

数学 II 演習 (第 9 回) の略解

目 次

1	問 1 の解答	1
2	問 1 を見直すと	13
3	行列の対角化の問題について	20
4	問 2 の解答	30
5	問 2 の結果を因数分解してみると	30
6	問 1 の結果と比べると	32
7	問 3 の解答	35
8	直和とは	38
9	固有ベクトル空間分解について	50
10	固有な性質とは	61

1 問 1 の解答

第 8 回の問 1 のところと同様に, 記号の意味や説明されている概念の意味が理解しやすくなるように, 以下では, 関数 $f \in V$ を線型空間 V の点だと考えているときには, 「 $\mathbf{f}$ 」というように**太文字**で表わして, 複素数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ などと区別して表わすことにします. ただし, 関数 f の $x \in S$ での**値**を考えているときには, $f(x) \in \mathbb{C}$ を数であると考えて, 「 $\mathbf{f}(x)$ 」ではなくて, 単に, 「 $f(x)$ 」と表わすことにします.

- (1) 第 6 回の問 2 のところで見たとように, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底であることを示すためには,

— $\{f_0, f_1, f_2\}$ が V の基底であるための条件 —

(イ) 勝手な元 $f \in V$ に対して,

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2$$

となるような複素数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ が存在する.

(ロ) $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ として,

$$0 = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめれば良いということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみることにします. いま, $f \in V$ という元を, 勝手にひとつ取ってきたとします.¹ このとき,

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \tag{1}$$

というように表わせるような複素数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ を見つけたいわけですが, そのために, まず, f が (1) 式のような形に表わせると仮定すると, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ は, どのような複素数でなければならないのかということに「当たり」を付けてみることにします.

いま,

$$\begin{cases} f_0(0) = 1 \\ f_0(1) = 0 \\ f_0(2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_1(1) = 1 \\ f_1(2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(0) = 0 \\ f_2(1) = 0 \\ f_2(2) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

であることに注意して, (1) 式の両辺に現われる関数のそれぞれの点 $x \in S$ における値を比べてみると,

$$\begin{aligned} f(0) &= (a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2)(0) && \text{((1) 式から)} \\ &= a_0 \cdot f_0(0) + a_1 \cdot f_1(0) + a_2 \cdot f_2(0) \\ &= a_0 && \text{((2) 式から)} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= (a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2)(1) && \text{((1) 式から)} \\ &= a_0 \cdot f_0(1) + a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) \\ &= a_1 && \text{((2) 式から)} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= (a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2)(2) && \text{((1) 式から)} \\ &= a_0 \cdot f_0(2) + a_1 \cdot f_1(2) + a_2 \cdot f_2(2) \\ &= a_2 && \text{((2) 式から)} \end{aligned} \tag{5}$$

¹これでは, 抽象的で考えにくいと思われる方は, $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 8$ という式で与えられる関数など, 自分で, 具体的な関数をひとつ取ってきて考えてみて下さい.

となることが分かります. よって, (3) 式, (4) 式, (5) 式から,

$$\begin{cases} a_0 = f(0), \\ a_1 = f(1), \\ a_2 = f(2) \end{cases}$$

でなければならないことが分かります.

そこで,

$$\mathbf{g} = f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (6)$$

という関数を考えてみます. すると, (2) 式から, それぞれの点 $x \in S$ における関数 $\mathbf{g} \in V$ の値は,

$$\begin{aligned} g(0) &= (f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2)(0) && ((6) \text{ 式から }) \\ &= f(0) \cdot f_0(0) + f(1) \cdot f_1(0) + f(2) \cdot f_2(0) \\ &= f(0) && ((2) \text{ 式から }) \\ g(1) &= (f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2)(1) && ((6) \text{ 式から }) \\ &= f(0) \cdot f_0(1) + f(1) \cdot f_1(1) + f(2) \cdot f_2(1) \\ &= f(1) && ((2) \text{ 式から }) \\ g(2) &= (f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2)(2) && ((6) \text{ 式から }) \\ &= f(0) \cdot f_0(2) + f(1) \cdot f_1(2) + f(2) \cdot f_2(2) \\ &= f(2) && ((2) \text{ 式から }) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, 見かけは異なりますが, **数の対応のさせ方が等しい**ので, $S = \{0, 1, 2\}$ 上の関数として,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{g} \\ &= f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

となることが分かります. したがって, (7) 式から, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{0} \in V$ が,

$$\mathbf{0} = a_0 \mathbf{f}_0 + a_1 \mathbf{f}_1 + a_2 \mathbf{f}_2 \quad (8)$$

というように表わせたと仮定してみます. ここで, 左辺の $\mathbf{0}$ とは, V の原点 $\mathbf{0} \in V$ のことですから, すべての S の元に対して, $0 \in \mathbb{C}$ を対応させる**零関数**であることに注意します. そこで, 前と同様に, (8) 式の両辺に現われる関数のそれぞれの点 $x \in S$ における値を考えてみると,

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 \mathbf{f}_0 + a_1 \mathbf{f}_1 + a_2 \mathbf{f}_2)(0) && ((8) \text{ 式から }) \\ &= a_0 \cdot f_0(0) + a_1 \cdot f_1(0) + a_2 \cdot f_2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 && ((2) \text{ 式から}) \\
0 &= (a_0 \mathbf{f}_0 + a_1 \mathbf{f}_1 + a_2 \mathbf{f}_2)(1) && ((8) \text{ 式から}) \\
&= a_0 \cdot f_0(1) + a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) \\
&= a_1 && ((2) \text{ 式から}) \\
0 &= (a_0 \mathbf{f}_0 + a_1 \mathbf{f}_1 + a_2 \mathbf{f}_2)(2) && ((8) \text{ 式から}) \\
&= a_0 \cdot f_0(2) + a_1 \cdot f_1(2) + a_2 \cdot f_2(2) \\
&= a_2 && ((2) \text{ 式から})
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となることが分かります. したがって, (ロ) という条件も満たされることが分かります. 以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ は V の基底になることが分かります.

いま, (7) 式から, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底に対応する「番地割り」は,

(7) 式をもとにして, $f \in V$ に「番地」を割り振る

$$V \ni \mathbf{f} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

という非常に自然なものであることが分かります. このことは, V のような関数の空間に対して, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ のような基底を考えることは, ある意味で自然であるということを意味しています. 皆さんの中に「Dirac の δ 関数」という関数をご存じの方があるとすれば, 我々の場合に δ 関数に当たる関数が, ちょうど, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という関数であることを納得できるのではないかと思います.

- (2) いま, $\mathbf{f} \in V$ という関数を, 勝手にひとつ取ってきます. このとき, 定義によって, 関数 $\mathbf{f}$ は,

$$\mathbf{f} : \begin{cases} 0 \mapsto f(0) \\ 1 \mapsto f(1) \\ 2 \mapsto f(2) \end{cases}$$

という対応を与える関数であるわけですが, この対応のさせ方を「ひねって」,

$$\begin{cases} 0 \mapsto f(1) \\ 1 \mapsto f(2) \\ 2 \mapsto f(0) \end{cases}$$

という対応を与える関数を考えて, この関数を,

$$T\mathbf{f} \in V$$

というように表わすことにします.² 例えば, $\mathbf{f} \in V$ が,

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 3 \\ f(2) = 7 \end{cases}$$

という関数であるとするば, $T\mathbf{f} \in V$ は,

$$\begin{cases} (Tf)(0) = f(1) = 3 \\ (Tf)(1) = f(2) = 7 \\ (Tf)(2) = f(0) = 2 \end{cases}$$

という関数であるということになります. このとき, 少し話がややこしいですが, $\mathbf{f} \in V$ に対して, $T\mathbf{f} \in V$ を対応させる写像を考えて, この写像を

$$T: V \rightarrow V$$

というように表わすことにします.³ すると, この写像 T が線型写像になるということを確認してみてくださいというのが, (2) の問題の意味です.

第6回の問3のところで見たように,

$$T: V \rightarrow V$$

が線型写像であることを示すためには,

— T が線型写像であるための条件 —

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ に対して,

$$T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = T\mathbf{f} + T\mathbf{g} \quad (9)$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{f} \in V$ と勝手な複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$T(a\mathbf{f}) = a \cdot T\mathbf{f} \quad (10)$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめれば良いということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. いま, (9) 式の両辺に現われる関数が, どのような関数であるのかということを理解するために, それぞれの関数

²英語で「ひねる」ことを *twist* と呼ぶので, 対応する線型写像を「 T 」という文字を用いて表わすことにしました.

³本当は, $\mathbf{f} \in V$ に対応する元は $T(\mathbf{f}) \in V$ というように表わすべきですが, こうすると, この関数の値を考えると, 括弧が重なってしまい, 式が見にくくなるので, 混乱が生じる恐れがないときには, 単に, $T\mathbf{f}$ と表わすことにします.

の各点 $x \in S$ における値を具体的に求めてみることにします. その際に, それぞれの等号の意味がより良く理解できるように, 「 $=$ 」の成り立つ根拠も一緒に書き留めておくことにします. すると, (9) 式の左辺に現われる $T(\mathbf{f} + \mathbf{g})$ という関数の点 $x \in S$ における値は,

$$\begin{aligned} (T(\mathbf{f} + \mathbf{g}))(x) &= (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x+1) && (T \text{ の定義から}) \\ &= f(x+1) + g(x+1) && (\mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ の定義から}) \end{aligned} \quad (11)$$

となることが分かります. 一方, (9) 式の右辺に現われる $T\mathbf{f} + T\mathbf{g}$ という関数の値は,

$$\begin{aligned} (T\mathbf{f} + T\mathbf{g})(x) &= (T\mathbf{f})(x) + (T\mathbf{g})(x) && (T\mathbf{f} + T\mathbf{g} \text{ の定義から}) \\ &= f(x+1) + g(x+1) && (T \text{ の定義から}) \end{aligned} \quad (12)$$

となることが分かります. よって, (11) 式, (12) 式から, 見かけは異なっていますが, 両方の関数とも,

$$S \ni x \longmapsto f(x+1) + g(x+1) \in \mathbb{C}$$

という同じ対応を与えることが分かりますから,

$$T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = T\mathbf{f} + T\mathbf{g}$$

となることが分かります. したがって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. そこで, 前と同様に, (10) 式の両辺に現われる関数の各点 $x \in S$ での値を具体的に求めてみることにします. すると, (10) 式の左辺に現われる $T(a\mathbf{f})$ という関数の値は,

$$\begin{aligned} (T(a\mathbf{f}))(x) &= (a\mathbf{f})(x+1) && (T \text{ の定義から}) \\ &= a \cdot f(x+1) && (a\mathbf{f} \text{ の定義から}) \end{aligned} \quad (13)$$

となることが分かります. 一方, (10) 式の右辺に現われる $a \cdot T\mathbf{f}$ という関数の値は,

$$\begin{aligned} (a \cdot T\mathbf{f})(x) &= a \cdot \{(T\mathbf{f})(x)\} && (a \cdot T\mathbf{f} \text{ の定義から}) \\ &= a \cdot f(x+1) && (T \text{ の定義から}) \end{aligned} \quad (14)$$

となることが分かります. よって, (13) 式, (14) 式から, 見かけは異なっていますが, 両方の関数とも,

$$S \ni x \longmapsto a \cdot f(x+1) \in \mathbb{C}$$

という同じ対応を与えることが分かりますから,

$$T(a\mathbf{f}) = a \cdot T\mathbf{f}$$

となることが分かります. したがって, (ロ) という条件も満たされることが分かります. 以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $T: V \rightarrow V$ は線型写像であることが分かります.

(3) 第6回の問3のところで見たように, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ に関する線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列 $\hat{T}$ を求めるためには,

(イ) 基底の元の行き先 $T\mathbf{f}_0, T\mathbf{f}_1, T\mathbf{f}_2 \in V$ の「番地」を求める.

($\implies$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{T}$ になる.)

(ロ) 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」 $V \cong \mathbb{C}^3$ のもとで,

$$V \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているときに, $T\mathbf{f} \in V$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.

($\implies$ このとき,

$$V \ni T\mathbf{f} \longleftrightarrow \hat{T} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法を考えることができます. 表現行列 $\hat{T}$ を求めるためには, どちらの方法を用いても構わないわけですが, 皆さんの参考のために, 以下では, それぞれの方法を用いて表現行列 $\hat{T}$ を求めると, どのようなことになるのかということを順番に見てみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. (1) で注意したように, (7) 式より, 勝手な関数 $\mathbf{f} \in V$ は,

$$\mathbf{f} = f(0) \cdot \mathbf{f}_0 + f(1) \cdot \mathbf{f}_1 + f(2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (15)$$

というように表わされることが分かりますから, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f} \in V$ に対応する「番地」は,

$$V \ni \mathbf{f} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \quad (16)$$

という式で与えられることが分かります. そこで, いま, 線型写像 T の定義にもとづいて, $T\mathbf{f}_0, T\mathbf{f}_1, T\mathbf{f}_2 \in V$ という関数の各点 $x \in S$ における値を具体的に求めてみると,

$$\begin{cases} (Tf_0)(0) = f_0(1) = 0 \\ (Tf_0)(1) = f_0(2) = 0 \\ (Tf_0)(2) = f_0(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} (Tf_1)(0) = f_1(1) = 1 \\ (Tf_1)(1) = f_1(2) = 0 \\ (Tf_1)(2) = f_1(0) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (Tf_2)(0) = f_2(1) = 0 \\ (Tf_2)(1) = f_2(2) = 1 \\ (Tf_2)(2) = f_2(0) = 0 \end{cases}$$

となることが分かります. よって, $\mathbf{f} \rightsquigarrow T\mathbf{f}_i$, ($i = 0, 1, 2$) と置き換えて, (16) 式を適応してみると, $T\mathbf{f}_0, T\mathbf{f}_1, T\mathbf{f}_2 \in V$ に対応する「番地」は, それぞれ,

$$\begin{aligned} V \ni T\mathbf{f}_0 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} (Tf_0)(0) \\ (Tf_0)(1) \\ (Tf_0)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni T\mathbf{f}_1 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} (Tf_1)(0) \\ (Tf_1)(1) \\ (Tf_1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni T\mathbf{f}_2 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} (Tf_2)(0) \\ (Tf_2)(1) \\ (Tf_2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \end{aligned}$$

という式で与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\hat{T}$ は,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$V \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \quad (17)$$

と対応しているとします. すると, (16) 式から, $\mathbf{f} \in V$ は,

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_1 \\ f(2) = a_2 \end{cases} \quad (18)$$

という関数であることが分かります. そこで, いま, $T\mathbf{f} \in V$ の「番地」を,

$$V \ni T\mathbf{f} = b_0\mathbf{f}_0 + b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と表わすことにします. このとき, $\mathbf{f} \rightsquigarrow T\mathbf{f}$ と置き換えて, (16) 式を適用してみると,

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tf(0) \\ Tf(1) \\ Tf(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(0) \end{pmatrix} \quad (T \text{ の定義から}) \quad (19)$$

となることが分かります. よって, (18) 式, (19) 式から,

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(0) \end{pmatrix} \quad ((19) \text{ 式から})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad ((18) \text{ 式から})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\hat{T}$ は,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.⁴

(4) 定義により,

$$\begin{cases} g_0(0) = 1 \\ g_0(1) = 1 \\ g_0(2) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_1(0) = 1 \\ g_1(1) = \omega \\ g_1(2) = \omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_2(0) = 1 \\ g_2(1) = \omega^2 \\ g_2(2) = \omega^4 \end{cases}$$

となるので, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ に対応する「番地」は,

$$\begin{aligned} V \ni \mathbf{g}_0 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} g_0(0) \\ g_0(1) \\ g_0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni \mathbf{g}_1 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni \mathbf{g}_2 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \end{aligned}$$

⁴もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{T}$ と同じものです.

