A-I)^2 P_1\mathbf{u} && (\ \mathbf{u}_1 \text{ の定義から }) \\
&= (A-I)^2 f_1(A) g_1(A)\mathbf{u} && (\ P_1 \text{ の定義から }) \\
&= \left\{(A-I)^2 f_1(A)\right\} g_1(A)\mathbf{u} \\
&= O \cdot g_1(A)\mathbf{u} && (\ (39) \text{ 式から }) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となることが分かります. 全く同様にして, (40) 式から,

$$\begin{aligned}
(A-2I)\mathbf{u}_2 &= (A-2I) P_2\mathbf{u} && (\ \mathbf{u}_2 \text{ の定義から }) \\
&= (A-2I) f_2(A) g_2(A)\mathbf{u} && (\ P_2 \text{ の定義から }) \\
&= \left\{(A-2I) f_2(A)\right\} g_2(A)\mathbf{u} \\
&= O \cdot g_2(A)\mathbf{u} && (\ (40) \text{ 式から }) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) 問 2 の結果から, ($\heartsuit$) 式を満たすような多項式 $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ として, 例えば,

$$\begin{cases} g_1(x) = -x \\ g_2(x) = 1 \end{cases}$$

と取れることが分かりますから,

$$P_1 = -(A-2I)A$$

$$
\begin{aligned}
&= -\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 11 & -7 \\ -5 & 19 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\
P_2 &= (A-I)^2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 19 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 19 & -11 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

そこで, 第 8 回の問 3 のときと同様に, $\mathrm{Im}\, P_1$ の基底を求めるために, 列変形のみを用いて, 行列 P_1 を列変形に関する「精一杯の見やすい形」に変形してみると, 例えば,

$$
P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列目}+3\text{ 列目}\times 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times(-1)]{2\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times(-1)}
$$
$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 列目}\times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

というように変形できることが分かります. よって, $\mathrm{Im}\, P_1$ の基底として, 例えば,

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
$$

を取ることができることが分かります.[18] 同様に, 行列 P_2 を列変形してみると, 例えば,

$$
P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times(-1)]{2\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

というように変形できることが分かります. よって, $\mathrm{Im}\, P_2$ の基底として, 例えば,

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}
$$

[18] もちろん, $\mathrm{Im}\, P_1$ の基底は, これでなくとも構いません.

を取ることができることが分かります.[19]

さて, 上の解答では, (♡) 式の解として,

$$\begin{cases} g_1(x) = -x \\ g_2(x) = 1 \end{cases} \tag{41}$$

という解を用いて, P_1, P_2 を求めましたが, 気になる方がいるかもしれませんから, ここで, $g_1(x), g_2(x)$ として, (41) 式で与えられる特殊解とは異なる解を取ってくるとどうなるのかということを考えてみることにします. 問 2 のところで見たように, (♡) 式の一般解は, $m(x) \in \mathbb{C}[x]$ を, 勝手な多項式として,

$$\begin{cases} g_1(x) = -x + (x-1)^2 m(x) \\ g_2(x) = 1 - (x-2)m(x) \end{cases} \tag{42}$$

という形で与えられることが分かります. そこで, (42) 式で与えられる解を用いて, P_1 を求めてみると,

$$\begin{aligned} P_1 &= f_1(A) \cdot \{-A + (A-I)^2 m(A)\} \\ &= -f_1(A)A + f_1(A)(A-I)^2 m(A) \\ &= -f_1(A)A + (A-I)^2 f_1(A) m(A) \end{aligned} \tag{43}$$

となることが分かりますが, (39) 式に注意すると, (43) 式の第二項は,

$$\begin{aligned} (A-I)^2 f_1(A) m(A) &= O \cdot m(A) \\ &= O \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, P_1 は, $m(x)$ の取り方に依らず, 常に,

$$\begin{aligned} P_1 &= -f_1(A)A \\ &= -(A-2I)A \end{aligned}$$

で与えられることが分かります. 全く同様にして, (40) 式より, P_2 も, $m(x)$ の取り方に依らず, 常に,

$$P_2 = (A-I)^2$$

で与えられることが分かります.

8　問 3 を見直すと

さて, 問 2 のところでは,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$$

[19] もちろん, $\operatorname{Im} P_2$ の基底は, これでなくとも構いません.

という行列の最小多項式

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

に注目して, 勝手な多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ を, $\psi_A(x)$ に対応して定まる $\mathbb{C}$ の部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上に制限して考えるということを試みました. このとき,

多項式 $p_1(x), p_2(x)$ の定義式

$$\begin{cases} p_1(x) = f_1(x)g_1(x) \\ p_2(x) = f_2(x)g_2(x) \end{cases} \tag{44}$$

として, 問 2 の問題文中の $(\heartsuit)$ 式を,

1 の分解

$$1 = p_1(x) + p_2(x) \tag{45}$$

というように書き直してみると, $p_1(x)$ は「定数関数 1 の $x=1$ における情報」だけを担い, $p_2(x)$ は「定数関数 1 の $x=2$ における情報」だけを担うような分解であることが分かるのでした. また, (45) 式の両辺に, 勝手な多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ を掛け算してみると,

多項式 $h_1(x), h_2(x)$ の定義式

$$\begin{cases} h_1(x) = h(x)p_1(x) \\ h_2(x) = h(x)p_2(x) \end{cases}$$

として,

「1 の分解」を用いた多項式 $h(x)$ の分解

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

という関数 $h(x)$ の分解が得られますが, $h_1(x)$ は「$h(x)$ の $x=1$ における情報」だけを担い, $h_2(x)$ は「$h(x)$ の $x=2$ における情報」だけを担うような関数であることが分かるのでした. この意味で, (45) 式は,「部分空間 $N = \{1, 1, 2\}$ 上の関数 $h(x)$ の情報」を「部分空間 $N_1 = \{1, 1\}$ 上の関数の情報」と「部分空間 $N_2 = \{2\}$ 上の関数の情報」とに「局所化する」ようなものであると解釈することができました.

そこで, (45) 式が,「行列の世界」では, どのようなことを意味しているのかということを考えてみて下さいというのが, 問 3 の問題の意味です. 行列の世界では, 多項式の変数 x のところに, 行列 A を代入して考えてみることが自然ですから, $(\heartsuit)$ 式をそのまま考察するのではなく,

行列 P_1, P_2 の定義式

$$\begin{cases} P_1 = p_1(A) \\ P_2 = p_2(A) \end{cases} \tag{46}$$

として,

「単位行列の分解」

$$I = P_1 + P_2 \tag{47}$$

という**「単位行列の分解」**が何を意味しているのかということを考察してみることにしました. さらに, 行列の性質は, その行列を様々なベクトルに作用させてみることで明らかになることが多いですから, ここでも, (47) 式の両辺を, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に作用させて,

ベクトル $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ の定義式

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = P_1\mathbf{u} \\ \mathbf{u}_2 = P_2\mathbf{u} \end{cases}$$

として,

「単位行列の分解」を用いたベクトル $\mathbf{u}$ の分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{48}$$

というベクトル $\mathbf{u}$ の分解が何を意味しているのかということを考えてみることにしました. このとき, 問 3 では, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^3$ が, それぞれ,

$$(A - I)^2\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \tag{49}$$

$$(A - 2I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \tag{50}$$

という関係式を満たすということを確かめてみましたが, 議論を見返すと, (49) 式, (50) 式が成り立つ根拠は, 次のような点にあることが分かります.

いま, $f_1(x)$ の定義の仕方から, A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は,

$$\psi_A(x) = (x - 1)^2 f_1(x)$$

というように表わせることが分かります. したがって, $p_1(x)$ に $(x - 1)^2$ を掛け算してみると,

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 p_1(x) &= (x - 1)^2 f_1(x) g_1(x) \\ &= \psi_A(x) g_1(x) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

行列 A に対応したイデアル

$$\begin{aligned} I_A &= \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O \ \} \\ &= \{ \psi_A(x) g(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g(x) \in \mathbb{C}[x] \ \} \\ &= \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

として,

$$(x-1)^2 p_1(x) \in I_A \tag{51}$$

となることが分かります. すなわち, (51) 式は, $f_1(x)$ に足りなかった $(x-1)^2$ の部分を復活させたので, $(x-1)^2 p_1(x)$ はイデアル I_A の元になったというように理解することができます. すると, イデアル I_A の定義から,

$$(A-I)^2 P_1 = O \tag{52}$$

となることが分かりますが, この (52) 式が (49) 式の成り立つ根拠であることが分かります. 同様に, $f_2(x)$ に足りなかった $(x-2)$ の部分を復活させると,

$$(x-2) p_2(x) \in I_A$$

となることが分かります. したがって,

$$(A-2I) P_2 = O \tag{53}$$

となることが分かりますが, この (53) 式が (50) 式の成り立つ根拠であることが分かります.

さて, 問 3 で見たことは, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ が, (48) 式のように, それぞれ, (49) 式, (50) 式を満たすようなベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の和の形に表わすことができるということでした. このことは, 第 9 回の問 3 のところで見たような**「線型部分空間の和」**という概念を用いると,

線型部分空間 W_1, W_2 の定義式

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A-I)^2 \mathbf{v} = 0 \ \right\} \\ W_2 &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A-2I) \mathbf{v} = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

として, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &= W_1 + W_2 \qquad (54) \\ &= \{ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^3 \mid \mathbf{v}_1 \in W_1, \, \mathbf{v}_2 \in W_2 \ \} \end{aligned}$$

というように, 線型部分空間 W_1 と W_2 の和として表わせるということですが, 実は, この和は, 第 9 回の問 3 のところで見たような**「直和」**であることが, 次のようにして分かります.

そのためには,

直和の条件

(イ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

となるベクトル $\mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \implies \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります. このうち, (イ) という条件については, 問 3 で見たことから, 勝手にひとつ与えられたベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = P_1\mathbf{u} \\ \mathbf{v}_2 = P_2\mathbf{u} \end{cases}$$

と定めることで満たされることが分かりますから, 後は, (ロ) という条件が満たされることが確かめられればよいということになります. そこで, (46) 式で定まるような行列 P_1, P_2 を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^3$ 上の線型写像が, それぞれの線型部分空間 W_1, W_2 上で, どのような線型写像となるのかということを調べてみることにします.[20]

いま,

$$f_1(x) = x - 2$$

でしたから, $p_1(x)$ は,

$$p_1(x) = g_1(x)(x-2)$$

というように, $(x-2)$ という因子を持つことに注意します. これより, P_1 という行列も,

$$P_1 = g_1(A)(A - 2I) \tag{55}$$

というように, $(A - 2I)$ という因子を持った形に表わせることが分かります. すると, (55) 式から, $\mathbf{v}_2 \in W_2$ に対して,

$$\begin{aligned} P_1\mathbf{v}_2 &= g_1(A)(A-2I)\mathbf{v}_2 && (\text{ (55) 式から }) \\ &= g_1(A)\mathbf{0} && (\ \mathbf{v}_2 \in W_2 \text{ から }) \\ &= \mathbf{0} && (56) \end{aligned}$$

となることが分かりますから, **P_1 という線型写像は線型部分空間 W_2 上では零写像である**ことが分かります. そこで, (56) 式に注意して, (47) 式の両辺を $\mathbf{v}_2 \in W_2$ に施してみると,

$$\mathbf{v}_2 = I\mathbf{v}_2$$

[20] 以下では, 行列 P_1, P_2 と, それらの行列を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^3$ 上の線型写像を同一視して, これらの線型写像も同じ P_1, P_2 という記号を用いて表わすことにします.

$$
\begin{aligned}
&= (P_1 + P_2)\mathbf{v}_2 && \text{((47) 式から)}\\
&= P_1\mathbf{v}_2 + P_2\mathbf{v}_2 \\
&= P_2\mathbf{v}_2 && \text{((56) 式から)}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, **P_2 という線型写像は線型部分空間 W_2 上では恒等写像である**ことが分かります.

