

数学 II 演習 (第 12 回)

問 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x) = \det(xI - A)$ を求めよ.
- (2) $\varphi_A(A) = O$ となることを確かめよ.
- (3) 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めよ.
- (4) 行列 A の Jordan 標準形 J_A を求めよ.
- (5) $P^{-1}AP = J_A$ となる正則行列 P をひとつ求めよ.

● 問 1 についての補足

第 11 回のときと同様に, 正方行列 A に対して, A を「根」に持つ多項式全体の集合を,

$$I_A = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O\}$$

という記号を用いて表わすことにする. このとき, I_A に属する 0 でない多項式の中で, 最も次数の低いものを $\psi_A(x) \in I_A$ とすると, I_A は,

$$\begin{aligned} I_A &= \{\psi_A(x)g(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g(x) \in \mathbb{C}[x]\} \\ &= \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

というように表わすことができる. すなわち, 行列 A を「根」に持つ多項式は $\psi_A(x)$ で割り切れることが分かる. このような多項式 $\psi_A(x)$ のうち, 変数 x に関する最高次の係数が 1 となるものを行列 A の最小多項式と呼ぶ.

また, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数として,

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, & J_2 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, & J_3 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ J_4 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & J_5 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & J_6 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という形の行列を 3 行 3 列の行列に対する Jordan 標準形という. このとき,

$$I_i = I_{J_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

と表わすことにすると, それぞれの Jordan 標準形に対応したイデアル I_i と最小多項式 $\psi_{J_i}(x)$ は, 次のようになる. (第 11 回の問 1 では, I_5 と I_6 を求めた.)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} I_1 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = f(\mu) = f(\nu) = 0\} \\ \psi_{J_1}(x) = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu) \end{cases} \\ & \begin{cases} I_2 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = f(\mu) = 0\} \\ \psi_{J_2}(x) = (x - \lambda)(x - \mu) \end{cases} \\ & \begin{cases} I_3 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = f'(\lambda) = f(\mu) = 0\} \\ \psi_{J_3}(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu) \end{cases} \\ & \begin{cases} I_4 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = 0\} \\ \psi_{J_4}(x) = (x - \lambda) \end{cases} \\ & \begin{cases} I_5 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = f'(\lambda) = 0\} \\ \psi_{J_5}(x) = (x - \lambda)^2 \end{cases} \\ & \begin{cases} I_6 = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = 0\} \\ \psi_{J_6}(x) = (x - \lambda)^3 \end{cases} \end{aligned}$$

さらに, 第 11 回の問 2 の結果から, 3 行 3 列の行列 A が, 勝手にひとつ与えられたときに, いずれかの Jordan 標準形 J_i , ($i = 1, 2, \dots, 6$) に対して,

$$P^{-1}AP = J_i$$

となる正則行列 P が存在するなら,

$$I_A = I_i$$

となることが分かる. このことを用いて, 行列 A の Jordan 標準形を求めることができる.

♣ 余裕があれば, 第 11 回の問 1 と同様にして, それぞれの Jordan 標準形 J_i に対して, $I_i = I_{J_i}$ が上のような形で表わせることを確かめてみよ.

問 2. V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間として, V 上の線型写像

$$N : V \rightarrow V$$

が, ある自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$N^{m_0-1} \neq 0, \quad N^{m_0} = 0$$

を満たしているとする. このとき, $N^{m_0-1}\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ となるようなベクトル $\mathbf{u}_0 \in V$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$\mathbf{u}_k = N^k \mathbf{u}_0, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0 - 1)$$

と定めると, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m_0-1}\}$ は線型独立となることを示せ.