という式で与えられることが分かります. よって, これらの「番地」を並べた行列を,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

と表わすことにすると, $\{g_0, g_1, g_2\}$ は, 基底 $\{f_0, f_1, f_2\}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix} P \quad (21)$$

と表わせることが分かります. 第8回の問1のところで見たように, 一般に, 3行3列の行列 P に対して, (21) 式により, $g_0, g_1, g_2 \in V$ を定めるとき,

$\{g_0, g_1, g_2\}$ が V の基底になるための条件

$$\begin{aligned} \{g_0, g_1, g_2\} \text{ が } V \text{ の基底になる.} &\iff P \text{ は正則行列.} \\ &\iff \det P \neq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となることが分かります. よって, $\{g_0, g_1, g_2\}$ が V の基底となることを示すには, (20) 式の行列 P が正則行列であることを確かめれば良いということになります.

そこで, $\det P$ を計算してみると, 例えば,

$$\begin{aligned} \det P &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega - 1 & \omega^2 - \omega \\ 1 & \omega^2 - 1 & \omega^4 - \omega^2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} 3 \text{ 列目} + 2 \text{ 列目} \times (-1) \\ 2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \omega - 1 & \omega(\omega - 1) \\ \omega^2 - 1 & \omega^2(\omega^2 - 1) \end{vmatrix} && (1 \text{ 行目で展開}) \\ &= (\omega - 1)(\omega^2 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= (\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega) \end{aligned} \quad (23)$$

となることが分かります. ここで,

$$\begin{cases} \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \neq 1, \\ \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \neq 1, \omega \end{cases} \quad (24)$$

となることに注意すると, (23) 式, (24) 式から,

$$\begin{aligned} \det P &= (\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 行列 P は正則行列であることが分かります. よって, (22) 式から, $\{g_0, g_1, g_2\}$ も V の基底になることが分かります.

(5) それぞれの関数の各点 $x \in S$ における値を比べてみると,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (T\mathbf{g}_0)(0) = g_0(1) = 1 \\ (T\mathbf{g}_0)(1) = g_0(2) = 1 \\ (T\mathbf{g}_0)(2) = g_0(0) = 1 \end{cases}, & \begin{cases} (\mathbf{g}_0)(0) = g_0(0) = 1 \\ (\mathbf{g}_0)(1) = g_0(1) = 1 \\ (\mathbf{g}_0)(2) = g_0(2) = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} (T\mathbf{g}_1)(0) = g_1(1) = \omega \\ (T\mathbf{g}_1)(1) = g_1(2) = \omega^2 \\ (T\mathbf{g}_1)(2) = g_1(0) = 1 \end{cases}, & \begin{cases} (\omega\mathbf{g}_1)(0) = \omega \cdot g_1(0) = \omega \\ (\omega\mathbf{g}_1)(1) = \omega \cdot g_1(1) = \omega^2 \\ (\omega\mathbf{g}_1)(2) = \omega \cdot g_1(2) = \omega^3 = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} (T\mathbf{g}_2)(0) = g_2(1) = \omega^2 \\ (T\mathbf{g}_2)(1) = g_2(2) = \omega^4 \\ (T\mathbf{g}_2)(2) = g_2(0) = 1 \end{cases}, & \begin{cases} (\omega^2\mathbf{g}_2)(0) = \omega^2 \cdot g_2(0) = \omega^2 \\ (\omega^2\mathbf{g}_2)(1) = \omega^2 \cdot g_2(1) = \omega^4 \\ (\omega^2\mathbf{g}_2)(2) = \omega^2 \cdot g_2(2) = \omega^6 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, 見かけは異なっても, 数の対応のさせ方が等しいことが分かりますから,

$$\begin{cases} T\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0 \\ T\mathbf{g}_1 = \omega\mathbf{g}_1 \\ T\mathbf{g}_2 = \omega^2\mathbf{g}_2 \end{cases} \quad (25)$$

となることが分かります.

(6) (3) と同様に, 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ に関する線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列 $\tilde{T}$ を求めるためには,

- (イ) 基底の元の行き先 $T\mathbf{g}_0, T\mathbf{g}_1, T\mathbf{g}_2 \in V$ の「番地」を求める.
($\Rightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\tilde{T}$ になる.)
- (ロ) 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ を用いた「番地割り」 $V \cong \mathbb{C}^3$ のもとで,

$$V \ni \mathbf{f} = b_0\mathbf{g}_0 + b_1\mathbf{g}_1 + b_2\mathbf{g}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているときに, $T\mathbf{f} \in V$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.

($\Rightarrow$ このとき,

$$V \ni T\mathbf{f} \longleftrightarrow \tilde{T} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法を考えることができます. 表現行列 $\check{T}$ を求めるためには, どちらの方法を用いても構わないわけですが, (3) と同様に, 皆さんの参考のために, 以下では, それぞれの方法を用いて表現行列 $\check{T}$ を求めると, どのようなことになるのかということを見てもいいことにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. いま, (25) 式から,

$$\begin{aligned} T\mathbf{g}_0 &= \mathbf{g}_0 \\ &= 1\mathbf{g}_0 + 0\mathbf{g}_1 + 0\mathbf{g}_2 \\ T\mathbf{g}_1 &= \omega\mathbf{g}_1 \\ &= 0\mathbf{g}_0 + \omega\mathbf{g}_1 + 0\mathbf{g}_2 \\ T\mathbf{g}_2 &= \omega^2\mathbf{g}_2 \\ &= 0\mathbf{g}_0 + 0\mathbf{g}_1 + \omega^2\mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ を用いた「番地割り」のもとで, $T\mathbf{g}_0, T\mathbf{g}_1, T\mathbf{g}_2 \in V$ に対応する「番地」は, それぞれ,

$$\begin{aligned} V \ni T\mathbf{g}_0 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni T\mathbf{g}_1 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \\ V \ni T\mathbf{g}_2 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \end{aligned}$$

という式で与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\check{T}$ は,

$$\check{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$V \ni \mathbf{f} = b_0\mathbf{g}_0 + b_1\mathbf{g}_1 + b_2\mathbf{g}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているとします. すると, (25) 式から,

$$T\mathbf{f} = T(b_0\mathbf{g}_0 + b_1\mathbf{g}_1 + b_2\mathbf{g}_2)$$

$$\begin{aligned}
&= b_0 T \mathbf{g}_0 + b_1 T \mathbf{g}_1 + b_2 T \mathbf{g}_2 && (T \text{ は線型写像より}) \\
&= b_0 \mathbf{g}_0 + b_1 (\omega \mathbf{g}_1) + b_2 (\omega^2 \mathbf{g}_2) && ((25) \text{ 式から}) \\
&= b_0 \mathbf{g}_0 + (\omega b_1) \mathbf{g}_1 + (\omega^2 b_2) \mathbf{g}_2
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $T\mathbf{f} \in V$ に対応する「番地」は,

$$V \ni T\mathbf{f} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ \omega b_1 \\ \omega^2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

となることが分かりますから, 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\check{T}$ は,

$$\check{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.⁵

2 問1を見直すと

さて, 第7回の問1のところでは, 「特定の座標軸」を持たない線型空間の代表例が, 集合 S 上の「関数の空間」であることを見ました. また, $S = \mathbb{R}$ のときには,

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は何回でも微分できる関数}\}$$

として,

$$D = \frac{d}{dx} : V \rightarrow V$$

という「微分する」という操作が V 上の線型写像の代表例であることを見ました. さらに, $S = \mathbb{N}$ のときには,

$$V_{\mathbb{N}} = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\dots} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

として,

$$T(\mathbf{a}) = \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\dots}$$

という式によって定まる「数列の番号をひとつずらす」という操作が $V_{\mathbb{N}}$ 上の線型写像の代表例であることを見ました. そこで, 今回は, 三点からなる集合 $S = \{0, 1, 2\}$ に対して, S 上の複素数値関数全体の集合

$$V = \{f : S \rightarrow \mathbb{C}\}$$

を考えて, V 上の線型写像の代表例として, $\mathbf{f} \in V$ に対して,

$$(Tf)(x) = f(x+1), \quad (x \in S)$$

⁵もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{T}$ と同じものです.

という式によって定まる関数 $Tf \in V$ を対応させる写像

$$T: V \rightarrow V$$

を取り上げてみました. こうした具体例を通して, 皆さんに「関数の空間」上の線型写像の典型例について理解を深めてもらうということと, 「行列の標準形の問題」に対する具体的なイメージを持ってもらうということを考えて, 問 1 を出題してみました.

そこで, ここでは, 問 1 の例をもとにして, 「関数の空間」が線型空間になることや, そうした「関数の空間」上の線型写像の典型例について考えてみることにします. 第 7 回の問 1 のところで見たように, 一般に, 集合 S 上の (複素数値) 関数全体の集合を,

$$V_S = \{f: S \rightarrow \mathbb{C}\}$$

と表わすとき, $f, g \in V_S, a \in \mathbb{C}$ として,

集合 S 上の「関数の空間」 V_S 上の「足し算」と「スカラー倍」の定義

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (af)(x) = a \cdot f(x) \end{cases}, \quad x \in S \quad (26)$$

という式によって, $f+g, af \in V_S$ を定めると, これらの「足し算」と「スカラー倍」により, 「関数の空間」 V_S は線型空間になることが分かります.⁶ (26) 式の意味については, すでに第 7 回の問 1 のところで説明しましたが, 問 1 の例を少し変形して, ここでもう一度, これらの定義の「気持ち」を説明してみることになります.

皆さんの中にも, $S = \{0, 1, 2\}$ では「味気ない」と思われる方がいるかもしれませんが, 「0, 1, 2」は止めにし, それぞれ, 「太郎, 次郎, 花子」と呼ぶことにします. 本当は, もっと現代っぽい名前の方が良いかも知れませんが, 皆さんの中に該当者がいると, 自分の名前だけに気を取られて, 数学的な内容の理解がおろそかになってもいけませんから, このままにしておくことにします.

さて, V の元である「 $S = \{\text{太郎, 次郎, 花子}\}$ 上の関数」とは, 太郎, 次郎, 花子のそれぞれの人に数をひとつずつ対応させる対応のことでした. 成績をつけるというのは, 学生の皆さんにとっても, 我々教官にとっても, お互いに余り気持ちの良いことではありませんが, 「感じ」を分かってもらうために, 成績をつけるという例をもとにして説明してみることになります. 現実的には, 「太郎の点数は $(2 + \sqrt{-3})$ 点である」とか, 「花子の点は $\frac{\pi^2}{6}$ 点である」とかいうように, 複素数や無理数を用いて点数をつけたりはしないわけですが, ここでは, 仮想的に, S 上の関数とは「三人に点数をつけること」であると思ってしまうことにします.

そこで, 例えば, 数学の点数をつけるということを考えてみると, V の元がひとつ定まると考えることができますが, これを, 仮に,

$$\mathbf{m} \in V$$

⁶第 7 回の問 1 のところでは, 実数値関数を考えましたが, 問 1 の (4), (5), (6) で見たように, 線型写像 T の表現行列を「見やすい形」の行列にするためには, 複素数の世界に考察を拡張して考える必要があります. そこで, 今回は, 最初から複素数値関数を考えることにしました.