全く同様にして, 行列 P_2 は,

$$P_2 = g_2(A)(A - I)^2$$

というように, $(A - I)^2$ という因子を持った形に表わすことができますから, $\mathbf{v}_1 \in W_1$ に対して,

$$P_2\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \tag{57}$$

となることが分かります. すなわち, **P_2 という線型写像は線型部分空間 W_1 上では零写像である**ことが分かります. さらに, (47) 式と (57) 式から,

$$P_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$$

となることが分かりますから, **P_1 という線型写像は線型部分空間 W_1 上では恒等写像である**ことが分かります. 以上をまとめると, $\mathbf{v}_1 \in W_1$, $\mathbf{v}_2 \in W_2$ に対して,

線型部分空間 W_1, W_2 上での線型写像 P_1, P_2 の様子

$$\begin{cases} P_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \\ P_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases}, \qquad \begin{cases} P_2\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\ P_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \end{cases} \tag{58}$$

となることが分かりました.

以上の準備のもとで, (ロ) という条件について考えてみることにします. そこで, いま, $\mathbf{v}_1 \in W_1$, $\mathbf{v}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{59}$$

と仮定してみます. このとき, (58) 式に注意して, (59) 式の両辺に P_1 を施してみると,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= P_1\mathbf{v}_1 + P_1\mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{v}_1 + \mathbf{0} && \text{((58) 式から)}\\
&= \mathbf{v}_1 && (60)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. 全く同様に, (59) 式の両辺に P_2 を施してみると,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= P_2\mathbf{v}_1 + P_2\mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{v}_2 && \text{((58) 式から)}\\
&= \mathbf{v}_2 && (61)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (60) 式, (61) 式から, (ロ) という条件も満たされることが分かりました.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ は,

線型空間 $\mathbb{C}^3$ は W_1, W_2 という二つの「方向」に直和分解される

$$\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2 \tag{62}$$

というように, W_1, W_2 という二つの「方向」に直和分解されることが分かりました. いま, (62) 式の直和分解に応じて, $\mathbb{C}^3$ のベクトルを,

ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ を「成分分解」して表わす

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$$

というように, それぞれの直和成分を用いて表わすことにすると, (58) 式より,

ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ を「成分分解」して線型写像 P_1, P_2 を表わす

$$P_1 \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
$$P_2 \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります. したがって, **P_1, P_2 は, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に対して, それぞれの直和成分 $\mathbf{u_1} \in W_1, \mathbf{u_2} \in W_2$ を取り出す「射影作用素」であること**も合わせて分かりました.

以上により, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が, W_1, W_2 という二つの線型部分空間の直和に分解することが分かりましたが, W_1, W_2 の定義を考えると,

線型部分空間 W_1, W_2 の定義式

$$W_1 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - I)^2 \mathbf{v} = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - 2I) \mathbf{v} = 0 \right\}$$

でしたから, (62) 式は, **線型空間 $\mathbb{C}^3$ が W_1, W_2 という「一般固有ベクトル空間」の直和に分解する**ということを意味していると解釈することができます. こうして, 問 1 の問題文中に与えられた行列 A に対して, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することが分かりました.

さて, 以上の議論は, 6 節で行った議論と比較してみると, より良く理解できるようになるのではないかと思いますので, ここで, 6 節で行った議論との比較をしてみることにします. 6 節では, 最初に, 行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

(の生成するイデアル I_A) に注目し, $\psi_A(x)$ (の生成するイデアル I_A) に対応した複素平面 $\mathbb{C}$ 内の部分空間

$$N = \{1, 1, 2\} \subset \mathbb{C}$$

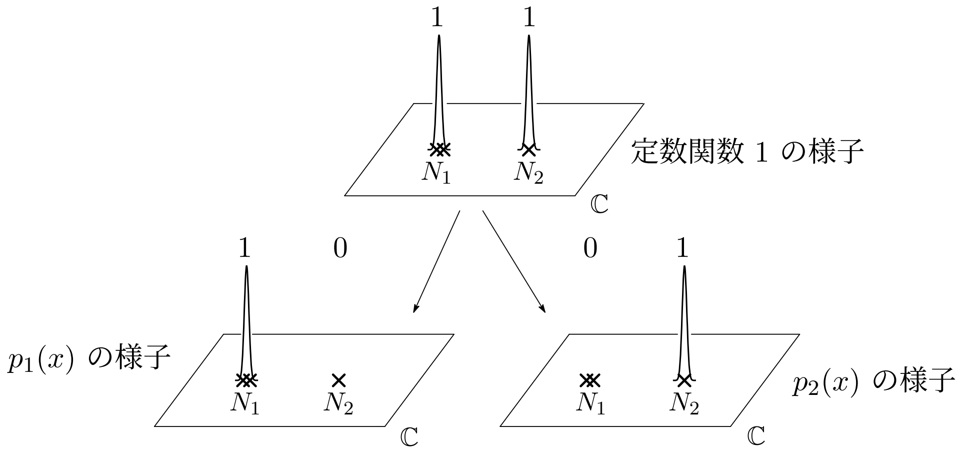


図 3: 部分空間 $N=\{1,1,2\}$ の分解 $N=N_1\sqcup N_2$ に応じて, 定数関数 1 を分解することができる.

を考えました. その上で, 勝手な多項式 $h(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対しても, 関数 $h(x)$ の複素平面 $\mathbb{C}$ 全体での値ではなく, **部分空間 N 上での「値」にのみ関心を持つ**ことにしました. このとき,「1 の分解」を考えると,

$$N_1=\{1,1\},\ N_2=\{2\}$$

として, 部分空間 N が,

$$N=N_1\sqcup N_2$$

というように分解することに応じて,[21] 定数関数 1 も,

$$1=p_1(x)+p_2(x) \tag{63}$$

というように分解しました (図 3 参照). また, 関数 $p_1(x)$ は, N_1 上では定数関数 1 のように, N_2 上では定数関数 0 のように見え, 関数 $p_2(x)$ は, N_1 上では定数関数 0 のように, N_2 上では定数関数 1 のように見えるわけですから, **部分空間 N 上の関数としては**,

$$\begin{cases} p_1(x)^2=p_1(x) \\ p_2(x)^2=p_2(x) \\ p_1(x)p_2(x)=p_2(x)p_1(x)=0 \end{cases} \tag{64}$$

という関係式が成り立つことが分かります. すなわち, 例えば, $p_1(x)^2$ という関数も, 関数 $p_1(x)$ と同様に, N_1 上では定数関数 1 のように見え, N_2 上では定数関数 0 のように見えることになりますから, **部分空間 N 上の関数としては**,

$$p_1(x)^2=p_1(x)$$

となるというわけです.[22]

[21]一般に, $A\cap B=\emptyset$ となるとき, 二つの集合 A,B の和集合 $A\cup B$ を $A\sqcup B$ と表わしたりします.

[22]皆さん, 6 節と同様にして, $p_1(x)^2, p_2(x)^2$ など, (64) 式に現われる関数の部分空間 $N=\{1,1,2\}$ 上での「値」を求めてみて下さい.

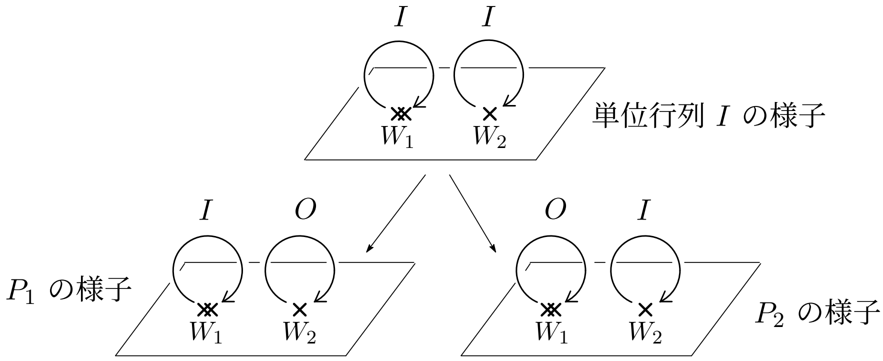


図 4: 線型空間 $\mathbb{C}^3$ の直和分解 $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$ に応じて, 単位行列 I を分解することができる.

一方, この節では, 部分空間 N_1, N_2 に対して, 行列 A の一般固有ベクトル空間

$$W_1 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - I)^2 \mathbf{v} = 0 \right\} \tag{65}$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - 2I) \mathbf{v} = 0 \right\} \tag{66}$$

を対応させて考えました. このとき, (63) 式の両辺に行列 A を代入すると,

$$P_1 = p_1(A), \ P_2 = p_2(A)$$

として,

$$I = P_1 + P_2 \tag{67}$$

という「単位行列の分解」が得られますが, (58) 式で見たように, 行列 P_1 は, W_1 上では単位行列のように, W_2 上では零行列のように見え, 行列 P_2 は, W_1 上では零行列のように, W_2 上では単位行列のように見えることが分かります (図 4 参照).[23] また, 上では注意しませんでしたが,

$$p_1(x)p_2(x) = p_2(x)p_1(x) = \psi_A(x)g_1(x)g_2(x) \in I_A = \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x]$$

となることに注意すると,

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = O \tag{68}$$

となることが分かります. さらに, (68) 式に注意して, (67) 式の両辺に, P_1, P_2 を掛け算してみると, 結局, 行列 P_1, P_2 は,

$$\begin{cases} P_1^2 = P_1 \\ P_2^2 = P_2 \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = O \end{cases} \tag{69}$$

という関係式を満たすことが分かります. すると, 皆さん, お気づきのように, (69) 式は, ちょうど,「行列の世界」での (64) 式の対応物になっていることが分かります.

[23] 図 3 との類似を強調するために, 図 4 においても, W_1, W_2 を, 対応する部分空間 N_1, N_2 のように描いていますが, 本当は, これらは $\mathbb{C}^3$ の線型部分空間を表わしていて, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上に点があるわけではないことに注意して下さい.

以上のように眺めてくると, この節で行なった議論は, 6 節で多項式に対して行なった議論の「行列の世界」での類似になっていることが分かります. また, 皆さんの中で量子力学についてご存じの方がいるとすれば, 6 節で行なった議論とこの節で行なった議論との関係を, 量子力学との類推で, 次のように理解することもできます.

まず, 6 節では, 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の部分空間 N を考えましたが, 量子力学との類推で, N を古典力学での配位空間 (configuration space), あるいは, 相空間 (phase space) の対応物であると考えてみることにします.[24] すると, 部分空間 N 上の関数である多項式 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ は「古典的な観測量」と考えることができますから, $h(x)$ に行列 A を代入して, $h(A)$ という行列を考えるということは,「古典的な観測量」を「量子化」して考えていると解釈することができます. このとき, 行列 $h(A)$ が作用する線型空間 $\mathbb{C}^3$ は,

$$\mathbb{C}^3 \cong \mathscr{H}_N := \text{“}\{f : N \to \mathbb{C}\}\text{”} \tag{70}$$

というように, “配位空間” N 上の関数全体の集合と同一視できますから, まさに,「量子化」を行なっているという雰囲気があります.[25] このように考えてみると, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が,

$$\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$$

というように, 一般固有ベクトル空間 W_1 と W_2 の直和に分解するという事実は,「古典的な描像」で, 部分空間 N が,

$$N = N_1 \sqcup N_2$$

と分解するという事実を「量子化」して眺めたものであると解釈できることが分かります. 興味を持たれた方は, このような視点から, 6 節で行なった議論とこの節で行なった議論を見返してみると, 一般固有ベクトル空間分解に対する理解が深まるのではないかと思います.

さて, 我々は, 一般固有ベクトル空間を, 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

行列 A の (固有値 λ に対応した) 一般固有ベクトル空間

$$V(\lambda)_{\mathrm{gen}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する. }\}$$

というように定義しました. そこで, W_1, W_2 と $V(1)_{\mathrm{gen}}, V(2)_{\mathrm{gen}}$ との間の「見かけの差」が気にかかる方もいるかもしれませんので, 最後に, W_1, W_2 と $V(1)_{\mathrm{gen}}, V(2)_{\mathrm{gen}}$ との関係について考えてみることにします.

