数学 II 演習 (第 13 回)

問 **1.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の特性多項式 $\varphi_A(x)=\det(xI-A)$ を求めよ.
(2) A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めよ. また, その結果を用いて, 行列 A の *Jordan* 標準形 J_A の形を予想してみよ.

♣ 余裕があれば, $P^{-1}AP=J_A$ となる正則行列 P をひとつ求めよ.

問 **2.** $\psi_A(x)=(x-1)^2(x-2)$ なる多項式を考えて,

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{\psi_A(x)}{(x-1)^2}=x-2 \\ f_2(x)=\dfrac{\psi_A(x)}{x-2}=(x-1)^2 \end{cases}$$

とする. このとき,

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)=(x-2)g_1(x)+(x-1)^2g_2(x)=1 \qquad \cdots\ (\heartsuit)$$

となる多項式 $g_1(x), g_2(x)$ を, 以下の方針で見つけてみよ.

(1) $h(x)=\frac{1}{x-2}$ の $x=1$ のまわりでの *Taylor* 展開を求めよ.
(2) $g_1(x)$ の $x=1$ のまわりでの *Taylor* 展開は,

$$g_1(x)=-1-(x-1)+\cdots$$

という形でなければならないことを示せ.
(3) $k(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ の $x=2$ のまわりでの *Taylor* 展開を求めよ.
(4) $g_2(x)$ の $x=2$ のまわりでの *Taylor* 展開は,

$$g_2(x)=1+\cdots$$

という形でなければならないことを示せ.
(5) そこで, 試みに,

$$\begin{cases} g_1(x)=-1-(x-1)=-x \\ g_2(x)=1 \end{cases}$$

としてみる. このとき, $g_1(x), g_2(x)$ は $(\heartsuit)$ を満たすことを確かめよ.

♣ 余裕があれば, $(\heartsuit)$ を満たす多項式の組 $(g_1(x), g_2(x))$ をすべて求めてみよ.
♠ 裏に問 3 があります.

問 **3.** 問 1 の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$ と, 問 2 で求めた (♡) を満たす多項式 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ に対して,

$$\begin{cases} P_1 = f_1(A)g_1(A) \\ P_2 = f_2(A)g_2(A) \end{cases}$$

という行列を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = P_1\mathbf{u} \\ \mathbf{u}_2 = P_2\mathbf{u} \end{cases}$$

と定めると, $\mathbf{u}$ は,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

と分解されることを示せ.

(2) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^3$ は,

$$\begin{cases} (A-I)^2\mathbf{u}_1 = 0 \\ (A-2I)\mathbf{u}_2 = 0 \end{cases}$$

という式を満たすことを示せ.

(3) P_1, P_2 を具体的に計算して, $\mathrm{Im}\, P_1$, $\mathrm{Im}\, P_2$ の基底を求めよ.

♣ 余裕があれば, $\mathrm{Im}\, P_1$, $\mathrm{Im}\, P_2$ の基底と $P^{-1}AP = J_A$ となる正則行列 P の関係を考えてみよ.