というように表わすことにします.⁷ また、英語の点数をつけることを考えてみると、 V の元がもうひとつ定まると考えることができますから、これを、仮に、

$$e \in V$$

というように表わすことにします.⁸ すると、このとき、数学と英語の二科目を総合した点数を考えることもできます。もちろん、これも、 V の元をひとつ定めていると考えることができますが、意味を考えると、この元を

$$m + e \in V$$

というように表わしてみたくになります。それが、(26) 式に現われている「関数の空間」 V 上の $f + g \in V$ という「足し算」の定義の意味していることです。

さて、総合的な点数をつけるときに、ただ単純にそれぞれの科目の点数を足すのではなく、科目に応じて「重みをつけて」総合点をつけたいと思うことがしばしばあります。例えば、数学のできる人を高く評価したいとすれば、総合点として $10m + e$ という点数を考える人がいるかもしれません。このことを、数学的に表現すれば、「それぞれの科目の点数を与える関数 m, e の線型結合を考えている」ということになります。

このように考えると、集合上の「関数の空間」に線型空間の構造が入っているということは、皆さんにとって馴染みのある行為を振り返ってみると、自然に理解できることになります。ただし、ここで注意しないといけないことは、上では、 m や e という関数に、それぞれ、「数学の点数」、「英語の点数」などと別々な意味をつけて考えましたが、

$$\begin{cases} m(\text{太郎}) = e(\text{太郎}) \\ m(\text{次郎}) = e(\text{次郎}) \\ m(\text{花子}) = e(\text{花子}) \end{cases}$$

であるときには、我々が付加する意味は違いますが、「それぞれの人に点数を対応させるさせ方」は全く同じなので、 V の元としては、

$$m = e$$

と考えるということです。すなわち、数学では、「見かけがどんなに違っても、対応のさせ方が同じもの」は「同じ写像」、あるいは、「同じ関数」であると考えということです。

さて、問1の(2)では、それぞれの関数 $f \in V$ に対して、数の対応のさせ方を「ひねって」、

$$Tf \in V$$

という関数を考えました。その上で、 $f \in V$ に対して、 $Tf \in V$ を対応させる写像

$$T: V \rightarrow V$$

を考えて、 T が線型写像になることを確かめてみました。こうした写像が「関数の空間」の間の線型写像の典型的な例なのですが、皆さんの中には、問1の(2)の解答で挙げた議論を抽象的に感じられ、意味が良く分からないと思われた方がいるかもしれません。

⁷ 「 m 」は mathematics のつもりです。

⁸ 「 e 」は English のつもりです。

そこで、次に、上で挙げた「太郎、次郎、花子に成績をつける」という解釈のもとで、問 1 の (2) の結果の意味するところが何であるのかということを考えてみることにします。いま、数学の点数を与える関数 $\mathbf{m} \in V$ を考えてみると、定義によって、 $T\mathbf{m} \in V$ という関数は、

$$\begin{cases} (T\mathbf{m})(\text{太郎}) = \mathbf{m}(\text{次郎}) \\ (T\mathbf{m})(\text{次郎}) = \mathbf{m}(\text{花子}) \\ (T\mathbf{m})(\text{花子}) = \mathbf{m}(\text{太郎}) \end{cases}$$

という関数になりますから、これは、点数を名簿に書き写すときに、一段ずつ間違えてしまったために、次郎の点数が太郎につき、花子の点数が次郎につき、太郎の点数が花子についてしまったという状況を表わしていると解釈できます。⁹

いま、さらに、英語の点数を与える関数 $\mathbf{e} \in V$ を考えて、二科目の総合点を、「重み」を付けて、 $10\mathbf{m} + \mathbf{e}$ で与えることにします。このとき、写像

$$T : V \rightarrow V$$

が線型写像であるということは、例えば、

$$T(10\mathbf{m} + \mathbf{e}) = 10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e} \quad (27)$$

という式が成り立つということを意味しています。ここで、(27) 式の左辺に現われる $T(10\mathbf{m} + \mathbf{e})$ という関数は、 T の定義によって、

$$\begin{cases} T(10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{太郎}) = (10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{次郎}) \\ T(10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{次郎}) = (10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{花子}) \\ T(10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{花子}) = (10\mathbf{m} + \mathbf{e})(\text{太郎}) \end{cases}$$

という関数であるということになりますから、これは「総合点が写し間違えられる」という状況を表わしていると解釈することができます。一方、(27) 式の右辺に現われる $10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e}$ という関数は、

$$\begin{aligned} (10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e})(\text{太郎}) &= 10 \cdot (T\mathbf{m})(\text{太郎}) + (T\mathbf{e})(\text{太郎}) \quad (10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e} \text{ の定義から}) \\ &= 10\mathbf{m}(\text{次郎}) + \mathbf{e}(\text{次郎}) \quad (T \text{ の定義から}) \\ (10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e})(\text{次郎}) &= 10 \cdot (T\mathbf{m})(\text{次郎}) + (T\mathbf{e})(\text{次郎}) \\ &= 10\mathbf{m}(\text{花子}) + \mathbf{e}(\text{花子}) \\ (10 \cdot T\mathbf{m} + T\mathbf{e})(\text{花子}) &= 10 \cdot (T\mathbf{m})(\text{花子}) + (T\mathbf{e})(\text{花子}) \\ &= 10\mathbf{m}(\text{太郎}) + \mathbf{e}(\text{太郎}) \end{aligned}$$

という関数であるということになりますから、これは「同じ人間違いのもとで写し間違えられた数学と英語の点数をもとに、総合点をつけた」という状況を表わしていると解釈することができます。すると、(27) 式とは「次郎の数学と英語の点数が、太郎の数学と英語

⁹現実的には、このように、名前を一巡するような形で点数を付け間違えることは、ほとんど起こり得ませんが、あまり細かいことにはこだわらないことにします。

の点数として間違っ書き込まれたとすれば、次郎の総合点が、太郎の総合点として間違っ書き込まれることになるだろう…」などのことを意味していることが分かります。

このように考えてみると、問1の(2)で考えた $T: V \rightarrow V$ という写像が線型写像であるということが、皆さんにも、実感として分かってもらえるかもしれません。このように、一見、抽象的に見える数学の命題も、具体的な例をもとにして考えてみると「しみじみと理解できる」ことは多いので、皆さんも、すぐに抽象的だと言って嫌わずに、この式は何を意味しているのだろうか、あれこれ想像をたくましくして、「**数学の気持ち**」を理解してもらえると良いのではないかと思います。

さて、上のように考えてみると、 $T: V \rightarrow V$ という写像が線型写像であるというためには、何も、太郎を次郎に、次郎を花子に、花子を太郎に間違えたということが本質的なことなのではなくて、**同じ人間違いのもとで、すべての成績をつけた**ということが本質的なことであることが分かります。このことを、数学的に表現すると、次のようになります。いま、 S から S への写像を、何でもよいからひとつ取ってきて、仮に、

$$\text{er}: S \rightarrow S$$

というように表わすことにします。¹⁰ これは、例えば、「太郎を $\text{er}(\text{太郎})$ に間違える」という具合に、間違える相手に対応させる写像であると考えているわけです。例えば、問1の(2)の例では、

$$\begin{cases} \text{er}(\text{太郎}) = \text{次郎} \\ \text{er}(\text{次郎}) = \text{花子} \\ \text{er}(\text{花子}) = \text{太郎} \end{cases}$$

というように人間違いをしたのでした。

この例では、 er という写像は、三人の人間をピッタリ一対一に対応させているわけですが、一般には、必ずしも三人の人間をピッタリ一対一に対応させている必要はなくて、 er は、

$$\text{er}: S \rightarrow S$$

という写像でありさえすれば、何でも構わないわけです。何しろ、すべての人を太郎と間違えるなどという、大まぬけなこともあり得るわけですから。このとき、「同じ人間違いのもとで、すべての成績をつける」ということは、 $\mathbf{f} \in V$ に対して、 $\text{Er } \mathbf{f} \in V$ を、

$$(\text{Er } \mathbf{f})(x) = \mathbf{f}(\text{er}(x)), \quad x \in S = \{\text{太郎}, \text{次郎}, \text{花子}\}$$

というように定めることであると解釈することができます。すると、上で行なった考察から、 $\mathbf{f} \in V$ に対して、 $\text{Er } \mathbf{f} \in V$ を対応させる写像

$$\text{Er}: V \rightarrow V$$

は、やはり線型写像になるだろうということが、皆さんにも実感できるのではないかと思います。¹¹

¹⁰ 「er」は error のつもりです。

¹¹ 興味のある方は、問1の(2)と同様にして、実際に、 $\text{Er}: V \rightarrow V$ が線型写像であることを確かめてみて下さい。

さて、前と同様に、勝手な集合 S に対して、 S 上の複素数値関数全体の集合を、

$$V_S = \{ f : S \rightarrow \mathbb{C} \}$$

というように表わすことにします。そこで、いま、上で考えた $\text{er} : S \rightarrow S$ という写像の代わりに、 S と T という二つの集合に対して、

$$\text{er} : S \rightarrow T$$

という写像を取ってくるとどうなるかということを考えてみます。¹² すると、この場合には、

$$\text{Er} : V_T \rightarrow V_S$$

という写像が得られることになり、¹³ Er という写像がやはり線型写像になることが分かります。このことを、数学で慣用的に用いられている言葉や記号を用いて言い表わすと、次のようになります。

いま、

$$\varphi : S \rightarrow T$$

という写像を、勝手にひとつ取ってきたとします。このとき、 T 上の関数

$$f : T \rightarrow \mathbb{C}$$

に対して、

関数 f の (写像 φ による) 引き戻し $\varphi^* f$ の定義式

$$(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x)), \quad x \in S$$

という式によって定まる S 上の関数

関数 f の (写像 φ による) 引き戻し

$$\varphi^* f = f \circ \varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$$

を関数 f の (写像 φ による) 引き戻しと言います。¹⁴ また、それぞれの関数 $f \in V_T$ に対して、その引き戻し $\varphi^* f \in V_S$ を対応させることで定まる写像

(写像 φ による) 引き戻し写像

$$\varphi^* : V_T \rightarrow V_S$$

を (写像 φ による) 引き戻し写像と言います。すると、上の議論から、引き戻し写像

$$\varphi^* : V_T \rightarrow V_S$$

¹²すなわち、今度は、「隣のクラスの人と間違える」というような状況を考えるわけですが。

¹³ T と S の順番に注意して下さい。

¹⁴一般に、ふたつの集合 S, T の間に写像 $\varphi : S \rightarrow T$ が与えられているときに、写像 φ を用いて、集合 T 上にある数学的構造 (=いまの場合、 T 上の関数のことです。) を集合 S 上にある数学的構造に移し変えることを「(写像 φ による) 引き戻し」と呼びます。

は, $\varphi: S \rightarrow T$ がどんな写像であっても, 常に線型写像になるということが分かります.
 以上の議論から,

「集合」や「その間の写像」には「線型空間」や「その間の線型写像」が付随する

$$\begin{array}{ll} \text{集合: } S & \longrightarrow \text{線型空間: } V_S \\ \text{写像: } \varphi: S \rightarrow T & \longrightarrow \text{線型写像: } \varphi^*: V_T \rightarrow V_S \end{array}$$

というように, 「集合」や「その間の写像」には「線型空間」や「線型写像」が付随していることが分かります. 例えば, $S = \mathbb{N}$ として,

$$\varphi(n) = n + 1, \quad (n \in \mathbb{N})$$

という式で定まる「自然数をひとつずらす」写像

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

を考えると, 第7回の問1のところで考えた

$$T(\mathbf{a}) = \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\dots}$$

という式で定まる「数列の番号をひとつずらす」写像

$$T: V_{\mathbb{N}} \rightarrow V_{\mathbb{N}}$$

は,

$$\varphi^* = T$$

というように, 写像 φ の引き戻し写像であると考えられます. また, $S = \mathbb{R}$ として,

$$\varphi(x) = x + c, \quad (x \in \mathbb{R})$$

という式で定まる「実数を c だけ平行移動する」写像

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

を考えると, 第8回の問1で考えた

$$(T_c f)(x) = f(x + c)$$

という式で定まる「変数を $x \rightsquigarrow x + c$ と置き換える」写像

$$T_c: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$$

も,

$$\varphi^* = T_c$$

というように, 写像 φ の引き戻し写像であると考えられます. こうした「引き戻し写像」が「関数の空間」の間の線型写像の典型的な例と言えます.

3 行列の対角化の問題について

さて、第8回の問1のところでは、一般に、 V を ($\mathbb{C}$ 上の) 線型空間として、

$$\dim_{\mathbb{C}} V = n$$

とするとき、 V の異なる基底は n 行 n 列の正則行列と同じだけ存在することを見ました。¹⁵ また、 V, W を ($\mathbb{C}$ 上の) 線型空間として、

$$\dim_{\mathbb{C}} V = n, \quad \dim_{\mathbb{C}} W = m$$

とするとき、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P, \quad P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \cdots & \mathbf{f}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_m \end{pmatrix} Q, \quad Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$$

という式により、 V や W の基底を、

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} &\rightsquigarrow \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\} \\ \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\} &\rightsquigarrow \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \dots, \mathbf{f}'_m\} \end{aligned}$$

というように取り替えると、線型写像 $f: V \rightarrow W$ の表現行列は、

表現行列の変換公式

$$A \rightsquigarrow A' = Q^{-1}AP$$

というように姿を変えることを見ました。このことは、**正則行列** $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ を用いて、

$$A' = Q^{-1}AP$$

という関係にあるような m 行 n 列の行列 A と A' は「本質的に同じ行列」であるということを意味しています。すなわち、これらの行列は、いずれも、 $f: V \rightarrow W$ という「同じ線型写像」を表わしており、行列としての姿が違って見えるのは、単に「異なる視点」から眺めているからに過ぎないのだと考えることができます。

そこで、行列 A が、勝手にひとつ与えられているとして、「最初に与えられた姿」 A には惑わされずに、 $A' = Q^{-1}AP$ が「見やすい形」になるような視点から眺めることにより、もともとの行列 A の性質もより良く理解できるのではないかと考えて、

行列の標準形の問題

与えられた行列 A に対して、

$$Q^{-1}AP = \Lambda$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P, Q を見つけよ。

という「**行列の標準形の問題**」を定式化しました。このとき、「行列の標準形の問題」は、考察している状況に応じて、

¹⁵第8回の問1のところでは、 V が $\mathbb{R}$ 上の線型空間の場合に説明しましたが、 V が $\mathbb{C}$ 上の線型空間の場合にも、全く同様の議論ができることが分かります。

「行列の標準形の問題」の二通りの解釈

- (i) P と Q が独立に取れる場合.
- (ii) $P = Q$ と取らなければいけない場合.

というように二通りに解釈することができますが, (i) の場合には, 「行列の rank の計算」を見直すことにより,

行列の標準形 ($P = Q$ と取らなくてよい場合)

与えられた行列 A に対して,

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P, Q が存在する.

という形で「行列の標準形の問題」が解決することを見ました.