まず, $V(1)_{\mathrm{gen}}$ の定義では,

$$(A - I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

[24] 部分空間 N は 0 次元の空間なので, 配位空間 (位置だけの空間) か相空間 (位置と運動量の空間) かという区別はないと考えることができます.

[25] 細かいことですが, n 行 n 列の行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ の次数が n より真に小さくなる場合には, 部分空間 N の点の数も n より真に小さくなりますから, (70) 式の同一視は成り立たないことになります. こうした場合も含めて, 量子力学と話を合わせるためには, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を特性多項式 $\varphi_A(x)$ に置き換えて, この節で行なった議論を, そっくりそのまま繰り返せばよいことが分かります. (この節で行なった議論では, $\psi_A(A) = O$ となることだけを用いていて, $\psi_A(x)$ が最小多項式であること, すなわち, イデアル I_A に属する 0 と異なる多項式の中で, 次数が最も低い多項式であるということは用いていないということに注意して下さい. また, この節で行なったように, 最小多項式 $\psi_A(x)$ にもとづいて議論をするということのご利益については, 10 節を参照して下さい.)

となるような自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在することを要請しているわけですが, 特に, $m = 2$ としてみると,

$$W_1 \subset V(1)_{\text{gen}} \tag{71}$$

となることが分かります. したがって, 逆に,

$$(A - I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する } \implies (A - I)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{72}$$

となることを確かめることができれば,

$$W_1 \supset V(1)_{\text{gen}}$$

となることが分かりますから, (71) 式と合わせて,

$$W_1 = V(1)_{\text{gen}}$$

となることが分かります. そこで, (72) 式について考えてみることにします.

いま, ある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(A - I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{73}$$

という式が成り立っていると仮定してみます. このとき, $m \leq 2$ であるとすると,

$$\begin{aligned}
(A - I)^2 \mathbf{v} &= (A - I)^{2-m}(A - I)^m \mathbf{v} \\
&= (A - I)^{2-m} \mathbf{0} && \text{((73) 式から)} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となり, (72) 式が成り立つことが分かりますから, 以下では, $m \geq 3$ であると仮定することにします. そこで, (52) 式に注意して, $k \geq 2$ として, (67) 式の両辺に, $(A - I)^k$ を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}
(A - I)^k &= (A - I)^k I \\
&= (A - I)^k (P_1 + P_2) && \text{((67) 式から)} \\
&= (A - I)^k P_1 + (A - I)^k P_2 \\
&= (A - I)^{k-2}(A - I)^2 P_1 + (A - I)^k P_2 \\
&= (A - I)^{k-2} O + (A - I)^k P_2 && \text{((52) 式から)} \\
&= (A - I)^k P_2 && (74)
\end{aligned}$$

となることが分かります. ここで, $p_2(x)$ は,

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= g_2(x) f_2(x) \\
&= g_2(x)(x - 1) \cdot (x - 1)
\end{aligned}$$

というように, $(x - 1)$ という因子を持つことに注意して,

$$Q_2 = g_2(A)(A - I)$$

と定めると, (74) 式から,

$$\begin{aligned}(A-I)^k &= (A-I)^k p_2(A)\\ &= (A-I)^k \cdot g_2(A)(A-I)\cdot(A-I)\\ &= g_2(A)(A-I)\cdot(A-I)^{k+1}\\ &= Q_2(A-I)^{k+1}\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, $k \geq 2$ のとき,

$$(A-I)^k = Q_2(A-I)^{k+1} \tag{75}$$

となることが分かります. この (75) 式を用いると,

$$(A-I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

という条件に現われる m というベキを $m=2$ の場合に帰着できることが, 次のようにして分かります.

そこで, いま, ある自然数 $3 \leq m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(A-I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{76}$$

であると仮定してみます. このとき, $k=m-1$ として, (75) 式の両辺を, $\mathbf{v}$ に施してみると,

$$\begin{aligned}(A-I)^{m-1}\mathbf{v} &= Q_2(A-I)^m\mathbf{v}\\ &= Q_2\mathbf{0} && (\ (76)\text{ 式から }) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$(A-I)^{m-1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{77}$$

となることが分かります. ここで, もし, $m-1 \geq 3$ であるとすれば, 今度は, $k=m-2$ として, (75) 式の両辺を, $\mathbf{v}$ に施してみると,

$$\begin{aligned}(A-I)^{m-2}\mathbf{v} &= Q_2(A-I)^{m-1}\mathbf{v}\\ &= Q_2\mathbf{0} && (\ (77)\text{ 式から }) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となることが分かります. この操作は, $(A-I)$ のベキが 2 になるまで続けることができますから, 結局,

$$(A-I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となることが分かります.[26]

[26] m に関する数学的帰納法を用いると, スッキリと証明することができます.

以上から, (72) 式が成り立つことが分かりましたから,

$$W_1 = V(1)_{\mathrm{gen}}$$

となることが分かりました. 全く同様にして,

$$W_2 = V(2)_{\mathrm{gen}}$$

となることも分かります.[27] したがって, (62) 式の

$$\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$$

という直和分解は, 目標としていた

行列 A の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^3$ の直和分解

$$\mathbb{C}^3 = V(1)_{\mathrm{gen}} \oplus V(2)_{\mathrm{gen}}$$

という**一般固有ベクトル空間への直和分解**に他ならないことが分かりました. こうして, (67) 式を用いることで, 問 1 で与えられた行列 A に対して, A の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^3$ の直和分解が得られることが分かりました.

9 一般固有ベクトル空間への直和分解について

さて, 8 節では, 問 1 で与えられた行列 A に対して, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することを見ましたが, 全く同様にして, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手にひとつ与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することが, 次のようにして分かります.[28]

そこで, いま, 勝手にひとつ与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(A)$ が, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ を相異なる複素数として,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{d_i}$$

というように表わされているとします. すると, 問 2 のところで見たように, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

多項式 $f_k(x)$ の定義式

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{\psi_A(x)}{(x - \lambda_k)^{d_k}} \\ &= \prod_{i \neq k} (x - \lambda_i)^{d_i} \end{aligned}$$

[27] 皆さん, W_1 の場合の議論を参考にして, 考えてみて下さい.

[28] 興味がある方は, 8 節で説明したように, 6 節の後半の議論の「量子化」という視点から, この節での議論を眺めてみて下さい.

と定めると,

$$1 = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \cdots + f_L(x)g_L(x)$$

となるような多項式 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_L(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在することが分かりますから,

多項式 $p_k(x)$ の定義式

$$p_k(x) = f_k(x)g_k(x), \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として,

1 の分解

$$1 = p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_L(x) \tag{78}$$

という「1 の分解」が得られることが分かります. すると, (78) 式の両辺に, $x = A$ を代入することで,

行列 P_k の定義式

$$P_k = p_k(A), \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として,

「単位行列の分解」

$$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_L \tag{79}$$

という**「単位行列の分解」**が得られます. そこで, この (79) 式をもとにして, 8 節と同様の議論を行なってみることにします.

まず, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ に対して, (79) 式の両辺を $\mathbf{u}$ に施してみると,

ベクトル $\mathbf{u}_k$ の定義式

$$\mathbf{u}_k = P_k\mathbf{u}, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として, ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ が,

「単位行列の分解」を用いたベクトル $\mathbf{u}$ の分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_L \tag{80}$$

というように分解できることが分かります. いま, $f_k(x)$ の定義から,

$$\psi_A(x) = (x - \lambda_k)^{d_k} f_k(x)$$

となることが分かりますから, 足りない $(x - \lambda_k)^{d_k}$ の部分を補ってやることで, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

$$(x - \lambda_k)^{d_k} p_k(x) = \psi_A(x)g_k(x) \in I_A = \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \tag{81}$$

となることが分かります. よって, (81) 式から,

$$(A - \lambda_k I)^{d_k} P_k = O, \quad (k = 1, 2, \cdots, L) \tag{82}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}(A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{u}_k &= (A - \lambda_k I)^{d_k} P_k \mathbf{u} \\ &= O\mathbf{u} && \text{((82) 式から)} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となることが分かります. 以上から,

線型部分空間 W_k の定義式

$$W_k = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0}\ \}, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として,

$$\mathbf{u}_k \in W_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

となることが分かりますから, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

$$\mathbb{C}^n = W_1 + W_2 + \cdots + W_L \tag{83}$$

というように, 線型部分空間 W_k たちの「和」の形に表わされることが分かります.

そこで, 次に, この「和」が「直和」であることを確かめてみることにします. そのために, $k_0 \in \{1, 2, \cdots, L\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, 線型部分空間 W_{k_0} 上での, それぞれの線型写像 P_l, $(l = 1, 2, \cdots, L)$ の様子を調べてみることにします. すると, $l \neq k_0$ のときには, $p_l(x)$ は,

$$\begin{aligned}p_l(x) &= g_l(x) \prod_{i \neq l} (x - \lambda_i)^{d_i} \\ &= \left\{ g_l(x) \prod_{i \neq l, k_0} (x - \lambda_i)^{d_i} \right\} \cdot (x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0}}\end{aligned}$$

というように, $(x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0}}$ という因子を持つことが分かりますから, 行列 P_l も,

$$Q_l = g_l(A) \prod_{i \neq l, k_0} (A - \lambda_i I)^{d_i}$$

として,

$$P_l = Q_l (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}} \tag{84}$$

というように, $(A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}}$ という因子を持つ形で表わせることが分かります. したがって, (84) 式から, $\mathbf{v}_{k_0} \in W_{k_0}$ に対して,

$$P_l \mathbf{v}_{k_0} = Q_l (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}} \mathbf{v}_{k_0} \qquad \text{((84) 式から)}$$

$$
\begin{aligned}
&= Q_l \mathbf{0} && (\ \mathbf{v}_{k_0} \in W_{k_0} \text{ から }) \\
&= \mathbf{0} && (85)
\end{aligned}
$$

となることが分かります．よって，**$l \neq k_0$ に対して，線型写像 P_l は線型部分空間 W_{k_0} 上で零写像である**ことが分かります．

そこで，(85) 式に注意して，(79) 式の両辺を，$\mathbf{v}_{k_0} \in W_{k_0}$ に施してみると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{k_0} &= I\mathbf{v}_{k_0} \\
&= (P_1 + P_2 + \cdots + P_{k_0} + \cdots + P_L)\mathbf{v}_{k_0} && (\ (79) \text{ 式から }) \\
&= P_1\mathbf{v}_{k_0} + P_2\mathbf{v}_{k_0} + \cdots + P_{k_0}\mathbf{v}_{k_0} + \cdots + P_L\mathbf{v}_{k_0} \\
&= P_{k_0}\mathbf{v}_{k_0} && (\ (85) \text{ 式から })
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから，**線型写像 P_{k_0} は線型部分空間 W_{k_0} 上で恒等写像である**ことが分かります．以上より，$k, l = 1, 2, \cdots, L$ に対して，

線型部分空間 W_k 上での線型写像 P_l の様子

$$
\begin{cases}
P_k\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k, \\
P_l\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \qquad l \neq k \text{ のとき}
\end{cases}
\tag{86}
$$

となることが分かりました．[29]

そこで，8 節と同様にして，(86) 式を用いて，(83) 式で与えられる「和」は，実は，「直和」であることを確かめてみることにします．いま，$\mathbf{v}_k \in W_k$, $(k = 1, 2, \cdots, L)$ として，$\mathbf{0}$ が

$$
\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_L \tag{87}
$$

というように表わされたと仮定してみます．このとき，(86) 式に注意して，$k = 1, 2, \cdots, L$ に対して，(87) 式の両辺に P_k を施してみると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= P_k\mathbf{v}_1 + P_k\mathbf{v}_2 + \cdots + P_k\mathbf{v}_k + \cdots + P_k\mathbf{v}_L \\
&= \mathbf{v}_k
\end{aligned}
$$

となることが分かります．したがって，

$$
\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \cdots = \mathbf{v}_L = \mathbf{0}
$$

となることが分かりますから，(83) 式で与えられる「和」は「直和」であることが分かります．

以上から，線型空間 $\mathbb{C}^n$ が，

[29] 8 節で見たように，(86) 式は，

$$
N_i = \{\underbrace{\lambda_i, \cdots, \lambda_i}_{d_i \text{ 個}}\}, \quad (i = 1, 2, \cdots, L)
$$

として，(78) 式の左辺に現われる関数 $p_l(x)$ たちが，部分空間 N_l 上では定数関数 1 のように見え，$k \neq l$ となる部分空間 N_k 上では定数関数 0 のように見えるという事実の「量子版」になっています．

線型空間 $\mathbb{C}^n$ は $W_1, \cdots, W_L$ という L コの「方向」に直和分解される

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_L \tag{88}$$

というように, 行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解できることが分かりました. ただし, 8 節と同様に, W_k と $V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$ との間の「見かけの違い」が気にかかる方がいるのではないかと思いますので, $k_0 \in \{1, 2, \cdots, L\}$ として, W_{k_0} と $V(\lambda_{k_0})_{\mathrm{gen}}$ との関係を調べてみることにします.

