

数学 II 演習 (第 12 回) のヒント

問 1.

- (1) 行列式を計算して, $\varphi_A(x) = \det(xI - A)$ を求めてみよ.
- (2) (1) で求めた特性多項式 $\varphi_A(x)$ に行列 A を代入して, $\varphi_A(A) = O$ となることを確かめてみよ. ここで, $\varphi_A(x)$ を因数分解した式に $x = A$ を代入するという方針を取ると, 計算が少し楽になるかもしれません.
- (3) (2) より, $\varphi_A(A) = O$ となるので, 最小多項式 $\psi_A(x)$ は特性多項式 $\varphi_A(x)$ を割り切ることが分かる. そこで, $\varphi_A(x)$ を割り切る x に関する最高次の係数が 1 であるような多項式をすべてピックアップして, それらの多項式に行列 A を代入してみることで, 行列 A を「根」に持つ多項式のうちで, 最も次数の低い多項式 $\psi_A(x)$ を求めよ.
- (4) (3) の結果と問題文の中で挙げたそれぞれの Jordan 標準形 $J_1, J_2, \dots, J_6$ に対する最小多項式 $\psi_{J_1}(x), \psi_{J_2}(x), \dots, \psi_{J_6}(x)$ とを見比べてみることで,

$$\psi_A(x) = \psi_{J_A}(x)$$

となるような Jordan 標準形 J_A を求めてみよ.

- (5) 「行列の対角化の問題」のときと同様に,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

として,

$$P^{-1}AP = J_A$$

という式を, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ という列ベクトルに対する条件として書き直してみよ. また, こうして得られた連立一次方程式を順番に解くことにより, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を順番に求めてみよ. ここで, 最初に, 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $a, b, c \in \mathbb{C}$ として,

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

という連立一次方程式が解を持つための a, b, c が満たすべき条件と, その条件が満たされるときの方程式の解をすべて求めるという方針を取ることにすると, 連立一次方程式を解く手間が一度で済んでしまうかもしれません.

問 2. $c_0, c_1, \dots, c_{m_0-1} \in \mathbb{C}$ として,

$$c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{m_0-1} \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

と仮定したときに, (1) 式の両辺に線型写像 N を何度か施すことにより,

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m_0-1} = 0$$

となることを順番に確かめてみよ. また, どのように議論してよいのかすぐに見当が付かない場合には, まず, $m_0 = 1$ や $m_0 = 2$ の場合にはどうなるかということを考えてみよ.