そこで, ここでは, (ii) の場合で, かつ, 「見やすい形」として「対角行列」が取れる場合について考えてみることにします. すると, この場合, 「行列の標準形の問題」は,

行列の対角化の問題

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{28}$$

となるような対角行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

ということになりますが, これを「行列の対角化の問題」と呼びます. 第 8 回の問 1 のところで注意したように, (i) の場合と同様に, 基本変形を用いてこの問題の解決を図ろうとすると, E を基本行列として,

$$A \rightsquigarrow E^{-1}AE$$

という変形を「ひとつの変形」と考えて基本変形を施す必要がありますが, こうした「変更された規則」のもとで, 与えられた正方行列を対角行列に変形することは, 一般には, とても困難であることが分かります.¹⁶

そこで, 「行列の対角化の問題」を解決するためには, 「別な工夫」が必要になりますが, このときのアイデアは, (28) 式の両辺に左から P を掛け算して,

$$P^{-1}AP = \Lambda \implies AP = P\Lambda \tag{29}$$

という形に書き直して考えるということと, (29) 式が「行列 P の列ベクトルに対して何を意味しているのか」ということを考えるということです. 一般のサイズの正方行列の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では, A が 3 行 3 列の行列である場合に説明することにします.

¹⁶その最大の困難は, このままでは, 目標とする対角行列の対角成分として, どのような数が並ぶべきなのかという点について全く見当が付かないという点にあると思われます.

いま, 対角行列 Λ を,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と表わし, 行列 P の列ベクトルを,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

と表わすことにします. すると, (28) 式は,

「行列の対角化も問題」を解決するためのアイデア ((28) 式の書き直し)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \Lambda \implies AP = P\Lambda \\ \iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{p}_1 & \lambda_2\mathbf{p}_2 & \lambda_3\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \lambda_3\mathbf{p}_3 \end{cases} & \quad (30) \end{aligned}$$

というように書き直せることが分かります. したがって, (30) 式から, 「行列の対角化の問題」を解決するためには, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ として,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (31)$$

という形の連立一次方程式を考察すると良さそうなことが分かります. 第6回の問1のところでも触れましたが, (31) 式の連立一次方程式を考えるということは, 行列 A の「固有値」や「固有ベクトル」を考えるということに当たります. そこで, これらの概念について, もう一度, 復習してみることになります.

一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ として,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (32)$$

という連立一次方程式を考えてみます.¹⁷ このとき, (32) 式の連立一次方程式が, 自明でない解, すなわち, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つときに, 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を行列 A の**固有値**と呼びます. また, 固有値 λ に対して, (32) 式を満たすようなベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ を行列 A の**(固有値 λ に対する) 固有ベクトル**と呼び, (固有値 λ に対する) 固有ベクトル全体の集合

¹⁷もちろん, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ という設定でも, 同様の考察をすることができます. どちらの設定で考察するのかということは, 行列 A の**固有値 λ として複素数が登場するかどうか**ということにかかわっています. すなわち, 一般には, 行列 A が**実数行列**だとしても, 行列 A の**固有値 λ は複素数になりえます**から, このような場合に, (32) 式の連立一次方程式の $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を考えるためには, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ というように, 複素数の世界に設定を拡張して考える必要がでてくるわけです.

—— 行列 A の (固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間 ——

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

を行列 A の (固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間と呼びます。固有値を定義するところでは、(32) 式が $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つという条件を付けましたが、固有値 λ に対して、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ も固有ベクトルであると考えることに注意して下さい。

以上の定義は、次のように言い表わすこともできます。いま、勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $\mathbb{C}^n$ の部分集合 $V(\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ を、

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

という式によって定めると、第5回の問2と同様に、 $V(\lambda)$ は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間になることが分かります。¹⁸ そこで、線型部分空間 $V(\lambda)$ が自明でないとき、すなわち、

—— 複素数 λ が行列 A の固有値であるための条件 ——

$$V(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$$

となるときに、複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を行列 A の固有値と呼び、固有値 λ に対して、 $V(\lambda)$ の元を (固有値 λ に対する) 固有ベクトルと呼ぶと言うことができます。第6回の問1のところで見たように、(32) 式は、

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (33)$$

というように書き換えることができるので、線型部分空間 $V(\lambda)$ は、行列の核 (kernel) という概念を用いて、

$$V(\lambda) = \text{Ker}(\lambda I - A)$$

というように表わすこともできます。したがって、複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値であるための条件は、

—— $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値であるための条件 (言い換え) ——

$$\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{0}\} \quad (34)$$

というように表わすこともできます。

第6回の問1のところで見たように、実際に、行列 A の固有値を求めるには、次のように考えればよいことが分かります。いま、(32) 式の連立一次方程式を (33) 式のように書き直してみます。ここで、もし、 $(\lambda I - A)$ という行列に逆行列が存在すると仮定すると、(33) 式の両辺に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛け算することで、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\lambda I - A)^{-1} \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かります。よって、(33) 式の解は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ しか存在しないことが分かりますから、 $\lambda \in \mathbb{C}$ は行列 A の固有値ではないことが分かります。すなわち、

$$(\lambda I - A) \text{ が正則行列である} \implies \lambda \in \mathbb{C} \text{ は行列 } A \text{ の固有値ではない。} \quad (35)$$

¹⁸ 皆さん、確かめてみて下さい。

となることが分かります. したがって, (35) 式の主張の対偶を考えると,

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ が行列 } A \text{ の固有値である.} \implies (\lambda I - A) \text{ は正則行列でない.} \quad (36)$$

となることが分かります.

逆に, 行列 $(\lambda I - A)$ が正則行列でないとすると, $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値となることが, 次のようにして分かります. いま, 複素数を成分に持つ n 行 n 列の正方行列全体の集合を,

$$M_n(\mathbb{C}) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

と表わし, $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像全体の集合を,

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = \{ f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ は線型写像} \}$$

と表わすことにします. このとき, 第6回の問3のところで見たように,

サイズが n の正方行列と $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像の対応

$$M_n(\mathbb{C}) \ni A \longleftrightarrow f_A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$$

というように, $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, 行列 A を掛け算する写像

$$f_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

を対応させることで,

サイズが n の正方行列全体の集合と $\mathbb{C}^n$ 上の線型写像全体の集合の対応

$$M_n(\mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \quad (37)$$

と同一視できることが分かります. また, (37) 式の同一視のもとで,

「行列の世界」と「線型写像の世界」の間の対応 (正方行列の場合)

行列の世界		線型写像の世界
$M_n(\mathbb{C})$	$\cong$	$\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$
A	$\longleftrightarrow$	f_A
B	$\longleftrightarrow$	f_B
行列の積 : AB	$\longleftrightarrow$	合成写像 : $f_A \circ f_B$
単位行列 : I	$\longleftrightarrow$	恒等写像 : $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$

というように対応していることも分かります. したがって,

$$AB = BA = I \longleftrightarrow f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$$

と対応するということと, **線型写像の逆写像は線型写像になる**ということに注意すると,¹⁹

¹⁹皆さん, 確かめてみて下さい.

—— 行列の正則性と線型写像の全単射性の間の対応 ——

行列 A が正則行列である. $\iff$ 線型写像 $f_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ が全単射である. (38)

となることが分かります.

そこで, いま, 行列 $(\lambda I - A)$ が正則行列でないと仮定してみます. このとき, (38) 式から, 行列 $(\lambda I - A)$ を掛け算する写像

$$f_{\lambda I - A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

は全単射ではないことが分かります. すると, 第8回の問3のところで見たように, 一般に,

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$$

となる線型空間 V, W の間の線型写像 $f : V \rightarrow W$ に対しては,

—— $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$ のときの特殊事情 ——

$f : V \rightarrow W$ が単射となる. $\iff f : V \rightarrow W$ が全射となる.
 $\iff f : V \rightarrow W$ が全単射となる.

となることが分かりますから, $f_{\lambda I - A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は全射でも単射でもないことが分かります. さらに, 線型写像 $f : V \rightarrow W$ が単射となるための条件は, 線型写像 f の核 $\text{Ker } f$ を用いて,

—— 線型写像 $f : V \rightarrow W$ が単射となるための条件 ——

$f : V \rightarrow W$ が単射となる. $\iff \text{Ker } f = \{0\}$

というように表わせることに注意すると, $f_{\lambda I - A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ が単射でないことから,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\lambda I - A) &= \text{Ker } f_{\lambda I - A} \\ &\neq \{0\} \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (34) 式から, $\lambda \in \mathbb{C}$ は行列 A の固有値となることが分かります. すなわち,

$(\lambda I - A)$ は正則行列でない. $\implies \lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値である. (39)

となることが分かりました. したがって, (36) 式, (39) 式から,

—— $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値であるための条件 ——

$\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値である. $\iff (\lambda I - A)$ は正則行列でない.
 $\iff \det(\lambda I - A) = 0$ (40)

となることが分かります.

第6回の問1や第7回の問1のところで見たように, 一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, t を変数として,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(t) = \det(tI - A) \quad (41)$$

という式で定まる n 次の多項式 $\varphi_A(t)$ を行列 A の**特性多項式**と呼びます. 特性多項式という概念を用いると, (40) 式から,

行列 A の固有値の特徴づけ

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ が行列 } A \text{ の固有値である. } \iff \varphi_A(\lambda) = 0$$

となることが分かります. すなわち, **行列 A の固有値は「特性多項式 $\varphi_A(t)$ の零点」として特徴づけられる**ことが分かります. よって, 与えられた正方行列 A の固有値を求めるためには,

行列 A の固有値を求める方法

- (i) 行列式を計算して, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を求める.
- (ii) $\varphi_A(t) = 0$ という方程式を解いて, 行列 A の固有値を求める.

というような計算をすれば良いことが分かります. こうして, 行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ が求まってしまえば, $\lambda \in \mathbb{C}$ は**既知の数となります**から, 後は, それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解くことにより, 対応する固有ベクトルがすべて求まることになります.

そこで, 再び, 「行列の対角化の問題」に戻ることになります. 上で見たように, 「**行列の対角化の問題**」を**解決するためのアイデア**は,

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad (42)$$

という式を,

$$AP = P\Lambda \quad (43)$$

という形に変形して考えるということと, (43) 式が「**行列 P の列ベクトルに対して何を意味しているのか**」ということを考えるということにあります. すなわち,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

として, (42) 式を,

「行列の対角化も問題」を解決するためのアイデア ((42) 式の書き直し)

$$P^{-1}AP = \Lambda \implies AP = P\Lambda \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n \end{cases} & \quad (45) \end{aligned}$$

このように書き直して考えてみるということにあります。すると、(45) 式は、**行列 P の列ベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) が、それぞれ、行列 A の固有ベクトルである**と解釈することができますから、²⁰「行列の対角化の問題」を解決するために、

「行列の対角化の問題」を解決する戦略

- (i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して、 $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める。 ($\implies$ 行列 A の固有値が求まる。)

- (ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて、

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

を求める。 ($\implies$ 行列 A の固有ベクトルが求まる。)

- (iii) $V(\lambda)$ たちの中から、適当にベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) を取り出して、正則行列 P を作る。

という戦略を立てることができることが分かります。

例えば、問 1 の例では、問 1 の解答で見たように、 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底を用いて、線型空間 V に「番地割り」して考えると、線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列 $\hat{T}$ は、

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

²⁰ ここで、勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ となることが分かりますから、(43) 式の解を求めるだけであれば、 $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ のときには、 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ は勝手な複素数で構わないことが分かります。一方、(42) 式の解を求めるためには、 P は正則行列でなければなりませんから、少なくとも行列 P の列ベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) は $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}$ でなければならないことが分かります。したがって、この場合、 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ は行列 A の固有値になることが分かります。

となることが分かります.²¹ そこで, $A = \hat{T}$ として, 上の戦略を実行してみることにします. すると, 第 6 回の問 1 の解答で見たように, 行列 $A = \hat{T}$ の特性多項式 $\varphi_A(t)$ は,

$$\varphi_A(t) = t^3 - 1$$

となることが分かりますから, 行列 A の固有値 λ は,

$$\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

として,

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2$$

となることが分かります.²² また, それぞれの固有値に対応する固有ベクトル空間を求めると,

$$\begin{aligned} V(1) &= \left\{ \mathbf{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C} \right\} \\ V(\omega) &= \left\{ \mathbf{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C} \right\} \\ V(\omega^2) &= \left\{ \mathbf{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります. そこで, 例えば,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と選んで,

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

としてみると, 問 1 の (4) の解答の中で見たように,

$$\det P = (\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega) \neq 0$$

²¹実は, $\hat{T}$ は, 第 6 回の問 1 で取り上げた行列 A と同じ行列です.

²²この例のように, 一般には, 行列 A が実数行列であっても, 行列 A の固有値は複素数になりえます.

となることが分かります. よって, P は正則行列であり, 正則行列 P を用いて, 行列 A は,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

というように対角化されることが分かります. こうして, 今の場合, 「行列の対角化の問題」が解決できることが分かります.

いま, (47) 式は, (46) 式で与えられる正則行列 P を用いて, V の基底を $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ から,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} P \quad (48)$$

という式によって定まる基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ に取り替えると, 線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列 $\tilde{T}$ が,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

というように「姿」を変えということを意味しています. ここで, (48) 式は, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」のもとで,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

という「番地」を持つ元を, それぞれ, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ と定めるということを意味していますが, 問 1 の (1) の解答の中で見たように, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」は,

$$V \ni \mathbf{f} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

という式で与えられますから, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ は,

$$\begin{cases} g_0(0) = 1 \\ g_0(1) = 1 \\ g_0(2) = 1 \end{cases}, \begin{cases} g_1(0) = 1 \\ g_1(1) = \omega \\ g_1(2) = \omega^2 \end{cases}, \begin{cases} g_2(0) = 1 \\ g_2(1) = \omega^2 \\ g_2(2) = \omega^4 \end{cases}$$

という関数であることが分かります.