我々は, 行列 A の (固有値 λ_{k_0} に対応した) 一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_{k_0})_{\mathrm{gen}}$ を,

行列 A の (固有値 λ_{k_0} に対応した) 一般固有ベクトル空間

$V(\lambda_{k_0})_{\mathrm{gen}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_{k_0} I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$ となるような自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在する. $\}$

というように定めましたが, 特に, $m = d_{k_0}$ となる場合を考えると,

$$W_{k_0} \subset V(\lambda_{k_0}) \tag{89}$$

となることが分かります. したがって, 逆に,

$$(A - \lambda_{k_0} I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する } \implies (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}} \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{90}$$

となることを確かめることができれば,

$$W_{k_0} \supset V(\lambda_{k_0})_{\mathrm{gen}}$$

となることが分かりますから, (89) 式と合わせて,

$$W_{k_0} = V(\lambda_{k_0})_{\mathrm{gen}}$$

となることが分かります. そこで, (90) 式について考えてみることにします.

いま, ある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(A - \lambda_{k_0} I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{91}$$

となるようなベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ が与えられていると仮定してみます. すると, 8 節での議論と同様に, $m \leq d_{k_0}$ のときには,

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}} &= (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0} - m} (A - \lambda_{k_0} I)^m \mathbf{v} \\
&= (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0} - m} \mathbf{0} && \text{((91) 式より)} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となり, (90) 式が成り立つことが分かりますから, 以下では, $m \geq d_{k_0} + 1$ であると仮定することにします.

そこで, $k \geq d_{k_0}$ として, (82) 式に注意して, (79) 式の両辺に $(A - \lambda_{k_0} I)^k$ を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda_{k_0} I)^k \qquad (92) \\
&\quad = (A - \lambda_{k_0} I)^k I
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A - \lambda_{k_0} I)^k (P_1 + P_2 + \cdots + P_L) && \text{((79) 式から)} \\
&= (A - \lambda_{k_0} I)^k P_1 + (A - \lambda_{k_0} I)^k P_2 + \cdots + (A - \lambda_{k_0} I)^k P_L \\
&= (A - \lambda_{k_0} I)^{k - d_{k_0}} (A - \lambda_{k_0} I)^{d_{k_0}} P_{k_0} + \sum_{l \neq k_0} (A - \lambda_{k_0} I)^k P_l \\
&= \sum_{l \neq k_0} (A - \lambda_{k_0} I)^k P_l && \text{((82) 式から)} \qquad (93)
\end{aligned}
$$

となることが分かります．いま，$f_l(x)$, $(l = 1, 2, \cdots, L)$ の定義から，$l \neq k_0$ のときには，$f_l(x)$ に $(x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0}}$ という因子が含まれていますから，$p_l(x) = f_l(x) g_l(x)$ にも $(x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0}}$ という因子が含まれていることに注意します．そこで，$(x - \lambda_{k_0})$ という因子だけを取り出して，$p_l(x)$ を，

$$
p_l(x) = \left\{ g_l(x)(x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0} - 1} \prod_{i \neq l, k_0} (x - \lambda_i)^{d_i} \right\} \cdot (x - \lambda_{k_0})
$$

というように表わしてみます．このとき，

$$
q_l^{(k_0)}(x) = g_l(x)(x - \lambda_{k_0})^{d_{k_0} - 1} \prod_{i \neq l, k_0} (x - \lambda_i)^{d_i}
$$

と定めると，$l \neq k_0$ に対して，行列 P_l は，

$$
P_l = q_l^{(k_0)}(A)(A - \lambda_{k_0} I) \tag{94}
$$

というように，$(A - \lambda_{k_0} I)$ という因子を持った形で表わすことができることが分かります．よって，(93) 式，(94) 式から，

$$
Q^{(k_0)} = \sum_{l \neq k_0} q_l^{(k_0)}(A)
$$

として，

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda_{k_0} I)^k &= \sum_{l \neq k_0} (A - \lambda_{k_0} I)^k P_l && \text{((93) 式より)} \\
&= \sum_{l \neq k_0} (A - \lambda_{k_0} I)^k q_l^{(k_0)}(A)(A - \lambda_{k_0} I) && \text{((94) 式より)} \\
&= \left\{ \sum_{l \neq k_0} q_l^{(k_0)}(A) \right\} (A - \lambda_{k_0} I)^{k+1} \\
&= Q^{(k_0)} (A - \lambda_{k_0} I)^{k+1}
\end{aligned}
$$

となることが分かります．したがって，$k \geq d_{k_0}$ に対して，

$$
(A - \lambda_{k_0} I)^k = Q^{(k_0)} (A - \lambda_{k_0} I)^{k+1} \tag{95}
$$

となることが分かりました．

この (95) 式を用いると, 8 節と同様にして, $k \geq d_{k_0}$ に対して,

$$(A - \lambda_{k_0} I)^{k+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (A - \lambda_{k_0} I)^{k}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{96}$$

となることが分かりますから, (96) 式を順番に用いることで, (90) 式が成り立つことが分かります.[30] 以上から, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

$$W_k = V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$$

となることが分かりましたから, (88) 式の直和分解は,

行列 A の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^n$ の直和分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\mathrm{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\mathrm{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)_{\mathrm{gen}}$$

という問 1 のところで目的とした一般固有ベクトル空間による直和分解であることが分かりました.

さて, 上の議論の出発点は,

「単位行列の分解」

$$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_L \tag{97}$$

という「単位行列の分解」でした. そこで, 参考のために, (97) 式に現われる P_k たちが満たす代数的な関係式という視点から, (88) 式の直和分解を見直してみることにします.

いま, $k, l \in \{1, 2, \cdots, L\}$ として, $k \neq l$ であるとすると, $p_k(x)p_l(x)$ は,

$$\begin{aligned} p_k(x)p_l(x) &= g_k(x)\prod_{i \neq k}(x - \lambda_i)^{d_i} \cdot g_l(x)\prod_{j \neq l}(x - \lambda_j)^{d_j} \\ &= \psi_A(x) \cdot g_k(x)g_l(x)\prod_{i \neq k, l}(x - \lambda_i)^{d_i} \end{aligned}$$

というように表わすことができますから,

$$p_k(x)p_l(x) \in I_A = \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \tag{98}$$

となることが分かります. よって, (98) 式から, $k \neq l$ のとき,

$$P_k P_l = O \tag{99}$$

となることが分かります. そこで, (99) 式に注意して, (97) 式の両辺に P_k を掛け算してみると,

$$\begin{aligned} P_k &= P_k I \\ &= P_k(P_1 + P_2 + \cdots + P_k + \cdots + P_L) && \text{((97) 式から)} \\ &= P_k P_1 + P_k P_2 + \cdots + P_k P_k + \cdots + P_k P_L \end{aligned}$$

[30] 皆さん, 確かめてみて下さい.

$$= P_k^2 \qquad \text{((99) 式から)} \tag{100}$$

となることが分かります. 以上から, P_k たちは,

行列 P_k たちの満たす代数的な関係式

$$\begin{cases} P_k^2 = P_k, \\ P_k P_l = O, \quad k \neq l \text{ のとき} \end{cases} \tag{101}$$

という代数的な関係式を満たすことが分かります.[31]

第 9 回の問 3 のところで見たように, 一般に, 線型空間 V 上に,

$$P^2 = P \tag{102}$$

を満たすような線型写像

$$P : V \to V$$

が与えられているとすると, 線型写像 P の固有値 λ は $\lambda = 0, 1$ でなければならず,

線型部分空間 W_1, W_2 の定義式

$$W_1 = \{\mathbf{v} \in V \mid P\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \}$$
$$W_2 = \{\mathbf{v} \in V \mid P\mathbf{v} = \mathbf{v}\ \}$$

として, 線型空間 V は,

線型部分空間 W_1, W_2 による線型空間 V の直和分解

$$V = W_1 \oplus W_2 \tag{103}$$

というように, W_1 と W_2 の直和として表わされることが分かります.[32] このとき, 線型写像 P は, W_1 上では零写像であり, W_2 上では恒等写像であるので,

$$\begin{cases} W_1 = \operatorname{Ker} P \\ W_2 = \operatorname{Im} P \end{cases}$$

というように表わすことができますが,[33]

---

[31] 8 節で見たように, (101) 式の関係式は, (78) 式の左辺に現われる関数 $p_l(x)$ たちが, 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の**部分空間 N 上の関数として**,

$$\begin{cases} p_k(x)^2 = p_k(x), \\ p_k(x)p_l(x) = 0, \quad k \neq l \text{ のとき} \end{cases}$$

という関係式を満たすという事実の「量子版」になっています.

[32] いま, (102) 式から, P の最小多項式 $\psi_P(x)$ は $x^2 - x = x(x-1)$ を割り切ることが分かりますが, $\psi_P(x) = x(x-1)$ ではなく, $\psi_P(x) = x$, あるいは, $\psi_P(x) = x - 1$ となる場合として, $W_2 = \{\mathbf{0}\}$, あるいは, $W_1 = \{\mathbf{0}\}$ となることもありえます.

[33] 皆さん, 確かめてみて下さい.

線型写像 P' の定義式

$$P' = I - P$$

と表わすことにすると, 線型写像 P' は, W_1 上では恒等写像になり, W_2 上では零写像になることが分かりますから, W_1 は,

$$W_1 = \operatorname{Im} P'$$

というように表わすこともできることに注意します. また, (102) 式に注意すると,

$$\begin{aligned}
(P')^2 &= (I-P)(I-P) \\
&= I - 2P + P^2 \\
&= I - P - (P - P^2) \\
&= I - P && (\text{ (102) 式より }) \\
&= P' \\
P'P &= (I-P)P \\
&= P - P^2 \\
&= O && (\text{ (102) 式より }) \\
PP' &= P(I-P) \\
&= P - P^2 \\
&= O && (\text{ (102) 式より })
\end{aligned}$$

となることも分かります. したがって, (103) 式は,

線型写像 P, P' の満たす代数的な関係式

$$\begin{cases} (P')^2 = P' \\ P^2 = P \\ P'P = PP' = O \end{cases}$$

を満たすような線型写像 P', P によって, 恒等写像 I が,

「恒等写像の分解」

$$I = P' + P$$

というように分解されているときに, 線型空間 V が,

線型部分空間 $\operatorname{Im} P', \operatorname{Im} P$ による線型空間 V の直和分解

$$V = \operatorname{Im} P' \oplus \operatorname{Im} P \tag{104}$$

というように直和分解されるということを表わしているとも理解できることが分かります.

第 9 回の問 3 の問題を, このように解釈すると, **(101) 式という代数的な関係式を満た**

すような線型写像

$$\boldsymbol{P_k : V \to V, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)}$$

によって, 恒等写像 $\boldsymbol{I}$ が,

$$\boldsymbol{I = P_1 + P_2 + \cdots + P_L}$$

というように分解されるとき, 線型空間 $\boldsymbol{V}$ は,

線型部分空間 $\boldsymbol{\mathrm{Im}\, P_1, \cdots, \mathrm{Im}\, P_L}$ による線型空間 $\boldsymbol{V}$ の直和分解

$$\boldsymbol{V = \mathrm{Im}\, P_1 \oplus \mathrm{Im}\, P_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, P_L} \tag{105}$$

というように直和分解されるという形で一般化できることが分かります.[34] このような立場から見直すと, 我々の場合には, 単なる「単位行列の分解」ではなく, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ に注目することによって得られる「単位行列の分解」を考えているという特殊事情から, それぞれの行列 P_k, $(k = 1, 2, \cdots, L)$ に対する具体的な記述があるために, さらに, $\mathrm{Im}\, P_k$ に対して.

