

数学 II 演習 (第 13 回) のヒント

問 1.

- (1) 行列式を計算して, $\varphi_A(x) = \det(xI - A)$ を求めてみよ.
- (2) 特性多項式 $\varphi_A(x)$ を割り切る x に関する最高次の係数が 1 であるような多項式をすべてピックアップして, それらの多項式に行列 A を代入してみると, 行列 A を「根」に持つ多項式のうちで, 最も次数の低い多項式 $\psi_A(x)$ を求めよ. また, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数として, 3 行 3 列の行列の Jordan 標準形

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_6 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

の最小多項式 $\psi_{J_1}(x), \psi_{J_2}(x), \dots, \psi_{J_6}(x)$ は, それぞれ,

$$\begin{cases} \psi_{J_1}(x) = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu) \\ \psi_{J_2}(x) = (x - \lambda)(x - \mu) \\ \psi_{J_3}(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu) \\ \psi_{J_4}(x) = (x - \lambda) \\ \psi_{J_5}(x) = (x - \lambda)^2 \\ \psi_{J_6}(x) = (x - \lambda)^3 \end{cases}$$

となることに注意して,

$$\psi_A(x) = \psi_{J_A}(x)$$

となるような Jordan 標準形 J_A を求めてみよ.

♣ 余裕があれば, 第 12 回の問 1 の (5) と同様に,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

として,

$$P^{-1}AP = J_A$$

という式を, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ という列ベクトルに対する条件として書き直してみよ. また, こうして得られた連立一次方程式を順番に解くことにより, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を

順番に求めてみよ. ここで, 行列 A の固有値 1 に対しては, 最初に, $a, b, c \in \mathbb{C}$ として,

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

という連立一次方程式が解を持つための a, b, c が満たすべき条件と, その条件が満たされるときの方程式の解をすべて求めるという方針を取ることになると, 連立一次方程式を解く手間が一度で済んでしまうかもしれません.

問 2.

- (1) 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $h^{(n)}(1)$ を直接求めることで, あるいは, $|T| < 1$ に対して,

$$\frac{1}{1-T} = 1 + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

となることを利用するなどして, $h(x)$ の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開を求めてみよ.

- (2) (♡) 式より, $g_1(x)$ は,

$$g_1(x) = \frac{1}{x-2} - (x-1)^2 \cdot \frac{g_2(x)}{x-2}$$

と表わせることに注意します. このとき,

$$\frac{g_2(x)}{x-2}$$

という関数の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開を, $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ として,

$$\frac{g_2(x)}{x-2} = a_0 + a_1(x-1) + \cdots$$

と表わすことにして, (1) の結果と合わせると, $g_1(x)$ が $(x-1)$ のべき級数として, どのような形で表わされることになるのかを考えてみよ.

あるいは, (♡) 式から, 直接, $g_1(1), g_1'(1)$ を求めることで, $g_1(x)$ の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開がどのような形になるのかを考えてみよ.

- (3) 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $k^{(n)}(2)$ を直接求めることで, あるいは, $|T| < 1$ に対して,

$$\frac{1}{(1+T)^2} = 1 - 2T + 3T^2 - 4T^3 + \cdots$$

となることを利用するなどして, $k(x)$ の $x = 2$ のまわりでの Taylor 展開を求めてみよ.

(4) (2) と同様にして, $g_2(x)$ の $x = 2$ のまわりでの Taylor 展開がどのような形になるのかを考えてみよ.

(5) $g_1(x) = -x$, $g_2(x) = 1$ を (♡) 式に代入してみよ.

問 3.

(1) (♡) 式の両辺に, $x = A$ を代入するとどのような式が得られるのかを考えてみよ. また, その式の両辺を, ベクトル $u \in \mathbb{C}^3$ に施すとどうなるのかも考えてみよ.

(2) 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を, $f_1(x)$, あるいは, $f_2(x)$ を用いて表わすとどうなるのかを考えてみよ. また,

$$\psi_A(A) = O$$

となることに注意して, それらの式に $x = A$ を代入するとどのような式が得られるのかを考えてみよ.

(3) 例えば,

$$\begin{cases} g_1(x) = -x \\ g_2(x) = 1 \end{cases}$$

として,

$$\begin{cases} P_1 = -(A - 2I)A \\ P_2 = (A - I)^2 \end{cases}$$

を具体的に求めてみよ. また, 例えば, 列変形のみを施して, 行列 P_1, P_2 を列変形に関する「精一杯の見やすい形」に変形することで, $\text{Im } P_1, \text{Im } P_2$ の基底を求めてみよ.