このように, **固有値, 固有ベクトルを用いると, 表現行列が対角行列という「見やすい形」になるような「上手い基底」 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ を求めることができるわけですが**, たくさんの事柄が頭の中で交錯して, 皆さんの考察が進まなくなってもいけないと思い, 問 1 では, 最初から, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ を具体的に与えて, 基底 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ に関する線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列 $\tilde{T}$ が対角行列となることを確かめてもらうという形で出題することにしました.

4 問2の解答

(1) 与えられた行列の行列式を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 - x_2^2$$

となることが分かります.

(2) 与えられた行列の行列式を計算してみると, 例えば,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} &= x_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} - x_3 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列目で展開}) \\ &= x_1(x_1^2 - x_2x_3) - x_3(x_1x_2 - x_3^2) + x_2(x_2^2 - x_1x_3) \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

となることが分かります.

5 問2の結果を因数分解してみると

皆さんの中には, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$A_n = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

という形の n 行 n 列の行列の行列式 $\det A_n$ がどうなるのかということに興味を持たれた方がいるかもしれません. そこで, ここでは, この問題について考えてみることにします. ただし, いきなり, $\det A_n$ を求めるということは少し「しんどそう」に見えますから, まず, **$\det A_n$ の形に予想をつける**ことを考えてみることにします.

いま, 問2の結果から,

$$\begin{aligned} \det A_2 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \det A_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

となることが分かりますが, この式をじっと眺めていても, なかなか $\det A_n$ がどうなりそうかというパターンが見えてはきません. そこで, 試みに, **これらの式を因数分解して表わす**とどうなるのかということを実験してみることにします. すると, $\det A_2$ の方は,

———— $\det A_2$ を因数分解した結果 ————

$$\det A_2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \quad (49)$$

というように因数分解できることが分かります.

一方, $\det A_3$ の方は, 一見, 因数分解するのが難しそうに見えますが, 例えば, $\det A_3$ が x_1, x_2, x_3 に関して対称な形をしていることに注目して, 「 x_1, x_2, x_3 の対称式の中で一番簡単な $(x_1 + x_2 + x_3)$ で括れないかなあ」などと思って試してみると,

$$\begin{aligned}
\det A_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \\
&= \{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^2(x_2 + x_3) - x_2^2(x_1 + x_3) - x_3^2(x_1 + x_2)\} \\
&\quad - 3x_1x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1(x_1x_2 + x_1x_3) - x_2(x_2x_1 + x_2x_3) \\
&\quad - x_3(x_3x_1 + x_3x_2) - 3x_1x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \{x_1(x_1x_2 + x_3x_1) + x_1x_2x_3\} \\
&\quad - \{x_2(x_1x_2 + x_2x_3) + x_1x_2x_3\} - \{x_3(x_3x_1 + x_2x_3) + x_1x_2x_3\} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \{x_1^2 - (x_2 + x_3)x_1 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3\} \tag{50}
\end{aligned}$$

というように, 上手い具合に因数分解できることが分かります. あるいは, $\det A_3$ を,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 1 \\ 1 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times 1 \end{pmatrix} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_3 & x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ x_2 & x_3 - x_2 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-1) \\ 3 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-1) \end{pmatrix} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 行目で展開}) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) \{x_1^2 - (x_2 + x_3)x_1 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3\}
\end{aligned}$$

というように計算して, (50) 式を得ることもできます. そこで, (50) 式の第二因子を x_1 に関する二次式であると見なして, さらに因数分解を進めてみると,

$$\begin{aligned}
&x_1^2 - (x_2 + x_3)x_1 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 \\
&= \left\{ x_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}x_2 + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}x_3 \right\} \left\{ x_1 + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}x_2 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}x_3 \right\} \tag{51}
\end{aligned}$$

となることが分かります. ここで, (51) 式の右辺に現われた数を良く眺めてみると,

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = e^{4\pi i/3}$$

となっていることが分かりますから, 問 1 のときと同様に,

$$\begin{aligned} \omega &= e^{2\pi i/3} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

と書くことにすれば, $\det A_3$ は,

$\det A_3$ を因数分解した結果

$$\det A_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) \quad (52)$$

というように因数分解できることが分かりました.

そこで, (49) 式と (52) 式をじっと見比べてみると, 今度は, 少しパターンが見えてきそうな気がしてきます. 例えば, どうやら $\det A_n$ にも, 1 の n 乗根

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$$

が登場してきそうな「匂い」がします. 興味のある方は, 6 節へ進まれる前に, 自分で $\det A_n$ の形を予想してみてください.²³ また, $\det A_4$ を具体的に計算してみると, その予想が正しいことを確かめてみてください.

6 問 1 の結果と比べると

さて, 5 節では, $\det A_3$ を因数分解して表わすことを考えてみました. 皆さんの中には, $\det A_3$ が,

$\det A_3$ を因数分解した結果

$$\det A_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3) \quad (53)$$

という形に因数分解される姿を見て, これが, 問 1 で考えた $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ という関数を $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底を用いて表わした

$$\begin{cases} \mathbf{g}_0 = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_0 + \omega \mathbf{f}_1 + \omega^2 \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_0 + \omega^2 \mathbf{f}_1 + \omega^4 \mathbf{f}_2 \end{cases}$$

²³ ここで, $\omega = \omega^4$ であることに注意して, $\det A_3$ の因数分解を,

$$\det A_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3)$$

という形に書き直しておくと, $\det A_n$ の形の予想しやすくなるかもしれません.

という姿と似ていると思われた方がいるかもしれません。そこで、問 1 と問 2 という二つの問題の間の関係について考えてみることにします。

いま、 A_3 という行列の成分は x_1, x_2, x_3 に関する一次式であるということに注目して、行列 A_3 を x_1, x_2, x_3 という文字について整理してみると、

$$A_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

というように表わせることが分かります。ここで、(54) 式の右辺を良く見てみると、 x_2 の係数として現われている行列は、問 1 の (3) で求めた、

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

という行列に他ならないことが分かります。また、 $\hat{T}^2$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} \hat{T}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

となることが分かりますから、 x_3 の係数として現われている行列は $\hat{T}^2$ であることも分かります。よって、(54) 式、(55) 式、(56) 式から、行列 A_3 は、 $\hat{T}$ という行列を用いて、

行列 A_3 と行列 $\hat{T}$ の間の関係

$$A_3 = x_1 I + x_2 \hat{T} + x_3 \hat{T}^2 \quad (57)$$

というように表わせることが分かりました。

こうして、行列 A_3 を (57) 式のように表わしてみると、「行列 A_3 が (57) 式のように表わせる」ということと「 $\det A_3$ が (53) 式のように表わせる」ということが、何やら関係ありそうな気がしてきます。例えば、仮に、 $\hat{\Lambda}$ が、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

というような対角行列であるとしてみると、

$$\begin{aligned} &x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda_0 x_2 + (\lambda_0)^2 x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + \lambda_1 x_2 + (\lambda_1)^2 x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_2)^2 x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \det(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2) \\ = \{x_1 + \lambda_0 x_2 + (\lambda_0)^2 x_3\} \{x_1 + \lambda_1 x_2 + (\lambda_1)^2 x_3\} \{x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_2)^2 x_3\} \end{aligned} \quad (58)$$

となることが分かります. すなわち, $\det(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2)$ は (53) 式のように, 一次式の積の形に因数分解できることが分かります.

実際には, $\hat{T}$ は Λ のような対角行列ではありませんが, 3 節で見たように,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

として,

$$P^{-1} \hat{T} P = \Lambda \quad (60)$$

というように, 正則行列 P を用いて, 行列 $\hat{T}$ を「対角化」できることが分かります. そこで, (60) 式の両辺に, 左から P を掛け算し, 右から P^{-1} を掛け算することで,

$$\hat{T} = P \Lambda P^{-1} \quad (61)$$

と表わせることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \hat{T}^2 &= (P \Lambda P^{-1})(P \Lambda P^{-1}) \\ &= P \Lambda^2 P^{-1} \end{aligned} \quad (62)$$

となることが分かります. したがって, (57) 式, (61) 式, (62) 式から, 行列 A_3 は,

$$\begin{aligned} A_3 &= x_1 I + x_2 \hat{T} + x_3 \hat{T}^2 \\ &= x_1 I + x_2 (P \Lambda P^{-1}) + x_3 (P \Lambda^2 P^{-1}) \\ &= P(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2) P^{-1} \end{aligned} \quad (63)$$

というように表わせることが分かります. 第 5 回の問 1 のところで見たように, 一般に, n 行 n 列の正則行列 P と n 行 n 列の行列 A に対して,

行列式の持つ重要な性質

$$\det(P^{-1} A P) = \det A \quad (64)$$

となることが分かりますから, $A \rightsquigarrow x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2$, $P \rightsquigarrow P^{-1}$ と置き換えて, (64) 式を適用すると, (63) 式から,

$$\begin{aligned} \det A_3 &= \det(P(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2) P^{-1}) && ((63) \text{ 式から }) \\ &= \det(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2) && ((64) \text{ 式から }) \end{aligned} \quad (65)$$

となることが分かります. 一方, (58) 式, (59) 式から,

$$\det(x_1 I + x_2 \Lambda + x_3 \Lambda^2) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3) \quad (66)$$

となることが分かりますから, (65) 式, (66) 式から,

$$\det A_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3) \quad (67)$$

となることが分かります. こうして, $\det A_3$ が (67) 式のように「因数分解」できたのは, 行列 A_3 が,

$$\begin{aligned} P^{-1}A_3P &= x_1I + x_2\Lambda + x_3\Lambda^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように「対角化」されるからであり, (67) 式の因数分解に現われるそれぞれの「因子」は, A_3 という行列のそれぞれの「固有値」に対応していることが分かりました.

さて, 第6回の問1のところでは,

$$\hat{T}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ コ}}$$

という行列の固有値や固有ベクトルについても考察してみましたが, 興味のある方は, そのときの結果を用いて, 上と同様の考察を行なうことで, $\det A_n$ を求めてみてください. また, 5節の最後のところで $\det A_n$ の形を予想してみた方は, その予想が実際の $\det A_n$ の値と一致するかどうかということも確かめてみて下さい.

7 問3の解答

線型空間 $\mathbb{R}^n$ が線型部分空間 W_1, W_2 の直和に分解するということを示すためには,

$\mathbb{R}^n$ が W_1, W_2 の直和であるための条件

(イ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめれば良いということになります.

そこで、まず、(イ)という条件について考えてみることにします。いま、 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を、勝手にひとつ取ってきたとします。このとき、(イ)という条件が満たされることを示すためには、ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (68)$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ を見つけなければならないことになりますが、状況に「探りを入れて」みるために、まずは「もし、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ が (68) 式のように表わされたとしたら、 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ は、それぞれどのようなベクトルでなければならないのか」ということを考えてみることにします。

いま、 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ であるとする、 W_1, W_2 の定義から、

$$A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (69)$$

となることに注意して、(68) 式の両辺に行列 A を掛け算してみると、

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= A\mathbf{u}_1 + A\mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (70)$$

となることが分かります。したがって、(70) 式から、 $\mathbf{u}_1$ は、

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u} \quad (71)$$

でなければならないことが分かります。すると、(68) 式、(71) 式から、 $\mathbf{u}_2$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u} - A\mathbf{u} \end{aligned} \quad (72)$$

でなければならないことが分かります。

こうして、勝手にひとつ与えられたベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が、それぞれどのようなベクトルでなければならないのかということに「当たり」がつきましたから、後は、(71) 式、(72) 式により定まるベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が、それぞれ、

$$\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$$

となることが確かめられれば良いことになります。そこで、このことを確かめてみることにします。

いま、

$$A^2 = A \quad (73)$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}_1 &= A(A\mathbf{u}) && ((71) \text{ 式から }) \\ &= A^2\mathbf{u} \\ &= A\mathbf{u} && ((73) \text{ 式から }) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{u}_1 \quad ((71) \text{ 式から })$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u}_1 \in W_1 \quad (74)$$

となることが分かります. 全く同様に,

$$A\mathbf{u}_2 = A(\mathbf{u} - A\mathbf{u}) \quad ((72) \text{ 式から })$$

$$= A\mathbf{u} - A^2\mathbf{u}$$

$$= A\mathbf{u} - A\mathbf{u} \quad ((73) \text{ 式から })$$

$$= \mathbf{0}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u}_2 \in W_2 \quad (75)$$

となることが分かります. よって, (74) 式, (75) 式から,

$$\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$$

となることが分かりましたから, (イ) という条件が満たされることが分かります.²⁴

次に, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (76)$$

であると仮定してみます. このとき, (76) 式の両辺に行列 A を掛け算してみると, (69) 式から,

$$\mathbf{0} = A\mathbf{u}_1 + A\mathbf{u}_2$$

$$= \mathbf{u}_1 + \mathbf{0} \quad ((69) \text{ 式から })$$

$$= \mathbf{u}_1$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad (77)$$

となることが分かります. よって, (76) 式, (77) 式から,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (78)$$

²⁴ こうした考察を行なった後で, 解答としては, 「勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = A\mathbf{u} \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - A\mathbf{u} \end{cases}$$

と定めると,

$$\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$$

であり, かつ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

となる」などと書いてみると「気取った感じ」が出ます.