我々の場合には $\boldsymbol{\mathrm{Im}\, P_k}$ を具体的に記述することができる

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, P_k &= W_k \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n |\ (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \\ &= V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}\end{aligned}$$

というような具体的な記述が得られるのだと理解することができます. また, このような具体的な記述を用いることで, (105) 式から,

行列 $\boldsymbol{A}$ の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^n$ の直和分解

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &= W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_L \\ &= V(\lambda_1)_{\mathrm{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\mathrm{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)_{\mathrm{gen}}\end{aligned} \tag{106}$$

という行列 A の一般固有ベクトル空間による直和分解が得られたのだと解釈することもできることが分かります. 興味がある方は, こうした立場から, (106) 式の直和分解を見直してみて下さい.

10 最小多項式と対角化可能性について

さて, 8 節の途中でも注意しましたが, 9 節で行なった議論を見返すと, 議論の中で, **$\boldsymbol{n}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列の行列 $\boldsymbol{A}$ の最小多項式 $\boldsymbol{\psi_A(x)}$ が $\boldsymbol{\psi_A(A) = O}$ という式を満たす**ということは頻繁に用いていますが, **$\boldsymbol{\psi_A(x)}$ が最小多項式であること, すなわち, イデアル $\boldsymbol{I_A}$ に属する $\boldsymbol{0}$ と異なる多項式の中で, 次数が最も低い多項式である**ということは全く用いていないことが分かります. したがって, $0 \neq f(x) \in I_A$ を, I_A に属する 0 と異なる勝手な多項式と

[34] 興味のある方は, 上で線型空間 $\mathbb{C}^n$ を行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解できるということを示したときの議論を参考にして, 線型空間 V を (105) 式のように直和分解することができることを確かめてみて下さい.

して, $\psi_A(x) \rightsquigarrow f(x)$ と置き換えても, 9 節の議論は, そのままの形で成り立つことが分かります. すなわち, $0 \neq a_N \in \mathbb{C}$ を 0 と異なる複素数, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ を相異なる複素数として, $f(x)$ が,

$$f(x) = a_N \prod_{i=1}^{M} (x - \lambda_i)^{n_i} \tag{107}$$

と表わせるとしたときに, $\psi_A(x) \rightsquigarrow f(x)$ と置き換えて, 9 節の議論を行なうことにより,

$$\widetilde{W}_k = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_k I)^{n_k} \mathbf{v} = \mathbf{0} \ \}, \quad (k = 1, 2, \cdots, M) \tag{108}$$

として, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

$$\mathbb{C}^n = \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_M \tag{109}$$

というように直和分解することが分かります.[35] そこで, ここでは, $0 \neq f(x) \in I_A$ として, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を取って議論を行なうということの意味と, そのことにより, 行列 A に対して, どのような付加的な情報が得られることになるのかということを考えてみることにします.

そこで, まず, **$0 \neq f(x) \in I_A$ として, 最小多項式 $\psi_A(x)$ を取って議論を行なうということの意味**について考えてみることにします. いま, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L$ を相異なる複素数として, 9 節と同様に, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ が,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{d_i} \tag{110}$$

というように表わされているとします. このとき, $0 \neq f(x) \in I_A$ を, I_A に属する 0 と異なる勝手な多項式とすると, $f(x)$ は最小多項式 $\psi_A(x)$ で割り切れることになりますから, 必要なら名前を付け替えることにより, 以下では, $L \leq M$ であり, $i = 1, 2, \cdots, L$ に対して, (107) 式に現われる複素数 λ_i と (110) 式に現われる複素数 λ_i とは同じ複素数を表わすと考えることにします. すなわち, (107) 式に現われる複素数 λ_i のうち, $i = 1, 2, \cdots, L$ となる複素数 λ_i は行列 A の固有値であり, $i = L+1, \cdots, M$ となる複素数 λ_i は行列 A の固有値ではないと考えることにします.

そこで, まず,

線型部分空間 W_k の定義式

$$W_k = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0} \ \}, \quad (k = 1, 2, \cdots, L)$$

として, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して, 線型部分空間 $\widetilde{W}_k$ と W_k の間の関係について考えてみることにします. いま, 最小多項式 $\psi_A(x)$ は $f(x)$ を割り切りますから,

$$d_k \leq n_k$$

となることが分かります. よって,

$$\mathbf{v} \in W_k \implies \mathbf{v} \in \widetilde{W}_k$$

[35] 興味のある方は, $\psi_A(x) \rightsquigarrow f(x)$ と置き換えて, 9 節で行なった議論を繰り返してみて下さい.

となることが分かりますから,

$$W_k \subset \widetilde{W}_k \tag{111}$$

となることが分かります. 一方, 行列 A の (固有値 λ_k に対応した) 一般固有ベクトル空間を,

行列 A の (固有値 λ_k に対応した) 一般固有ベクトル空間

$$V(\lambda_k)_{\rm gen} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_k I)^m \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する. }\}$$

と表わすことにすると, $m = n_k$ となる場合として,

$$\widetilde{W}_k \subset V(\lambda_k)_{\rm gen} \tag{112}$$

となることが分かりますが, 9 節で見たように,

$$W_k = V(\lambda_k)_{\rm gen} \tag{113}$$

となることが分かりますから, (112) 式, (113) 式から,

$$\widetilde{W}_k \subset W_k \tag{114}$$

となることが分かります. よって, (111) 式, (113) 式, (114) 式から,

$$\widetilde{W}_k = W_k = V(\lambda_k)_{\rm gen}$$

となることが分かります. すなわち, W_k と同様に, $\widetilde{W}_k$ も一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\rm gen}$ に対するひとつの表示を与えていることが分かります.[36] また, $d_k \leq n_k$ となることに注意すると, これらの表示のうち, **最小多項式 $\psi_A(x)$ によって与えられる**

$$\boldsymbol{V(\lambda_k)_{\rm gen} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0}\ \}}$$

という表示が最も経済的な表示であることも分かります.

そこで, 次に, $k = L+1, \cdots, M$ に対して, $\widetilde{W}_k$ という線型部分空間がどのような線型部分空間になるのかということを考えてみます. すると, これらの線型部分空間は, 実際には,

$$\widetilde{W}_k = \{\mathbf{0}\}$$

となっていることが, 例えば, 次のようにして分かります.

いま,

$$\widetilde{W}_k \neq \{\mathbf{0}\}$$

であると仮定してみます. このとき, $\mathbf{0}$ と異なるベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \widetilde{W}_k$ を, 勝手にひとつ取ってくると, $\mathbf{v}$ の取り方と $\widetilde{W}_k$ の定義から,

$$\begin{cases} \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ (A-\lambda_k I)^{n_k}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{115}$$

[36] 9 節の議論と全く同様にして, W_k を仲立ちとすることなしに, 直接, $\widetilde{W}_k = V(\lambda_k)_{\rm gen}$ となることを確かめることもできます. 興味のある方は, 9 節で行なった議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

となることが分かります. そこで, (115) 式に注意して,

$$(A-\lambda_k I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となるような最小の自然数 m を $m_0 \in \mathbb{N}$ と表わすことにします. すると, m_0 の定義により,

$$\begin{cases} (A-\lambda_k I)^{m_0-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \\ (A-\lambda_k I)^{m_0}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{116}$$

となることが分かりますが,

$$\mathbf{u} = (A-\lambda_k I)^{m_0-1}\mathbf{v}$$

と表わすことにすると, (116) 式より, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ であり,

$$(A-\lambda_k)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

となることが分かります. よって, λ_k は行列 A の固有値となることが分かります.

以上から,

$$\widetilde{W}_k \neq \{\mathbf{0}\} \implies \lambda_k \text{ は行列 } A \text{ の固有値となる} \tag{117}$$

となることが分かりました. 一方, $k = L+1, \cdots, M$ に対して, λ_k は行列 A の固有値ではないと仮定しましたから, (117) 式と合わせて,

$$\widetilde{W}_k = \{\mathbf{0}\}, \quad (k = L+1, \cdots, M)$$

となることが分かります. したがって, 見かけ上は, (109) 式の直和分解の中に, これらの線型部分空間が登場するものの, 実際には,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_L \oplus \widetilde{W}_{L+1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_M \\ &= \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_L \oplus \{\mathbf{0}\} \oplus \cdots \oplus \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

というように,「無駄な部分」を付け加えているだけであることが分かります.

以上の議論をまとめると, **$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{I_A}$ が, どのような多項式であれ, (109) 式の直和分解は,**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_L \oplus \widetilde{W}_{L+1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_M \\ &= \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_L \oplus \{\mathbf{0}\} \oplus \cdots \oplus \{\mathbf{0}\} \\ &= \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_L \\ &= V(\lambda_1)_{\mathrm{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\mathrm{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L)_{\mathrm{gen}} \end{aligned} \tag{118}$$

というように, 常に, 行列 A の一般固有ベクトル空間分解を与えることが分かりました. また, **$\boldsymbol{f(x)}$ として, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を取ることにより,**

一般固有ベクトル空間に対する最も経済的な表示

$$V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_k I)^{d_k}\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \} \tag{119}$$

というように, 一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\mathrm{gen}}$ に対する最も経済的な表示が得られることが分かりました.

そこで, 次に, **(119) 式の表示を用いることで, 行列 A に対して, どのような付加的な情報が得られるのか**ということを考えてみます. いま, **行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ が重根を持たない**と仮定してみます. すなわち, (110) 式のように,

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{d_i}$$

と表わすときに, $i = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

$$d_i = 1$$

となると仮定してみます. すると, (119) 式から, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

$$\begin{aligned} V(\lambda_k)_{\text{gen}} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_k I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \ \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda_k \mathbf{v} \ \} \\ &= V(\lambda_k) \end{aligned}$$

となることが分かりますから, この場合, 一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)_{\text{gen}}$ は固有ベクトル空間 $V(\lambda_k)$ に一致してしまうことが分かります. よって, (118) 式と合わせると, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L) \tag{120}$$

というように, 行列 A の固有ベクトル空間の直和に分解することが分かります. したがって, 第 9 回の問 3 のところで見たように, (120) 式から, 行列 A は対角化可能であることが分かります. 以上から,

$$\text{最小多項式 } \psi_A(x) \text{ が重根を持たない.} \implies \text{行列 } A \text{ は対角化可能である.} \tag{121}$$

となることが分かりました.

逆に, 行列 A が対角化可能であると仮定してみます. すなわち,

$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{122}$$

となる対角行列 Λ と正則行列 P が存在すると仮定してみます. このとき, 対角行列 Λ の相異なる対角成分を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ とすると, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f(\Lambda) = O \iff f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \cdots = f(\lambda_L) = 0$$

となることが分かりますから, Λ の最小多項式 $\psi_\Lambda(x)$ は,

$$\psi_\Lambda(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i) \tag{123}$$

となることが分かります. 一方, 第 12 回の問 1 のところで見たように,

$$\psi_A(x) = \psi_{P^{-1}AP}(x)$$

$$= \psi_\Lambda(x) \qquad\qquad (\text{(122) 式より})$$

となることが分かりますから, (123) 式と合わせて,

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L}(x - \lambda_i)$$

となることが分かります. よって,

$$\text{行列 } A \text{ は対角化可能である.} \implies \text{最小多項式 } \psi_A(x) \text{ が重根を持たない.} \tag{124}$$

となることが分かります. したがって, (121), (124) 式から,

行列 A が対角化可能であるための条件

$$\text{行列 } A \text{ は対角化可能である.} \iff \text{最小多項式 } \psi_A(x) \text{ が重根を持たない.} \tag{125}$$

となることが分かりました. 第 12 回の問 1 のところでは,「Jordan 標準形の存在」を認めることで, (125) 式が得られることを注意しましたが, 実際には,「Jordan 標準形の存在」まで持ち出さなくとも, **最小多項式 $\psi_A(x)$ を用いて「一般固有ベクトル空間分解の存在」を議論する**ことだけで, (125) 式が得られることが分かりました.

