数学 II 演習 (第 11 回) のヒント

問 1.

(1) A^n がどのような行列になるのかすぐに分からなければ, A^2, A^3 などを計算してみて, A^n の形に「当たり」を付けてみよ.

(2) (1) の結果を用いて, 行列 $f(A)$ のそれぞれの行列成分を a, b, c, d と λ を用いて表わしてみよ.

(3) 一般の多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, $f(A)$ という行列がどのようになるのかということが考えづらい場合には, まず,

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

として, (2) の結果を a, b, c, d を用いずに, $f(\lambda), f'(\lambda), f''(\lambda)$ を用いて表わすことを考えてみよ. また, 一般の多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

の場合には, (1) の結果より,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$A^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} N^2$$

というように表わせることに注意して,

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left\{ \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} N^2 \right\} \end{aligned}$$

を N のベキの形に整理したときに, それぞれの係数が $f(x)$ を用いてどのように表わせるのかということを考えてみよ.

(4) 例えば,

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$B = \lambda I + N'$$

と表わして, 二項展開を用いて, $B^n = (\lambda I + N')^n$ を求めてみよ.

(5) (3) と同様にして, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, 行列 $f(B)$ のそれぞれの行列成分を $f(\lambda), f'(\lambda)$ を用いて表わしてみよ.

問 2.

(1) $f(A) = g(A) = O$ となることに注意して, $f(x) + g(x)$ に行列 A を代入してみよ.

(2) $f(A) = O$ となることに注意して, $f(x)h(x)$ に行列 A を代入してみよ.

(3) $A' = P^{-1}AP$ の両辺を n 乗してみよ.

(4) (3) の結果に注意して,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$$

に, $A' = P^{-1}AP$ を代入してみよ.

(5) (4) の結果を用いて, $I_A \subset I_{A'}$ となること, すなわち,

$$f(x) \in I_A \implies f(x) \in I_{A'}$$

となることを示してみよ. また, 同様にして, $I_A \supset I_{A'}$ となること, すなわち,

$$f(x) \in I_{A'} \implies f(x) \in I_A$$

となることも示してみよ.