となることも分かります。したがって、(77) 式、(78) 式から、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かりましたから、(ロ) という条件も満たされることが分かります。

以上から、(イ)、(ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから、 $\mathbb{R}^n$ は、

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$$

というように、 W_1 と W_2 の直和に分解されることが分かります。

8 直和とは

さて、第8回の問2、問3のところでは、 V, W を線型空間として、 $f: V \rightarrow W$ を V から W への線型写像とするときに、 V や W の「上手い番地割り」を用いることで、線型写像 $f: V \rightarrow W$ の「大まかな様子」が具体的に理解できることを見ました。すなわち、 V, W の次元を、それぞれ、

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

として、 V や W の基底を「上手く取る」ことで、これらの「上手い基底」に関して、線型写像 f の表現行列が、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

という「見やすい形」の行列になることに注目して、 V や W の「上手い番地」も、

$$\begin{aligned} V \ni \mathbf{u} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\ W \ni \mathbf{w} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \end{aligned} \quad (79)$$

というように、最初の r 個の成分と残りの $(n-r)$ 個、あるいは、最初の r 個の成分と $(m-r)$ 個の成分に分けて考えました。すると、このような「上手い番地割り」のもとで、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

に対して、

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W \cong \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

となることが分かりますから、線型写像 f の「大まかな様子」は図1のように与えられることが分かるのでした。²⁵

²⁵ここで、第8回の問2、問3のところと同様に、上のような「上手い番地割り」のもとで、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}$$

というように、線型空間の「点」と「(上手い) 番地」を同一視して表わすことにしました。

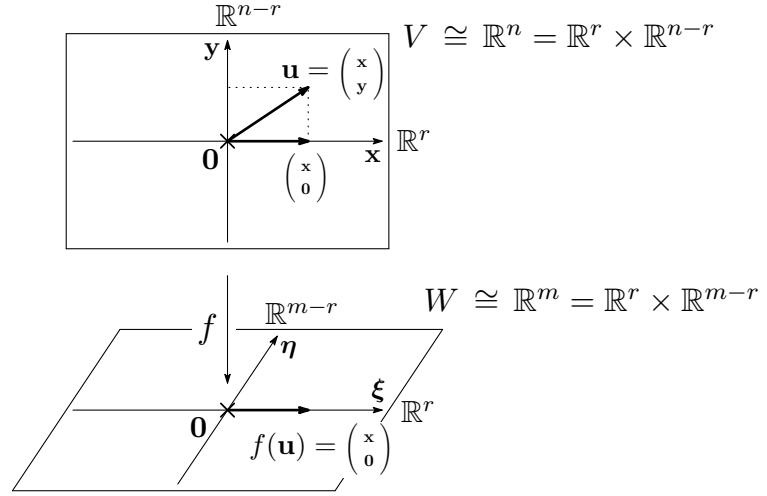


図 1: 「上手い番地割り」のもとでの線型写像 $f: V \rightarrow W$ の「大まかな様子」.

さて, (79) 式のように, 線型空間 V の「上手い番地」を, 最初の r 個の成分 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 個の成分 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$ に分けて考えるということは, 上のような「上手い番地割り」のもとで, 線型空間 V を,

$$V \cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \quad (80)$$

というように, 最初の r 次元の「方向」 $\mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 次元の「方向」 $\mathbb{R}^{n-r}$ に分解して考えるということに当たります (図 1 を参照). このように, **与えられた線型空間 V をいくつかの線型部分空間の「方向」に分解すること**を, 一般に, 線型空間 V の「直和分解」と言います. ただし, 線型空間 V がいくつかの「方向」に分解するということを直接表現しようとする, 少しゴタゴタしてしまいますから, **そうした分解があれば, 線型空間 V の元も「成分分解」することになる**ということに注目して, 次のように, 「直和」の概念を定義するのが普通です.

一般に, V を線型空間, $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ を V の線型部分空間として,

線型空間 V が線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の直和となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2, \dots, \mathbf{u}_m \in W_m$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2, \dots, \mathbf{u}_m \in W_m$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \dots = \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされるときに, 線型空間 V は線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の

直和であると言います。また、このとき、記号で、

線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ による線型空間 V の直和分解

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m \quad (81)$$

というように表わして、(81) 式の分解を線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ による線型空間 V の直和分解と呼びます。

例えば、上で挙げた「上手い番地割り」の例では、(80) 式のように、「上手い番地」全体の集合である数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を、最初の r 次元の「方向」 $\mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 次元の「方向」 $\mathbb{R}^{n-r}$ に分解して考えましたが、これらの「方向」を、それぞれ、

$$W_1 = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \right\} \cong \mathbb{R}^r$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \cong \mathbb{R}^{n-r}$$

と表わすと、 W_1, W_2 は $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間であり、線型空間 $\mathbb{R}^n$ が、

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$$

というように W_1, W_2 の直和に分解することが、次のようにして分かります。

まず、(イ) という条件について考えてみます。いま、 $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

を、勝手にひとつ取ってきたとします。このとき、 $\mathbf{u}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (82)$$

というように表わすことができますから、(82) 式から、

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W_1, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in W_2$$

として、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

というように表わせることが分かります。よって、(イ) という条件が満たされることが分かります。

次に、(ロ) という条件について考えてみます。いま、 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ として、

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (83)$$

であると仮定してみます。このとき、

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W_1, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in W_2 \quad (84)$$

と表わすと、(83) 式から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (85)$$

となることが分かります。よって、(84) 式、(85) 式から、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かりますから、(ロ) という条件も満たされることが分かります。

以上から、(イ)、(ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから、線型空間 $\mathbb{R}^n$ は、

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$$

というように直和分解することが分かります。

そこで、もう一度、

線型空間 V が線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の直和となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \quad (86)$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2, \dots, \mathbf{u}_m \in W_m$ が存在する。

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2, \dots, \mathbf{u}_m \in W_m$ として、

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \dots = \mathbf{u}_m = \mathbf{0} \quad (87)$$

となる。

という直和の条件について考えてみることにします。まず、(イ) という条件ですが、上で挙げた「上手い番地割り」全体の集合 $\mathbb{R}^n$ の例と比べてみると、(86) 式は、「線型空間 V の勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ が、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix}$$

というように, W_1 方向の成分 $\mathbf{u}_1 \in W_1$ と, W_2 方向の成分 $\mathbf{u}_2 \in W_2$ と, $\dots$, W_m 方向の成分 $\mathbf{u}_m \in W_m$ に「成分分解」する」ということを表わしていると解釈できそうなことが分かります. すると, (ロ) という条件は, 「 V の原点 $\mathbf{0} \in V$ の「成分分解」は,

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}$$

という分解, すなわち,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

という分解しか存在しない」ということを表わしていると解釈することができます.

第6回の問2のところでは, 線型空間の基底という概念を取り上げて,

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ が線型空間 V の基底となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \quad (88)$$

となるような実数 $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_m \mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

となる.

という基底の条件のうち, (ロ) という条件については, 「 V の原点 $\mathbf{0} \in V$ に割り振られる「番地」は,

$$V \ni \mathbf{0} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

だけである」という「表面的な意味」と, 「 V の勝手な点 $\mathbf{u} \in V$ に割り振られる「番地」は, (存在したとしても) 高々ひとつである」という「本当の意味」があるということを注意しました. 全く同様に, 直和の場合にも, (ロ) という条件のもとで, 「 V の勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ の「成分分解」は, (存在したとしても) 高々ひとつである」ということが保障されるということが, 次のようにして分かります.

いま, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}'_2 \in W_2$, $\dots$, $\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m \in W_m$ として, $\mathbf{u} \in V$ という元が,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \quad (89)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \dots + \mathbf{u}'_m \quad (90)$$

というように、二通りに「成分分解」されたと仮定してみます。このとき、(89) 式から (90) 式を引き算してみると、

$$\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}'_2) + \cdots + (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}'_m) \quad (91)$$

となることが分かります。ここで、 $i = 1, 2, \dots, m$ に対して、 W_i は V の線型部分空間であることに注意すると、 $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i \in W_i$ となることから、

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}'_i \in W_i$$

となることが分かりますから、(91) 式は、原点 $\mathbf{0} \in V$ の「成分分解」を与えていることが分かります。したがって、(ロ) という条件が成り立っているとすると、

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}'_2) = \cdots = (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}'_m) = \mathbf{0}$$

となることが分かりますから、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}_m = \mathbf{u}'_m$$

となることが分かります。よって、(89) 式の「成分分解」と (90) 式の「成分分解」は、同じ「成分分解」であることが分かります。

以上から、直和の条件は、

直和の条件の意味

(イ) V の勝手な元は、 W_1 方向の成分、 W_2 方向の成分、 $\dots$ 、 W_m 方向の成分に少なくとも一通りには「成分分解」できる。

(ロ) V の勝手な元の「成分分解」は存在したとしても唯一通りである。

というように、「 V の勝手な元が、 W_1 方向の成分、 W_2 方向の成分、 $\dots$ 、 W_m 方向の成分に一意的に「成分分解」できる」ということを表わしていると解釈できることが分かります。例えば、上で挙げた「上手い番地割り」の例では、

$$W_1 = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \right\} \cong \mathbb{R}^r$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \cong \mathbb{R}^{n-r}$$

として、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

を、 W_1 方向の成分と W_2 方向の成分に「成分分解」しようとする、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

というように「成分分解」するしかないわけですが、このように、 $\mathbb{R}^n$ の勝手なベクトルが一意的に「成分分解」できるということが、

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$$

というように、 $\mathbb{R}^n$ が W_1 の方向と W_2 の方向に直和分解するということを表わしていると考えることができます。

一方、 $V = \mathbb{R}^3$ として、

$$W_1 = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

という例を考えてみると、例えば、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

というベクトルは、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように、何通りにも「成分分解」できることが分かります。²⁶ よって、この場合には、 $\mathbb{R}^3$ は W_1, W_2 の直和ではないということが分かります。ただし、 $\mathbb{R}^3$ の勝手なベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

²⁶一般に、 $\mathbb{R}^3$ の勝手なベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

は、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を $\alpha + \beta = y$ となる実数として、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ z \end{pmatrix}$$

というように無限通りに「成分分解」できることが分かります。

は、例えば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

というように、少なくとも一通りには「成分分解」できることが分かりますから、(イ)という条件だけは満たされることが分かります。

一般に、 $W_1, W_2, \dots, W_m$ を線型空間 V の線型部分空間として、 $W_1, W_2, \dots, W_m$ に属する元たちの和の形で表わされるような V の元全体の集合を、

—— **線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の和** ——

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m = \{ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \in V \mid \mathbf{u}_i \in W_i, (i = 1, 2, \dots, m) \}$$

と表わして、線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の**和**と呼びます。²⁷ また、第5回の問2のときと同様にして、

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m$$

も V の線型部分空間になることが分かります。²⁸ この記号を用いると、直和に対する(イ)という条件は、

—— **直和に対する(イ)という条件の言い換え** ——

$$V = W_1 + W_2 + \dots + W_m$$

というように表わすことができます。このとき、さらに、(ロ)という「**成分分解**」の一意性の条件が成り立っていることを強調して表わすために、「**直和**」に対しては、「+」という記号ではなく、「 $\oplus$ 」という記号が使われます。²⁹

上の二番目の例では、 $\mathbb{R}^3$ は W_1, W_2 の直和ではありませんでしたが、 W_1, W_2 の様子を描いてみると、図2のようになることが分かります。よって、この場合には、 W_1 と W_2 が重なる方向

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

が現われることになり、「 $\mathbb{R}^3$ が W_1 の方向と W_2 の方向に分解している」とは言えないことが分かります。

このことを、逆に考えると、例えば、上で挙げた「上手い番地割り」の例のように、

$$W_1 \cap W_2 = \{ \mathbf{0} \}$$

となる場合には、 W_1 と W_2 には重なる方向がありませんから、「 $W_1 + W_2$ は W_1 の方向と W_2 の方向に分解している」と言えそうなことが分かります。実際、 $m = 2$ のとき、す

²⁷すなわち、線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の和とは、 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の元を用いて「成分分解」ができる V の元全体の集合のことです。

²⁸皆さん、確かめてみて下さい。

²⁹ただし、線型代数学の少し古い教科書では、その当時に「 $\oplus$ 」という記号を活字にすることは難しかったので、「+」の上に「 $\cdot$ 」を付けて、「 $\dot{+}$ 」という記号で直和を表わしていることもあります。

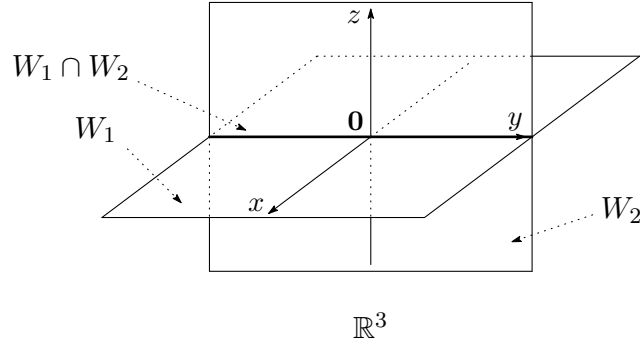


図 2: 線型部分空間 W_1, W_2 の様子.

なわち, 分解する成分の数が二つの場合には, (ロ) という条件を,

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \quad (92)$$

というように言い換えられることが, 次のようにして分かります.

いま, $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ として, 原点 $\mathbf{0} \in V$ が,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (93)$$

というように表わされたと仮定してみます. このとき, (93) 式を,

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$$

というように書き直してみると,

$$\mathbf{u}_1 \in W_1, -\mathbf{u}_2 \in W_2$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2 \in W_1 \cap W_2 \quad (94)$$

となることが分かります. よって, (92) 式が成り立つと仮定すると, (92) 式, (94) 式から,

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かります. したがって, (ロ) という条件が成り立つことが分かります.

逆に, (92) 式が成り立たないと仮定すると, すなわち,

$$W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$$

であると仮定すると, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ となる元 $\mathbf{v}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, 原点 $\mathbf{0} \in V$ を,

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$$

というように表わしてみると,

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in W_1, \mathbf{0} \neq -\mathbf{v} \in W_2$$

となることが分かりますから, 原点 $\mathbf{0} \in V$ に対する

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

という分解とは異なる「成分分解」が得られることが分かります. よって, (ロ) という条件が成り立たないことが分かります.

以上の議論から, $m = 2$ の場合には, 線型空間 V が線型部分空間 W_1, W_2 の直和となるための条件を,

線型空間 V が線型部分空間 W_1, W_2 の直和となるための条件 (言い換え)

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ が存在する.

(ロ) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ となる.

というように言い換えることができることが分かります.

さて, こうして, 線型空間の元の「成分分解」という視点から, 「直和」という概念を定義しましたが, 線型空間 V が,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$$

というように直和分解しているときには, 「線型空間 V は, 実際に, W_1 の方向, W_2 の方向, $\cdots$, W_m の方向に分解している」ということを確かめてみることにします. 一般の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では, $m = 2$ として,

$$\dim_{\mathbb{R}} W_1 = 2, \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 1$$

という場合に説明することになります.