11 Jordan 標準形について

さて, 9 節で, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 行 n 列の行列 A が, 勝手にひとつ与えられたときに, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解するということを見ました. この事実と, 第 12 回の問 2 のところで見た**ベキ零行列に対する「上手い基底」の存在**という事実とを組み合わせると, 行列 A を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像

$$L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

を Jordan 標準形という「見やすい形の行列」で表現するような $\mathbb{C}^n$ の「上手い基底」の存在を確かめることができます.

そこで, 話を具体的にするために, 一般的な状況を考える前に, 再び, 問 1 で考えた

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$$

という 3 行 3 列の行列の場合を考えてみることにします. 8 節で見たように, この場合には,

線型部分空間 W_1, W_2 の定義式 (行列 A の一般固有ベクトル空間になる)

$$W_1 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - I)^2\mathbf{v} = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - 2I)\mathbf{v} = 0 \right\}$$

として, 線型空間 $\mathbb{C}^3$ が,

行列 A の一般固有ベクトル空間による線型空間 $\mathbb{C}^3$ の直和分解

$$\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2 \tag{126}$$

というように直和分解されることが分かるのでした．また, 8 節では, 問 3 で考えた行列 P_1, P_2 と $\mathbf{v}_1 \in W_1$, $\mathbf{v}_2 \in W_2$ に対して,

線型部分空間 W_1, W_2 上での行列 P_1, P_2 の掛け算の様子

$$\begin{cases} P_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \\ P_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases}, \qquad \begin{cases} P_2\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\ P_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \end{cases}$$

となることも見ましたから, W_1, W_2 は, それぞれ,

線型部分空間 W_1, W_2 の行列 P_1, P_2 を用いた解釈

$$W_1 = \operatorname{Im} P_1$$
$$W_2 = \operatorname{Im} P_2$$

というように表わすこともできることが分かります．

そこで, まず, **線型部分空間 W_1, W_2 の基底を，勝手にひとつずつ取ってきて，線型写像 L_A を表現するとどうなるのか**ということを考えてみます．こうした考察を行なうための準備として, 問 3 の (2) を出題してみたのですが, 皆さんは, ここで考える W_1, W_2 の具体的な基底の形にはこだわらずに, 皆さん自身が求めてみた W_1, W_2 の基底を用いて, 以下の議論を読み替えてみて下さい．

さて, 問 3 の (2) の結果から, $W_1 = \operatorname{Im} P_1$ の基底として, 例えば,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

が取れ, $W_2 = \operatorname{Im} P_2$ の基底として, 例えば,

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

が取れることが分かります．そこで, これらのベクトルに対して, 行列 A を掛け算してみると,

行列 A の掛け算の様子

$$\begin{cases} A\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{e}_2 = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{127}$$

となることが分かります.[37] したがって,

行列 A の掛け算の様子 (行列を用いた表示)

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & A\mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と表わされることが分かりますから, 線型写像 L_A は, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ という基底に関して,

線型写像 L_A の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する表現行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{128}$$

という行列で表現されることが分かります.

ここで, 行列 $\hat{A}$ の形をじっと眺めると, 行列 $\hat{A}$ は, 線型部分空間 W_1 に対応した

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

という部分と, W_2 に対応した

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

という部分とにきれいに分かれていることが見て取れますが, (127) 式を見直すと, このことは, **W_1, W_2 という線型部分空間は, それぞれ, 行列 A を掛け算する操作で閉じている**ということに対応していることが分かります. 実際, $\mathbf{v}_1 \in W_1$ に対して,

$$\begin{aligned} (A-I)^2 A\mathbf{v}_1 &= A(A-I)^2\mathbf{v}_1 \\ &= A\mathbf{0} && (\ \mathbf{v}_1 \in W_1 \text{ から }) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{v}_1 \in W_1 \implies A\mathbf{v}_1 \in W_1 \tag{129}$$

となることが分かります. 全く同様にして,

$$\mathbf{v}_2 \in W_2 \implies A\mathbf{v}_2 \in W_2 \tag{130}$$

となることが分かります.[38] したがって, どのようにして (127) 式から (128) 式の表現行列が得られるのかということを反省してみると, (129) 式, (130) 式から, **W_1, W_2 の基底をどのように選んだとしても, 線型写像 L_A の表現行列は, $\hat{A}$ のように, W_1 に対応した**

[37] 皆さん, 確かめてみて下さい.
[38] 皆さん, 確かめてみて下さい.

2 行 2 列の行列の部分と, W_2 に対応した 1 行 1 列の行列の部分にきれいに分かれることが分かります. しかも, W_2 の方は, 定義によって,

$$\begin{aligned} W_2 &= V(2) \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\ \} \end{aligned}$$

という行列 A の固有値 2 に対応した固有ベクトル空間であることが分かりますから, W_2 に対応した部分は, W_2 の基底の取り方には依らずに, 常に,

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

という形の 1 行 1 列の行列になることが分かります. よって, 線型写像 L_A の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

いう形の行列で与えられることが分かります. したがって, 問題は, **W_1 の基底を「上手く」取ることにより, W_1 に対応する部分の表現行列も「見やすい形」にすることができないか**ということに帰着することが分かります.

このように, (126) 式で与えられる直和分解を用いることで, 3 行 3 列の行列 A に対する標準形の問題を, W_1 上の線型写像

$$L_A|_{W_1} : W_1 \to W_1$$

を「見やすい形」で表現するような W_1 の「上手い基底」を見つける問題に帰着することができました. ここで, さらに, **W_1 が行列 A の一般固有ベクトル空間である**という事実を用いると, 以下で見るように, さらに, この問題が**ベキ零行列に対する「上手い基底」を見つける問題に帰着する**ことが分かります. このときのアイデアは, **行列 A に注目するのではなく, W_1 を定義するときに現われる $(A - I)$ という行列に注目する**ということです.

いま, W_1 という一般固有ベクトル空間は,

線型部分空間 W_1 の定義式 (行列 A の一般固有ベクトル空間になる)

$$W_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \}$$

というように記述できるのでした. したがって, **$(A - I)$ という 3 行 3 列の行列は, ベキ零行列ではないにもかかわらず, $(A - I)$ という行列を掛け算することによって定まる線型写像**

$$\boldsymbol{L_{A-I} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3}$$

を, $\mathbb{C}^3$ の線型部分空間 W_1 上に制限して得られる線型写像は「ベキ零な線型写像」になることが分かります.

そこで, いま, この線型写像を,

線型写像 N_1 の定義式

$$N_1 = L_{A-I}|_{W_1} : W_1 \to W_1$$

という記号を用いて表わすことにします．すると, W_1 の定義から,

線型写像 N_1 はベキ零な線型写像になる

$$N_1^2 = O$$

となることが分かりますから, N_1 はベキ零な線型写像であることが分かります．よって, 第 12 回の問 2 のところで見たことから, 線型写像 N_1 を「見やすい形」で表現するような W_1 の「上手い基底」が存在することが分かります．具体的には,

ベキ零な線型写像 N_1 を施すことによって繋がった一連のベクトル

$$\mathbf{u}_0 \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{u}_1 \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{u}_2 \xmapsto{N_1\cdot} \cdots \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{u}_m \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{0}$$

というように, ベキ零な線型写像 N_1 を施すことによって繋がった一連のベクトルを何組か選んでくることで, このような基底を見つけることができるのでした．我々の場合には,

$$N_1^2 = O$$

となりますから, $m \leq 1$ となることが分かります．

そこで, このような「上手い基底」を具体的に見つけるために, 第 12 回の問 2 のところと同様にして,

$$\operatorname{Im} N_1$$

という線型部分空間に注目してみることにします．すると, (127) 式から,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

として,

$$\begin{aligned}
N_1\mathbf{e}_1 &= (A - I)\mathbf{e}_1 \\
&= A\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 && (\text{ (127) 式から }) \\
&= -(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) && (131) \\
N_1\mathbf{e}_2 &= (A - I)\mathbf{e}_2 \\
&= A\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \\
&= 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 && (\text{ (127) 式から }) \\
&= 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) && (132)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\operatorname{Im} N_1 = \mathbb{C} \cdot (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

となることが分かります.

そこで,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} N_1\end{aligned}$$

と定めてみることにします. 次に,

$$N_1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

となるようなベクトル $\mathbf{f}_2 \in W_1$ を探してみると, (131) 式, (132) 式より, 例えば,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1\end{aligned}$$

というように取れることが分かります.[39] こうして,

$$\mathbf{f}_2 \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{f}_1 \xmapsto{N_1\cdot} \mathbf{0}$$

というように, ベキ零な線型写像 N_1 を施すことによって繋がった一連のベクトルが見つかったことになりますが, 第 12 回の問 2 のところで見たように, このようにして選んだ $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が W_1 の基底になることが分かります.[40]

そこで, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底に関して, 線型写像 L_A の W_1 上の表現行列がどうなるのかということを考えてみます. いま, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ の定義から,

ベキ零な線型写像 N_1 の様子

$$\begin{cases} N_1\mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \\ N_1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \end{cases} \tag{133}$$

となることが分かりますが, 第 12 回の問 2 のところで見たように, このことは, ベキ零の線型写像 N_1 が, W_1 の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ に関して,

[39] もちろん, $\mathbf{f}_2$ としては, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ でなくとも, 例えば, $-\mathbf{e}_1$ や $\frac{1}{2}\mathbf{e}_2$ など,

$$N_1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

となるようなものであれば, どのようなベクトルを選んでも構いません.

[40] あるいは, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いて表わすと,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますが,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

となることからも, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が W_1 の基底になることが分かります.

ベキ零な線型写像 N_1 の様子 (行列を用いた表示)

$$\begin{pmatrix} N_1\mathbf{f}_1 & N_1\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように, Jordan 標準形の形で表わされるということに対応しています. そこで, $\mathbf{v} \in W_1$ に対して,

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= (A - I)\mathbf{v} + I\mathbf{v} \\ &= N_1\mathbf{v} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

と表わせることに注意すると, (133) 式から,

線型部分空間 W_1 上における行列 A の掛け算の様子

$$\begin{cases} A\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1 \\ A\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{134}$$

となることが分かります. したがって, (134) 式から,

線型部分空間 W_1 上における行列 A の掛け算の様子 (行列を用いた表示)

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{f}_1 & A\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように, 線型写像 L_A も W_1 上で Jordan 標準形の形で表わされることが分かります. よって, W_2 の部分も考えると, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3\}$ という $\mathbb{C}^3$ の基底に対して, 線型写像 L_A が,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という Jordan 標準形の形で表現されることが分かりました.

上の議論を見返すと, 線型部分空間 W_1 上でベキ零な線型写像 N_1 が,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という Jordan 標準形で表わされるということに対応して, 線型写像 L_A も

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という Jordan 標準形で表わされるということが分かります. このことは,

線型部分空間 W_1 上における線型写像 $L_A|_{W_1}$ と N_1 の関係

$$L_A|_{W_1} = L_I|_{W_1} + N_1 : W_1 \to W_1$$

というように, **線型部分空間 W_1 上では, 線型写像 $L_A|_{W_1}$ は「W_1 上の恒等写像 $L_I|_{W_1}$**

とベキ零な線型写像 N_1 の和」の形で表わせるということと, **恒等写像はどのような基底に対しても常に単位行列で表現される**ということの帰結であることが分かります. すなわち, この二つの事実から, **線型写像 L_A の表現行列の中で線型部分空間 W_1 に対応する部分を「見やすい形」の行列で表現するような基底を見つけるためには, ベキ零な線型写像 N_1 の表現行列を「見やすい形」で表現するような基底を見つければ十分である**ということが分かります.

ここでは, 問 1 で考えた 3 行 3 列の行列 A をもとにして議論をしましたが, 一般の n 行 n 列の行列の場合にも, 全く同様に考えることができます.

