数学 II 演習 (第 10 回)

問 1. $\mathbb{R}^3$ 上の関数

$$f(x,y,z)=\frac{3}{2}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2-2xy-2yz+2x+2y$$

を考える．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y,z)$ の臨界点 $p_0\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．すなわち,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(p_0)=0$$

となるような点 $p_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．

(2) (1) で求めた臨界点 $p_0\in\mathbb{R}^3$ に対して, 関数 $f(x,y,z)$ の臨界点 p_0 におけるヘッシアンを求めよ．すなわち,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

という式で定まる行列 A を求めよ．

(3) A を直交行列により対角化せよ．すなわち,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となるような実数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ と直交行列 P を求めよ．

問 2. $\mathbb{R}$ 上の線型空間

$$V=\left\{X\in M_2(\mathbb{C})\mid {}^t\bar{X}=X,\ \mathrm{tr}\,X=0\ \right\}$$

を考える．すなわち, V は, トレースが 0 となる 2 行 2 列のエルミート行列全体の集合である．また, $X,Y\in V$ に対して,

$$\langle X,Y\rangle=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(XY)$$

という式により線型空間 V 上の内積を定める．(余裕のある人は, 内積の公理が成り立つことを確かめてみよ．) このとき, 以下の問に答えよ．

(1) V の元 $X\in V$ は,

$$X=\begin{pmatrix} z & x+\sqrt{-1}\,y \\ x-\sqrt{-1}\,y & -z \end{pmatrix},\quad x,y,z\in\mathbb{R}$$

という形に表わせることを示せ．

♠ 裏に続きがあります．

(2) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V$ を,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めるとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は V の正規直交基底になることを示せ.

(3) A を 2 行 2 列のユニタリー行列として, $X \in V$ に対して,

$$T_A(X) = AXA^{-1} = AX{}^t\bar{A}$$

という式により定まる線型写像

$$T_A : V \to V$$

を考える. このとき, T_A は内積 $\langle \quad , \quad \rangle$ を保つことを示せ. すなわち, 勝手な元 $X, Y \in V$ に対して,

$$\langle T_A(X), T_A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

となることを示せ. ただし, 行列 A がユニタリー行列であるとは,

$${}^t\bar{A}A = A{}^t\bar{A} = I$$

という式が成り立つことである.

(4) $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ として,

$$A = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\,\theta} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\,\eta} \end{pmatrix}$$

という形のユニタリー行列 A を考える. このとき, 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する線型写像 T_A の表現行列 $\hat{T}_A$ を求めよ. また, $\hat{T}_A$ は幾何学的にどのような写像であるのかということも考えてみよ.