そこで, いま, 線型空間 V が,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

というように直和分解していると仮定してみます. このとき, W_1 の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W_2 の基底 $\{\mathbf{f}_1\}$ を, 勝手に一組ずつ取ってくると, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1\}$ が V の基底になることが, 次のようにして分かります. そのためには,

—— $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1\}$ が V の基底となるための条件 ——

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + b_1 \mathbf{f}_1$$

となる実数 $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + b_1 \mathbf{f}_1 \implies a_1 = a_2 = b_1 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{u} \in V$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. すると, 直和に対する (イ) という条件から,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{95}$$

となる元 $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ が存在することが分かります. さらに, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{f}_1\}$ が, それぞれ, W_1, W_2 の基底であることに注意すると,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = b_1 \mathbf{f}_1 \end{cases} \tag{96}$$

となる実数 $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ が存在することが分かります. よって, (96) 式を (95) 式に代入してすることで,

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + b_1 \mathbf{f}_1$$

と表わせることが分かりますから, (イ) という条件が成り立つことが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + b_1 \mathbf{f}_1$$

となると仮定してみます. すると, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{f}_1\}$ は, それぞれ, W_1, W_2 の基底ですから,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = b_1 \mathbf{f}_1 \end{cases} \tag{97}$$

という式によって, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ を定めると,

$$\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$$

であり,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

となることが分かります. よって, 直和に対する (ロ) という条件から,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \tag{98}$$

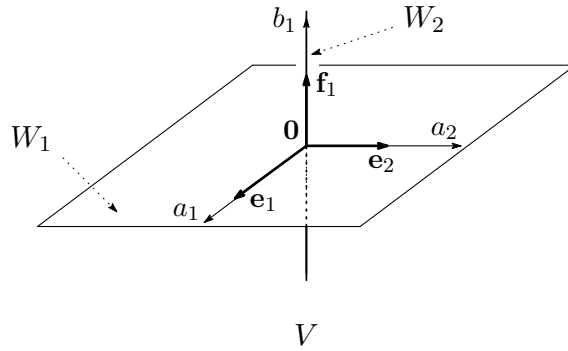


図 3: 線型部分空間 W_1, W_2 の様子.

となることが分かります. すると, (97) 式, (98) 式から,

$$\begin{cases} \mathbf{0} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} = b_1 \mathbf{f}_1 \end{cases} \quad (99)$$

となることが分かりますが, 再び, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{f}_1\}$ が, それぞれ, W_1, W_2 の基底であることに注意すると, (99) 式から,

$$a_1 = a_2 = b_1 = 0$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も成り立つことが分かります.

以上から, 基底に対する (イ), (ロ) という二つの条件が成り立つことが分かりましたから, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1\}$ は, V の基底になることが分かります.

そこで, 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1\}$ を用いて,

$$V \cong \mathbb{R}^3$$

というように「番地割り」して考えてみると,

$$W_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right) \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

$$W_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid b_1 \in \mathbb{R} \right) \right\} \cong \mathbb{R}$$

となることが分かりますから, 確かに, 線型空間 V が W_1 の方向と W_2 の方向に分解していることが分かります (図 3 を参照). 全く同様に, 一般に, 線型空間 V が,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$$

というように直和分解しているときに, それぞれの線型部分空間 W_i の基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて集めたものを $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ と表わすことにすると, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ は V の基底になることが分かります. また, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ という基底を用いて, 線型空間 V に「番地割り」をして考えると, **線型空間 V が, 確かに, W_1 の方向, W_2 の方向, $\dots$, W_m の方向に分解していることが分かります.** 興味のある方は, 上の議論を参考にして, これらの事実を確かめてみて下さい.

9 固有ベクトル空間分解について

さて, 3 節では,

行列の対角化の問題

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

となるような対角行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

という「**行列の対角化の問題**」を取り上げて, この問題を解決するために, 「**固有値**」, 「**固有ベクトル**」という概念に注目して,

「行列の対角化の問題」を解決する戦略

(i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める. ($\implies$ 行列 A の固有値が求まる.)

(ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて,

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

を求める. ($\implies$ 行列 A の固有ベクトルが求まる.)

(iii) $V(\lambda)$ たちの中から, 適当にベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) を取り出して, 正則行列 P を作る.

という戦略を立てました. また, 問 1 の例では, 実際に, この戦略が上手くゆき, 線型写像 $T: V \rightarrow V$ の表現行列

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が, 正則行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix}$$

を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

というように対角化できることを見ました.

ところが、例えば、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列を考えてみると、**行列 N は対角化できない**ことが、例えば、次のようにして分かります。いま、行列 N のべき乗 $N^2, N^3, \dots$ を順番に計算してみると、

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$N^3 = O \quad (100)$$

となることが分かります。そこで、いま、行列 N に対する「対角化の問題」が解決して、

$$P^{-1}NP = \Lambda \quad (101)$$

となるような対角行列 Λ と正則行列 P が見つかったと仮定してみます。このとき、(100) 式に注意して、(101) 式の両辺を 3 乗してみると、

$$\begin{aligned} \Lambda^3 &= (P^{-1}NP)^3 \\ &= P^{-1}N^3P \\ &= P^{-1}OP \quad ((100) \text{ 式から }) \\ &= O \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\Lambda^3 = O \quad (102)$$

となることが分かります。そこで、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (103)$$

と表わすことにすると, (102) 式から,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} = O$$

となることが分かりますから,

$$\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3 = 0 \quad (104)$$

となることが分かります. したがって, (104) 式から,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

となることが分かりますから, (103) 式と合わせて,

$$\Lambda = O \quad (105)$$

となることが分かります. すると, (101) 式, (105) 式から,

$$P^{-1}NP = O \quad (106)$$

となることが分かりますが, (106) 式の両辺に左から P を掛け算し, 右から P^{-1} を掛け算してみると,

$$\begin{aligned} N &= POP^{-1} \\ &= O \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$N = O$$

となることが分かります. ところが, これは,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

であることと矛盾してしまいます. したがって, 行列 N に対して, 「対角化の問題」を解決するような正則行列 P は存在しないことが分かります.³⁰

このことは, **上で立てた「行列の対角化の問題」を解決するための戦略が, 一般には, 上手くいくとは限らない**ということを意味しています. いま, 「行列の対角化の問題」を解決するための戦略のうち, (i), (ii) というステップはどのような正方行列に対しても実行可能ですから, **上の戦略が上手くいかない場合には, (iii) というステップが上手くいかない**ということが分かります. また, 「行列の対角化の問題」を解決するための戦略が上手くいく場合でも, **「ベクトル p_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) を固有ベクトル空間 $V(\lambda)$ たちの中からど**

³⁰全く同様に考えると, $N \neq O$ となるベキ零行列 N に対しては, 「対角化の問題」を解決するような正則行列 P は存在しないことが分かります.

のような形で取り出してくれば、正則行列 P を作ることができるのか」という問題には触れませんでした。そこで、ここでは、こうした問題について考えてみることにします。

まず、「ベクトル $\mathbf{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) を固有ベクトル空間 $V(\lambda)$ たちの中からどのような形で取り出してくれば、正則行列 P を作ることができるのか」という問題について考えてみることにします。いま、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

とすると、 $\mathbb{C}^n$ の元 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように表わせることが分かりますから、数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の最初に与えられた「番地割り」は、基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ に関する「番地割り」であることが分かります。³¹ そこで、さらに、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^n$ を、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad (107)$$

と表わすことにすると、 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ は、基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

³¹その意味で、基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の**自然基底**と呼んだりします。

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P \quad (108)$$

というように表わせることが分かります。³² すると、第8回の問1のところで見たように、一般に、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^n$ が正方行列 P を用いて、(108) 式のように表わされているときに、

—— $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になるための条件 ——

$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になる. $\iff P$ が正則行列になる.

となることが分かりますから、行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

が正則行列となるための条件を、

—— 行列 P が正則行列となるための条件 ——

P が正則行列になる. $\iff \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になる. (109)

というように言い換えることができることが分かります。したがって、(109) 式から、「**行列 A の対角化の問題**」は「**行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底を求める問題**」であると解釈することができることが分かります。

そこで、状況をより良く理解するために、特定の座標軸の取り方によらない形で「行列の対角化の問題」を理解することを試みてみることにします。一般の場合でも、考え方の本質は変わりませんから、話を具体的にするために、以下では、 A を 3 行 3 列の行列として、行列 A が、正則行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

というように対角化できる場合について説明してみることにします。³³

いま、行列 P の列ベクトルを、

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

³²ここで、行列 P は、基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を用いた「番地割り」のもとで、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^n$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列であると解釈することができます。数ベクトル空間の場合には、(107) 式のように、線型空間 $\mathbb{C}^n$ の「点」とその「点」に割り振られる「番地」を同一視して表わす習慣があるので、慣れないうちは少し混乱するかもしれませんが、線型空間の「点」とその「点」に割り振られる「番地」というのは、本来は異なる概念ですから、これら二つの概念を区別して考えるということが、「線型空間」や「線型写像」という視点です。

³³前にも注意しましたが、この例のように固有値として実数しか現れない場合には、必ずしも「複素数の世界」に考察を拡張して考える必要はありませんから、 $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathbb{C}^3$ などがイメージしにくい方は、以下の議論で、 $\mathbb{C}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$ などと置き換えて考えてみて下さい。

と表わすことにすると, 上で見たことから, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底であり,

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3 \end{cases} \quad (110)$$

となることが分かります. そこで, $\mathbb{C}^3$ の最初の「番地割り」を忘れたものを, 線型空間らしく,

$$V = \mathbb{C}^3$$

というように表わすことにします. このとき, 線型空間 V の「番地割り」を,

$$V \ni \mathbf{u} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{C}^3)_{\text{新}}$$

というように, 基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を用いた「新番地割り」に取り替えて, この「新番地割り」のもとで, それぞれの固有ベクトル空間がどのように記述できるのかということを考えてみます.³⁴

いま,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3 \in V \quad (111)$$

とすると, (110) 式から,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= A(a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3) \\ &= a_1A\mathbf{p}_1 + a_2A\mathbf{p}_2 + a_3A\mathbf{p}_3 \\ &= a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3(2\mathbf{p}_3) \quad ((110) \text{ 式から }) \\ &= a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + 2a_3\mathbf{p}_3 \end{aligned} \quad (112)$$

となることが分かります. よって, (111) 式, (112) 式から,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} = \mathbf{u} &\iff A\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\iff a_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \\ &\iff a_3 = 0 \end{aligned} \quad (113)$$

となることが分かりますから,³⁵ 行列 A の固有値 1 に対応する固有ベクトル空間 $V(1)$ は,

$$V(1) = \{\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 \in V \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$$

³⁴第 8 回の問 1 のところと同様に, $\mathbb{C}^3$ の最初に与えられた「番地割り」を取り替えて議論しているということを強調するために, 基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ に関する「番地」を「新番地」と考えて, 「新番地」や「新番地全体の集合」を「 $(\cdot)_{\text{新}}$ 」という添え字を付けて表わすことにしました.

³⁵ここで, (113) 式の言い換えでは,

$$a_3\mathbf{p}_3 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3$$

であると解釈して, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ が線型独立であることから,

$$a_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \implies a_3 = 0$$

となつて考えました.

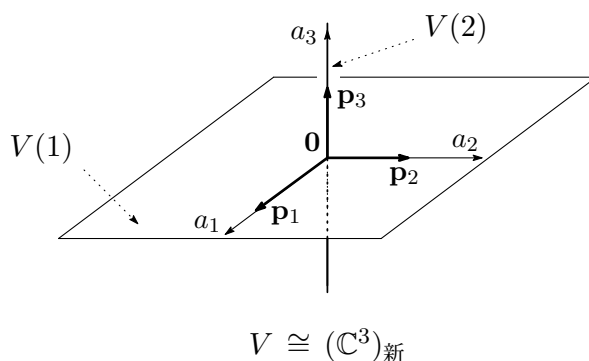


図 4: 固有ベクトル空間 $V(1), V(2)$ の様子.

となることが分かります. 全く同様に, (111) 式, (112) 式から,

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{u} = 2\mathbf{u} &\iff A\mathbf{u} - 2\mathbf{u} = \mathbf{0} \\
 &\iff (-a_1)\mathbf{p}_1 + (-a_2)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \\
 &\iff a_1 = a_2 = 0
 \end{aligned} \tag{114}$$

となることが分かりますから,³⁶ 行列 A の固有値 2 に対応する固有ベクトル空間 $V(2)$ は,

$$V(2) = \{\mathbf{u}_2 = a_3\mathbf{p}_3 \in V \mid a_3 \in \mathbb{C}\}$$

となることが分かります. したがって,

$$V \cong (\mathbb{C}^3)_{\text{新}}$$

という「新番地割り」のもとで, それぞれの固有ベクトル空間 $V(1), V(2)$ の様子は, 図 4 のようになることが分かります.³⁷ すなわち, **線型空間 V が固有ベクトル空間 $V(1)$ の方向と固有ベクトル空間 $V(2)$ の方向に分解していることが分かります.**

8 節で見たように, 線型空間 V がいくつかの線型部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_m$ の方向に分解されることを「直和分解」と呼びますが, 今の場合も, 線型空間 V が,

$$V = V(1) \oplus V(2)$$

というように「直和分解」されていることが, 次のようにして分かります. そのためには,

³⁶ ここで, (114) 式の言い換えでは,

$$(-a_1)\mathbf{p}_1 + (-a_2)\mathbf{p}_2 = (-a_1)\mathbf{p}_1 + (-a_2)\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$$

であると解釈して, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ が線型独立であることから,

$$(-a_1)\mathbf{p}_1 + (-a_2)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \implies a_1 = a_2 = 0$$

となると考えました.

³⁷ ただし, 数ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ を, 直接, 図に描くことはできませんから, $\mathbb{C}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$ と置き換えて, 図 4 を描きました.