そこで, いま, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 行 n 列の行列 A が, 勝手にひとつ与えられているとして, 行列 A を掛け算することによって定まる $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像を,

$$L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

と表わすことにします. また, 行列 A の最小多項式が, 相異なる複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ を用いて,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{d_i}$$

というように表わされるとします. すると, 9 節で見たように, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

線型部分空間 W_k の定義式 (行列 A の一般固有ベクトル空間になる)

$$W_k = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v} = \mathbf{0} \}$$

として, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

線型部分空間 W_k による線型空間 $\mathbb{C}^n$ の直和分解

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_L$$

というように, 行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解できることが分かります.

このとき, $\mathbf{v}_k \in W_k$ に対して,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I)^{d_k} A \mathbf{v}_k &= A (A - \lambda_k I)^{d_k} \mathbf{v}_k \\ &= A \mathbf{0} && (\ \mathbf{v}_k \in W_k \text{ より }) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

線型部分空間 W_k は行列 A を掛け算する操作に関して閉じている

$$\mathbf{v}_k \in W_k \implies A \mathbf{v}_k \in W_k$$

となることが分かります. したがって, それぞれの線型部分空間 W_k の基底を, 勝手にひと

つずつ定めて, この基底に関する線型写像

$$L_A|_{W_k} : W_k \to W_k$$

の表現行列を

$$\hat{A}_k$$

という記号を用いて表わすことにすると, **これらの基底を集めてできる $\mathbb{C}^n$ の基底に関して, 線型写像 $\boldsymbol{L_A}$ は,**

$\boldsymbol{W_k}$ の基底を集めてできる $\mathbb{C}^n$ の基底に関する線型写像 $\boldsymbol{L_A}$ の表現行列の形

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\hat{A}_1} & & & \\ & \boldsymbol{\hat{A}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\hat{A}_L} \end{pmatrix} \tag{135}$$

というように, それぞれの線型部分空間 $\boldsymbol{W_k}$ に対応した部分にきれいに分かれた形をした行列で表現されることが分かります. したがって, 後は, **それぞれの $\boldsymbol{W_k}$ 上で, 線型写像 $\boldsymbol{L_A|_{W_k}}$ を「見やすい形」で表現するような「上手い基底」を見つければよい**ということになります. 以下では, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, 固有値が λ で, サイズが n の Jordan 細胞を,

Jordan 細胞

$$J_n(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

という記号を用いて表わすことにします.

　そこで, 前と同様にして, $k = 1, 2, \cdots, L$ に対して,

線型写像 $\boldsymbol{N_k}$ の定義式

$$N_k = L_{A-\lambda_k I}|_{W_k} : W_k \to W_k$$

と定めてみます. すると, W_k の定義によって, $\mathbf{v}_k \in W_k$ に対して,

$$\begin{aligned} (N_k)^{d_k}\mathbf{v}_k &= (A - \lambda_k I)^{d_k}\mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, **$\boldsymbol{N_k}$ はベキ零な線型写像になる**ことが分かります. よって, 第 12 回の問 2 のところで見たように, $n_1^{(k)}, n_2^{(k)} \cdots, n_{m_k}^{(k)} \in \mathbb{N}$ として, ベキ零な線型写像 N_k の表現行列が,

W_k の「上手い基底」に関するベキ零な線型写像 N_k の表現行列

$$\hat{N}_k = \begin{pmatrix} J_{n_1^{(k)}}(0) & & & \\ & J_{n_2^{(k)}}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_{m_k}^{(k)}}(0) \end{pmatrix}$$

という「見やすい形」になるような W_k の「上手い基底」が存在することが分かります. このとき,

$$L_A|_{W_k} = L_{\lambda_k I}|_{W_k} + N_k : W_k \to W_k$$

というように, **W_k 上では, 線型写像 $L_A|_{W_k}$ は「W_k 上の λ_k 倍写像 $L_{\lambda_k I}|_{W_1}$ とベキ零な線型写像 N_k の和」の形で表わせる**ということと, **λ_k 倍写像 $L_{\lambda_k I}|_{W_1}$ は W_k のどのような基底に対しても常にスカラー行列 $\lambda_k I$ で表現される**ということに注意すると, 同じ基底に関して, 線型写像 $L_A|_{W_k}$ の表現行列 $\hat{A}_k$ が,

W_k の「上手い基底」に関する線型写像 $L_A|_{W_k}$ の表現行列

$$\begin{aligned} \hat{A}_k &= \lambda_k I + \hat{N}_k \\ &= \begin{pmatrix} J_{n_1^{(k)}}(\lambda_k) & & & \\ & J_{n_2^{(k)}}(\lambda_k) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_{m_k}^{(k)}}(\lambda_k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という Jordan 標準形によって与えられることが分かります. したがって, (135) 式から, **これらの基底を集めてできる $\mathbb{C}^n$ の基底に関して, 線型写像 L_A は Jordan 標準形で表現される**ことが分かります.

以上から, 勝手な n 行 n 列の行列 A に対して, 線型写像 L_A の表現行列が Jordan 標準形という「見やすい形」になるような $\mathbb{C}^n$ の「上手い基底」が存在することが分かりました.

12　定数係数の線型常微分方程式について

さて, 第 7 回の問 1 のところでは, 定数係数の線型常微分方程式を行列の立場から見直すことを考えましたが, Jordan 標準形の知識を用いると, そのときに保留扱いにした問題を解決することができますから, Jordan 標準形の応用として, ここで, もう一度, 定数係数の線型常微分方程式について少し考えてみることにします.

そこで, まず, 第 7 回の問 1 のところで行なった議論の要点を簡単に復習してみることにします. 第 7 回の問 1 のところでは,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{136}$$

というような定数係数の線型常微分方程式を行列の立場から見直すことを考えましたが, そのときのアイデアは, **(136) 式の微分方程式を「関数 $(f'(x), f(x))$ から $f''(x)$ が決まる」と読まないで, わざわざ, $f'(x)$ を付け加えて,「関数 $(f'(x), f(x))$ から $(f''(x), f'(x))$ が決まる」と読み替えてみる**ということでした. すなわち, (136) 式の微分方程式を,

$$\begin{aligned}
f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 &\iff f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\
&\iff \begin{cases} f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\ f'(x) = f'(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad (137)
\end{aligned}$$

というように書き直して考えてみるということでした.

全く同様に, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ として,

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \qquad (138)$$

という一般の定数係数の線型常微分方程式に対して, 同様の書き換えを行なってみると,

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \\
&\iff f^{(n)}(x) = -a_{n-1}f^{(n-1)}(x) - \cdots - a_1 f'(x) - a_0 f(x) \\
&\iff \begin{cases} f^{(n)}(x) = -a_{n-1}f^{(n-1)}(x) - a_{n-2}f^{(n-2)}(x) - \cdots - a_0 f(x) \\ f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) \\ \qquad\vdots \\ f'(x) = f'(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ f^{(n-1)}(x) \\ \vdots \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ f^{(n-2)}(x) \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ f^{(n-2)}(x) \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ f^{(n-2)}(x) \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

というように書き換えることができますから,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ f^{(n-2)}(x) \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (139)$$

として, **(138) 式の微分方程式が,**

定数係数の線型常微分方程式の行列による読み替え

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{140}$$

というように, 一階の常微分方程式の形に書き直すことができることが分かります. さらに, (140) 式の微分方程式は, 行列の指数関数

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I + (xA) + \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + \cdots \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \end{aligned} \tag{141}$$

を導入することにより,

行列で読み替えた定数係数の線型常微分方程式とその一般解

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \iff F(x) = e^{xA}F(0) \tag{142}$$

というように具体的に解くことができますから, **「(138) 式の微分方程式を解く問題」が「(139) 式で与えられる正方行列 A に対して, 行列の指数関数 e^{xA} を求める問題」に帰着する**のでした. 第 7 回の問 1 のところでは, A が 2 行 2 列の行列の場合に, Cayley-Hamilton の定理を用いて, e^{xA} を求めることを考えましたが, ここでは, A が一般のサイズの正方行列であるとして, Jordan 標準形の知識を用いて, e^{xA} を求めることを考えてみることにします.

そこで, (139) 式で与えられる正方行列 A の Jordan 標準形を求めるために, 手始めに, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求めてみることにします. すると, 例えば,

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= \det(xI - A) \\ &= \begin{vmatrix} x + a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_1x+a_0 \\
-1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & -1 & x & x^2 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0
\end{vmatrix}
$$

(n 列目 $+ (n-1)$ 列目 $\times x$)

$$
= \begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1x+a_0 \\
-1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & -1 & x & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x^2
\end{vmatrix}
$$

(n 行目で展開)

$$
= \begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_2x^2+a_1x+a_0 \\
-1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & -1 & x & x^3 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0
\end{vmatrix}
$$

$\left((n-1) \right.$ 列目 $+ (n-2)$ 列目 $\left. \times x^2 \right)$

$$
= \begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_4 & a_3 & a_2x^2+a_1x+a_0 \\
-1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & -1 & x & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x^3
\end{vmatrix}
$$

($(n-1)$ 行目で展開)

$$
= \cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \\
-1 & x^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

(3 行目で展開)

$$
= \begin{vmatrix} x+a_{n-1} & x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\left(2\ \text{列目} + 1\ \text{列目} \times x^{n-1} \right)
$$

$$
= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0
$$

というように計算できることが分かりますから, (139) 式で与えられる行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ は,

(139) 式で与えられる行列 A の特性多項式

$$
\varphi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{143}
$$

という式によって与えられることが分かります. ここで, (138) 式と (143) 式を見比べてみると, **行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ は, 形式的には, (138) 式の微分方程式 (の左辺) において,**

$$
\boldsymbol{f^{(i)}(x) \rightsquigarrow x^i, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)}
$$

という置き換えをすることによって得られることが分かります.

次に, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めてみることにします. すると,

(139) 式で与えられる行列 A の最小多項式

$$
\begin{aligned}
\psi_A(x) &= \varphi_A(x) \qquad (144) \\
&= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0
\end{aligned}
$$

というように, **(139) 式で与えられる行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は, 常に, 特性多項式 $\varphi_A(x)$ と一致する**ということが, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, Cayley-Hamilton の定理から,

$$
\varphi_A(A) = O
$$

となることが分かりますから, (144) 式の主張を確かめるためには, 0 と異なる $(n-1)$ 次式以下の勝手な多項式 $0 \neq f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$
f(A) \neq O
$$

となることが確かめられればよいということになります. そのために, まずは, 行列 A のベキを順番に計算してみることにします. 以下, 議論のポイントが見やすくなるように, 議論の本質に関わってこないような行列の成分は, すべて「$*$」という記号を用いて少しぼかして表わすことにします. いま, (139) 式から, 行列 A は,

$$
A = \begin{pmatrix}
* & * & \cdots & \cdots & * \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & 1 & 0
\end{pmatrix} \tag{145}
$$

という形をしているので, A^2 は,

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{147}$$

という形になることが分かります. ここで, (146) 式の右辺に現われる二つの行列のうち, 左側の行列 A は「行変形の命令を与える行列」であり, 右側の行列 A は「行変形の命令を受ける行列」であると見なして, 例えば, 行列 A の二行目が,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であることを,「行列 A を左から掛け算することは, 二行目に一行目の 1 倍を書くことである」などと解釈しながら計算を進めてみると, A^2 が (147) 式にような形になることが納得しやすくなるかもしれません. 全く同様に, $A^3, \cdots, A^{n-1}$ を計算してみると,

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ A^{n-1} &= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という形になることが分かります.[41] 特に, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ に対して, A^i の n 行目は,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & (n-i)\,\text{列目} & & & \end{array} \\ n\,\text{行目} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{148}$$

という式によって与えられることに注意します.

そこで, いま, $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ として,

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$$

を, $(n-1)$ 次式以下の多項式とします. すると, (148) 式から,

$$\begin{aligned} f(A) &= b_0 I + b_1 A + \cdots + b_{n-1} A^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{149}$$

となることが分かりますから, (149) 式から,

$$f(A) = O \iff b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0 \tag{150}$$

となることが分かります. よって, (150) 式から, 0 と異なる $(n-1)$ 次式以下の勝手な多項式 $0 \neq f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f(A) \neq O$$

となることが分かりますから, 最初に注意したように, (144) 式の主張が成り立つことが分かります.

