

数学 II 演習 (第 10 回) のヒント

問 1.

- (1) 偏微分を計算して, $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)$ となる点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$ を求めてみよ.
- (2) 偏微分を計算して, 行列 A を具体的に求めてみよ.
- (3) 「行列の対角化の問題」を解決するための

——「行列の対角化の問題」を解決する戦略——

(i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める. ($\Rightarrow$ 行列 A の固有値が求まる.)

(ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて,

$$V(\lambda) = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \}$$

を求める. ($\Rightarrow$ 行列 A の固有ベクトルが求まる.)

(iii) $V(\lambda)$ たちの中から, 適当にベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, 3$) を取り出して, 正則行列 P を作る.

という戦略を実行してみよ. ただし, (iii) のステップでは, 行列 P を直交行列に取るために, それぞれの固有値に対応した固有ベクトル空間から長さが 1 の固有ベクトルを取り出して, それらを $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, 3$) と定めてみよ. また, このとき, $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, 3$) は互いに直交していることも確かめてみよ.

問 2.

- (1) 例えば, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ として,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表わして,

$${}^t\bar{X} = X, \operatorname{tr} X = 0$$

という条件を具体的に書き下してみよ.

(2) (1) の結果などを用いて,

—— $\{e_1, e_2, e_3\}$ が V の基底であるための条件 ——

(イ) 勝手な元 $X \in V$ に対して,

$$X = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

となるような実数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $x, y, z \in \mathbb{R}$ として,

$$0 = xe_1 + ye_2 + ze_3 \implies x = y = z = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめてみよ. また, 内積 $\langle \rangle$ の定義にもとづいて,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

となることを確かめてみよ.

(3) 一般に, 掛け算のできるふたつの行列 X, Y に対して,

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$$

となることに注意して, T_A の定義や A がユニタリー行列であることなどを用いて,

$$\langle T_A(X), T_A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

となることを確かめてみよ.

(4) 基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関する線型写像 $T_A : V \rightarrow V$ の表現行列 $\hat{T}_A$ を求めるためには,

(イ) 基底の元の行き先 $T_A(e_1), T_A(e_2), T_A(e_3) \in V$ の「番地」を求める.

($\implies$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{T}_A$ になる.)

(ロ) 基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を用いた「番地割り」 $V \cong \mathbb{R}^3$ のもとで,

$$V \ni X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているときに, $T_A(X) \in V$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.

($\implies$ このとき,

$$V \ni T_A(X) \longleftrightarrow \hat{T}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法が考えられることに注意して, (イ), (ロ) のうちのいずれかの方法を用いて, 表現行列 $\hat{T}_A$ を求めてみよ.