そこで, いま, 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ として, A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ が,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{m_i} \tag{151}$$

というように因数分解されるとします. このとき, (144) 式から, A の最小多項式 $\psi_A(x)$ も,

行列 A の最小多項式

$$\psi_A(x) = \prod_{i=1}^{L} (x - \lambda_i)^{m_i} \tag{152}$$

というように表わされるということになります. 第 12 回の問 1 のところで見たように, 最

[41]皆さん, 確かめてみて下さい.

小多項式 $\psi_A(x)$ は, それぞれの固有値に対応した最もサイズの大きな Jordan 細胞の情報を与えてくれますから, (152) 式から, 行列 A の Jordan 標準形には,

$$J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \cdots, J_{m_L}(\lambda_L) \tag{153}$$

という Jordan 細胞が登場することが分かります. そこで, これらの Jordan 細胞を並べた行列

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_L}(\lambda_L) \end{pmatrix} \tag{154}$$

を考えてみると, (151) 式の両辺の多項式の次数を比べてみることで, 正方行列 J のサイズは,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_L = n$$

となり, 行列 A のサイズと同じになることが分かります. よって, 行列 A の Jordan 標準形の中には, (153) 式の Jordan 細胞以外の Jordan 細胞が登場する余地はないことが分かりますから, 行列 A の Jordan 標準形は,

(139) 式で与えられる行列 A の Jordan 標準形

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_L}(\lambda_L) \end{pmatrix} \tag{155}$$

という式によって与えられることが分かります. すなわち, **(139) 式で与えられる行列 A の Jordan 標準形には, それぞれの固有値 λ_i に対して, ちょうどひとつの Jordan 細胞 $J_{m_i}(\lambda_i)$ が登場する**ことが分かります. また, **これらの Jordan 細胞のサイズを求めるには, (151) 式のように, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を因数分解してみればよい**ことも分かりました.

さて, 11 節で見たように, 勝手な正方行列は $\mathbb{C}^n$ の基底を取り直すことで Jordan 標準形に変換できることが分かりますから, 我々の場合も,

行列 A を Jordan 標準形に変換する

$$P^{-1}AP = J \tag{156}$$

となる正則行列 P が存在することが分かります. すると, (156) 式から,

$$A = PJP^{-1} \tag{157}$$

と表わせることが分かりますから, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, (157) 式の両辺を k 乗することで,

$$A^k = PJ^kP^{-1} \tag{158}$$

となることが分かります．よって, (158) 式から,

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= PIP^{-1} + x(PJ^kP^{-1}) + \frac{x^2}{2!}(PJ^2P^{-1}) + \frac{x^3}{3!}(PJ^3P^{-1}) + \cdots \\ &= P\left(I + xJ + \frac{x^2}{2!}J^2 + \frac{x^3}{3!}J^3 + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^{xJ}P^{-1} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

行列の指数関数の間の関係

$$e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1} \tag{159}$$

となることが分かります．したがって, (142) 式, (159) 式から, (140) 式の微分方程式の解 $F(x)$ は,

(140) 式の微分方程式の解の表示

$$F(x) = Pe^{xJ}P^{-1}F(0) \tag{160}$$

というように表わせることが分かりますから, 微分方程式の解を求めるためには, 後は, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} を求めることができればよいということになります.

いま, (155) 式から, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$J^k = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1)^k & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_L}(\lambda_L)^k \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{x^k}{k!}J^k = \begin{pmatrix} \frac{x^k}{k!}J_{m_1}(\lambda_1)^k & & & \\ & \frac{x^k}{k!}J_{m_2}(\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{x^k}{k!}J_{m_L}(\lambda_L)^k \end{pmatrix} \tag{161}$$

となることが分かります．よって, (161) 式から,

Jordan 標準形 J に対する指数関数

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_{m_1}(\lambda_1)} & & & \\ & e^{xJ_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_{m_L}(\lambda_L)} \end{pmatrix} \tag{162}$$

となることが分かりますから, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} を求めるためには, Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数 $e^{xJ_m(\lambda)}$ が求まればよいということになります.

そこで, 第 11 回の問 1 のところと同様に,

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}}, \quad N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}}$$

として,

$$J_m(\lambda) = \lambda I + N$$

というように分解して考えてみます. このとき,

$$\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{YX} \tag{163}$$

となる正方行列に対して,

指数関数の加法定理

$$e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y \tag{164}$$

という「指数関数の加法定理」が成り立つことに注意して,[42]

$$X = x\lambda I, \quad Y = xN$$

として, (164) 式を適用してみると,

$$\begin{aligned} e^X &= e^{x\lambda I} \\ &= e^{\lambda x I} \\ &= I + \lambda x I + \frac{(\lambda x)^2}{2!} I^2 + \frac{(\lambda x)^3}{3!} I^3 + \cdots \end{aligned}$$

[42] 興味がある方は, (163) 式の仮定のもとで,

$$e^{X+Y} = 1 + (X+Y) + \frac{(X+Y)^2}{2!} + \frac{(X+Y)^3}{3!} + \cdots$$

と

$$e^X \cdot e^Y = \left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots\right)$$

という二つの式を X, Y のベキの形に展開して,

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} X^k Y^l$$

という形に表わしたときに, それぞれの式で $X^k Y^l$ の係数 $a_{k,l}$ がどうなるのかということを比較してみることで, (164) 式が成り立っていることを確かめてみて下さい.

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + (\lambda x) + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots\right) I \\
&= e^{\lambda x} I \\
e^Y &= e^{xN} \\
&= I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
\begin{aligned}
e^{xJ_m(\lambda)} &= e^{X+Y} \\
&= e^X \cdot e^Y \\
&= e^{\lambda x} I \cdot \left(I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1}\right) \\
&= e^{\lambda x} \cdot \left(I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1}\right)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数 $e^{xJ_m(\lambda)}$ は,

Jordan 細胞 $J_m(\lambda)$ に対する指数関数

$$
\begin{aligned}
e^{xJ_m(\lambda)} &= e^{\lambda x} \cdot \left(I + xN + \frac{x^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1}\right) \\
&= e^{\lambda x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m \text{ コ}}
\end{aligned}
\tag{165}
$$

となることが分かります. すると, (162) 式, (165) 式から, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} が計算できることになりますから, (160) 式と合わせて, 微分方程式の解が求まるということになります.

さて, 実際に上の手順で微分方程式の解を求めようと思うと,

$$
P^{-1}AP = J
$$

となる正則行列 P を求めるステップが少し面倒ですが, 例えば, 次のように考えることにより, 微分方程式の解法を少し簡略化することができます. 一般の場合でも, 話の本質は変わりませんから, 以下では, 話を具体的にするために, $D = \frac{d}{dx}$ として,

$$
\begin{aligned}
0 &= (D-1)^2(D-2)f(x) \qquad (166) \\
&= (D^3 - 4D^2 + 5D - 2)f(x) \\
&= f'''(x) - 4f''(x) + 5f'(x) - 2f(x) \qquad (167)
\end{aligned}
$$

という微分方程式をもとにして説明することにします. すると, この場合,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, (166) 式より, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ は,

$$\varphi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

となることが分かります. したがって, 行列 A の Jordan 標準形 J は,

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(2) \end{pmatrix}$$

であり, Jordan 標準形 J に対する指数関数 e^{xJ} は,

$$\begin{aligned} e^{xJ} &= \begin{pmatrix} e^{xJ_2(1)} & \\ & e^{xJ_1(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{168}$$

となることが分かります. したがって, 後は,

$$P^{-1}AP = J$$

となる正則行列 P を求めることができれば, (160) 式から,

$$F(x) = Pe^{xJ}P^{-1}F(0) \tag{169}$$

というように, 微分方程式の解が求まることになります. ただし, 我々は, 正則行列 P を具体的に求めるステップを回避することを考えたいわけですから, (169) 式をもとにして, **(167) 式という最初の微分方程式の解 $f(x)$ がどのような形の関数になるのか**ということを考えてみることにします.

そこで, いま, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ として,

$$P^{-1}F(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \tag{170}$$

と表わすことにします.[43] すると, (168) 式, (169) 式, (170) 式から,

$$\begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = F(x)$$

[43]前と同様, 議論のポイントが見やすくなるように, 議論の本質に関わってこないような行列の成分は, すべて「$*$」という記号を用いて少しぼかして表わすことにします.

$$
\begin{aligned}
&= Pe^{xJ}P^{-1}F(0) \\
&= P\begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^x + bxe^x \\ be^x \\ ce^{2x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha(ae^x + bxe^x) + \beta be^x + \gamma ce^{2x} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha(ae^x + bxe^x) + \beta be^x + \gamma ce^{2x} \\
&= (\alpha a + \beta b)e^x + (\alpha b)xe^x + (\gamma c)e^{2x}
\end{aligned}
$$

という形に表わせることが分かります. すなわち, 適当な定数 $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$
f(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x}
$$

という形に表わせることが分かります.

全く同様にして, 一般に, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ が,

$$
\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{L}(x - \lambda_i)^{m_i}
$$

というように因数分解できるとき,

$$
f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1f'(x) + a_0f(x) = 0 \tag{171}
$$

という定数係数の線型常微分方程式の解 $f(x)$ は, 適当な定数 $C_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$
f(x) = \sum_{i=1}^{L}\left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)}x + \cdots + C_{m_i-1}^{(i)}x^{m_i-1}\right)e^{\lambda_i x}
$$

という形に表わせることが分かります. 第 7 回の問 1 のところで見たように, このように, 一旦, **定数係数の線型常微分方程式の解がどのような形をしているのかということが分かってしまう**と, 次のような戦略で微分方程式の解を求めることができるということが分かります.

定数係数の線型常微分方程式の解を求める戦略

(i) 与えられた微分方程式に対して, $f^{(i)}(x) \rightsquigarrow x^i$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ というような置き換えを行なって, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求め,

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{L}(x - \lambda_i)^{m_i}\end{aligned}$$

というように因数分解する.

(ii) (i) で得られた因数分解のパターンから, $C_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ として,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{L}\left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)}x + \cdots + C_{m_i-1}^{(i)}x^{m_i-1}\right)e^{\lambda_i x}$$

を考える.

(iii) 例えば, 初期値 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$ を用いることで, 係数 $C_j^{(i)}$ を決定する.

このような戦略で微分方程式の解を求めることにすれば, 正則行列 P を具体的に求めたり, 行列の指数関数 e^{xA} を計算する必要がなくなるので, 物理学の教科書などでは, このような解法が説明されていることが多いわけです.

ここでは, 定数係数の線型常微分方程式について説明しましたが, 第 7 回の問 1 のところと同様に,

$$x_{k+n} + a_{n-1}x_{k+n-1} + \cdots + a_1 x_{k+1} + a_0 x_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

という数列 $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$ に対する定数係数の線型漸化式に対しても, 全く同様な考察ができます. すなわち, この場合に, 上と同様の議論を行なうことで,

定数係数の線型漸化式の解を求める戦略

(i) 与えられた線型漸化式に対して, $x_{k+i} \rightsquigarrow t^i$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ というような置き換えを行なって, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ を求め,

$$\begin{aligned}\varphi_A(t) &= t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \\ &= \prod_{i=1}^{L}(t - \lambda_i)^{m_i}\end{aligned}$$

というように因数分解する.

(ii) (i) で得られた因数分解のパターンから, $C_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ として,

$$x_k = \sum_{i=1}^{L}\left(C_0^{(i)} + C_1^{(i)}k + \cdots + C_{m_i-1}^{(i)}k^{m_i-1}\right)\cdot(\lambda_i)^k$$

を考える.

(iii) 例えば, 初期値 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ を用いることで, 係数 $C_j^{(i)}$ を決定する.

という戦略が立つことが分かります. 興味がある方は, 第 7 回の問 1 のところで行なった議論と, この節で行なった議論を参考にして, 確かめてみて下さい.