線型空間 V が線型部分空間 $V(1), V(2)$ の直和となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in V(1), \mathbf{u}_2 \in V(2)$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in V(1), \mathbf{u}_2 \in V(2)$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{u} \in V$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. このとき, $\mathbf{u}$ を,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3$$

と表わして,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2, \\ \mathbf{u}_2 = a_3\mathbf{p}_3 \end{cases}$$

と定めてみます. すると, 上で見たように,

$$V(1) = \{\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 \in V \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$V(2) = \{\mathbf{u}_2 = a_3\mathbf{p}_3 \in V \mid a_3 \in \mathbb{C}\}$$

となることが分かりますから, $\mathbf{u}_1 \in V(1), \mathbf{u}_2 \in V(2)$ であり,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

と表わせることが分かります. よって, (イ) という条件が成り立つことが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{u}_1 \in V(1), \mathbf{u}_2 \in V(2)$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{115}$$

であると仮定してみます. このとき, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を, それぞれ,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2, \\ \mathbf{u}_2 = a_3\mathbf{p}_3 \end{cases} \tag{116}$$

と表わして, (116) 式を (115) 式に代入してみると,

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3 \tag{117}$$

となることが分かります. ここで, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ が V の基底であることに注意すると, (117) 式から,

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \tag{118}$$

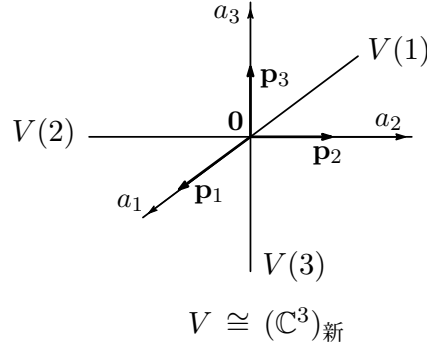


図 5: 固有ベクトル空間 $V(1), V(2), V(3)$ の様子.

となることが分かりますから, (116) 式, (118) 式から,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も成り立つことが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が成り立つことが分かりましたから, 線型空間 V は,

$$V = V(1) \oplus V(2)$$

というように「直和分解」されることが分かります.

全く同様に, A を 3 行 3 列の行列として, 行列 A が, 正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

というように対角化できる場合を考察してみると, それぞれの固有ベクトル空間は,

$$V(1) = \{\mathbf{u}_1 = a_1 \mathbf{p}_1 \in V \mid a_1 \in \mathbb{C}\}$$

$$V(2) = \{\mathbf{u}_2 = a_2 \mathbf{p}_2 \in V \mid a_2 \in \mathbb{C}\}$$

$$V(3) = \{\mathbf{u}_3 = a_3 \mathbf{p}_3 \in V \mid a_3 \in \mathbb{C}\}$$

となり, 線型空間 V は,

$$V = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$$

というように「直和分解」されることが分かります (図 5 を参照).³⁸

より一般に, A を n 行 n 列の行列として, 行列 A が, 正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

というように対角化できる場合には, 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ とし, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m)$$

³⁸前と同様に, 数ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ を, 直接, 図に描くことはできませんから, $\mathbb{C}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$ と置き換えて, 図 5 を描きました.

というように「直和分解」することが分かります.³⁹

逆に, 何らかの方法で, 線型空間 $\mathbb{C}^n$ が,

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$$

というように「直和分解」することが分かったとします. すると, 8節で見たように, それぞれの固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) の基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて集めたものを $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ と表わすことにすると, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底になることが分かります. したがって, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ は「行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底」ということになりますから,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

として, 「行列 A の対角化の問題」が解決することが分かります.

以上の議論をまとめると, 「行列 A の対角化の問題」を,

「行列 A の対角化の問題」の言い換え

$P^{-1}AP = \Lambda$ となる対角行列 Λ と正則行列 P が存在する.

$\iff \mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$ と直和分解する.

というように言い換えられることが分かります. また, 「行列の対角化の問題」を解決する戦略も,

「行列の対角化の問題」を解決する戦略の精密化

(i) 特性多項式 $\varphi_A(t) = \det(tI - A)$ を計算して, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda \in \mathbb{C}$ をすべて求める. ($\implies$ 行列 A の固有値が求まる.)

(ii) それぞれの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解いて,

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

を求める. ($\implies$ 行列 A の固有ベクトルが求まる.)

(iii) それぞれの固有ベクトル空間 $V(\lambda)$ の基底を勝手に一組ずつ取ってきて, それらの基底の元をすべて並べることで, 正則行列 P を作る.

というように精密化できることが分かります. ここで現われた

固有ベクトル空間分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$$

という直和分解を**固有ベクトル空間分解**と呼びます.

³⁹皆さん, 上の議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

さて、この節の最初のところで、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というベキ零行列は対角化できないことを見ましたが、この例の場合に、上の戦略を試みるとどのようなことになるのかということを見てみることにします。そこで、まず、行列 N の特性多項式 $\varphi_N(t)$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) &= \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} \\ &= t^3 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、行列 N の固有値 λ は、 $\lambda = 0$ となることが分かります。また、 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ を、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と表わすことにすると、

$$\begin{aligned} N\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} N\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff y = z = 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、固有値 0 に対応する行列 N の固有ベクトル空間 $V(0)$ は、

$$V(0) = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}$$

となることが分かります。よって、今の場合、**固有ベクトル空間 $V(0)$ は一次元の線型部分空間で、 $V(0)$ の方向だけを考えたのでは、 $\mathbb{C}^3$ のすべての方向をカバーすることはできないことが分かります。**すなわち、今の場合、

$$\mathbb{C}^3 \supsetneq V(0)$$

となり、 $\mathbb{C}^3$ を固有ベクトル空間分解することはできないことが分かります。上で見たように、このことが、行列 N を対角化することができない理由であると考えられます。

このように「行列の対角化の問題」は一般には解決するとは限らないので、そうした場合には、「行列の標準形の問題」における「見やすい形」の行列 Λ を「対角行列」より少しだけ一般化して考える必要があります。この演習でも、追々、そうした一般化についても取り上げていこうと思いますが、そうした少し込み入った場合を理解する上でも、**対角化できる場合をきちんと理解しておくことが大切になります**。また、例えば、対称行列など、皆さんが普段目にする行列で「対角化の問題」が解決できることが理論的に保証される場合も多いです。そのようなわけで、皆さんも、具体的な行列に対して上の戦略を試みることで、今のうちに「行列の対角化の問題」に馴染んでおくの良いのではないかと思います。

10 固有な性質とは

これまで見てきたことから、行列の性質をより良く理解しようとしたときに、「固有値」や「固有ベクトル」という概念が、とても基本的なものになりそうであるということが、皆さんにも納得できるのではないかと思います。しかし、皆さんの中には、どうして「固有値」とか「固有ベクトル」とかいう名前がついているのかと疑問に思われる方がいるかもしれません。そこで、ここでは、どうして「固有」という名前がついているのかという「気持ち」を少しだけ説明してみることになります。

そのために、まず、「固有値」や「固有ベクトル」という概念は、線型写像 $f: V \rightarrow V$ に対しても意味がある概念であるということを見ておくことにします。いま、 $\mathbf{u} \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ として、

線型写像 f に対する固有方程式

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \quad (119)$$

という方程式を考えてみます。この (119) 式という方程式が、自明でない解、すなわち、 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となるような解を持つときに、複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を線型写像 f の固有値と呼びます。また、固有値 λ に対して、(119) 式を満たすような元 $\mathbf{u} \in V$ を線型写像 f の (固有値 λ に対する) 固有ベクトルと呼び、(固有値 λ に対する) 固有ベクトル全体の集合

線型写像 f の (固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\}$$

を線型写像 f の (固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間と呼びます。

ここで、(119) 式という方程式の「=」が意味を持つのは、 $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\mathbf{u}$ と $f(\mathbf{u})$ の両方ともが、ひとつの線型空間 V の元であるからです。一方、二つの異なる線型空間 V, W の間の線型写像

$$f: V \rightarrow W$$

を考えた場合には、 $\mathbf{u} \in V$ となるのに対して、 $f(\mathbf{u})$ の方は $f(\mathbf{u}) \in W$ となり、 $\mathbf{u}$ と $f(\mathbf{u})$ とは異なる線型空間の元になりますから、(119) 式という方程式は無意味になると

いうことに注意して下さい. すなわち, このような異なる線型空間の間の線型写像に対しては, 「固有値」や「固有ベクトル」という概念は意味がないということになります.

そこで, 次に, 線型空間 V に「番地割り」をせずに考えたとき, V の基底を勝手にひとつ定めて, V に「番地割り」をして考えたときの状況を比べてみることにします. いま,

$$\dim_{\mathbb{C}} V = n$$

として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$V \ni \mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \longleftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad (120)$$

というように「番地割り」してみます. また, 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ に関する線型写像 f の表現行列を A と表わすことにします. すると, このとき, $f(\mathbf{u}), \lambda \mathbf{u} \in V$ という元に対して, それぞれ,

$$\begin{aligned} V \ni f(\mathbf{u}) &\longleftrightarrow A\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ V \ni \lambda \mathbf{u} &\longleftrightarrow \lambda \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

という「番地」が割り振られることになりますから,

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \iff A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (121)$$

となることが分かります. したがって, (121) 式から, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ が V のどんな基底であったとしても,

線型写像とその表現行列の固有値, 固有ベクトルの間の対応

線型写像		表現行列
線型写像 f の固有値	$\longleftrightarrow$	表現行列 A の固有値
線型写像 f の固有ベクトル	$\longleftrightarrow$	表現行列 A の固有ベクトル

というように, 線型写像 f の固有値, 固有ベクトルは, 常に, 表現行列 A の固有値, 固有ベクトルに対応することが分かります. このように, 固有値や固有ベクトルは, 線型空間 V の特定の「番地割り」の仕方によらずに理解することができる線型写像 $f: V \rightarrow V$ の性質であることが分かります.

以上の準備のもとで, 数学者が, 線型空間 V と「番地割り」の定まった数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ との関係, あるいは, 線型写像 $f: V \rightarrow V$ とその表現行列 A との関係を, どのようなものとして考えているのかという一端を, 卑近な例に置き換えて説明してみることになります.

皆さん良くご存じのように, 世の中には「りんご」という果物があります. これを, 日本人は「りんご」と呼び, アメリカ人は「apple」と呼んでいます. ロシア人やイタリア人が何と呼んでいるのかは, にわかには分かりませんが, 何がしかの「呼び名」を用いて呼んでいることは確かです. このとき, このように「呼び名」をつけて呼ぶということが, ちょ

うど、線型空間 V に「番地割り」をして、線型空間 V の「点」 $u \in V$ を「番地」を用いて表わすということに対応しているような「気分」があります。

他の外国語で何と呼ばれているのかは、にわかには分からないにしても、世の中には日本語で「りんご」と呼ばれている「もの」が存在していることは確かです。このときに、例えば、日本語を用いるといったように、どの「言語」を用いて、この「もの」を表現するのかということを決めると、「りんご」というように、「もの」が「具体的な言葉」を用いて表現できることになります。これが、ちょうど、線型空間 V の基底を勝手にひとつ定めて、線型空間 V に「番地割り」して考えることで、線型空間の「点」 $u \in V$ を「具体的な数の組み」である「番地」を用いて表わすことができるということと「同じ気分」であるわけです。日本語で「りんご」と呼ばれている「もの」も、どの言語で表わすかによって、色々な「呼び名」で表わされることになるように、線型空間 V の中では同じ「点」を考えていても、この「点」に割り振られる「番地」は、「番地割り」の基準である基底の取り方によって、ころころ変わってしまうわけです。

また、日本語で「りんご」と呼ばれる「もの」の本性をより良く理解するために、それぞれの国の人達と意見交換をしたいと考えた人がいるとすると、日本語では「りんご」と呼ぶけれど、英語では「apple」と呼ぶのだというように、最初に、それぞれの言語での「呼び名」の間に「対応」をつけるという必要が生じます。これは、ちょうど、異なる「番地割り」のもとで、線型空間の同じ「点」に割り振られる「旧番地」と「新番地」の間に対応をつけるということ、すなわち、線型空間の異なる「座標付け」の間の「座標変換」を考えるということにあたっているという「気分」があります。

線型写像 $f: V \rightarrow V$ とその表現行列 A の間の関係にも、同様な「気分」があります。線型空間 V に基底を定めて「番地割り」して考えると、線型写像 $f: V \rightarrow V$ は具体的な行列 A として表現できるのでした。また、同じ線型写像 $f: V \rightarrow V$ を考えていても、この「線型写像」を表現する「行列」の姿は、線型空間 V の「番地割り」の仕方を取り替えると、ころころ姿が変わるのでした。このとき、「行列」としての姿がどのように変わるのかということは、「表現行列の変換公式」としてきちんと記述できるのでした。

皆さんも、良くご存じのように、普通、りんごは赤いものです。⁴⁰ このことを「りんごは赤い」と表現したり、「An apple is red」などと言ったりしますが、どの言語で表現するかには関係なく、日本語で「りんごは赤い」と表現できるような性質が、日本語で「りんご」と呼ばれる「もの」には付随しているわけです。その意味で、「りんごの赤さ」というものは、「りんご固有の性質」であると考えることができます。

同様に、線型写像 $f: V \rightarrow V$ は、線型空間 V の基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を勝手にひとつ定めることで、 A という具体的な行列により表現されることになりますが、上で見たように、どのような基底を用いて線型空間 V に「番地割り」したとしても、行列 A の「固有ベクトル」は（「番地割り」の仕方とは無関係である）線型写像 f の「固有ベクトル」に対応することが分かります。また、行列 A の「固有値」も線型写像 f の「固有値」として理解することができますから、どのような「番地割り」をして考えても、全く同じ「固有値」が得られることになります。その意味で、これらの性質は「線型写像 f の固有な性質」であると考えられますから、「固有値」、「固有ベクトル」という名前がついているわけです。

これに対して、線型空間 V のひとつの元 $u \in V$ に注目したときに、 u が座標軸にのっ

⁴⁰ まあ、中には「青りんご」などというものもありますが、あまり細かいことは気にしないことにします。

ているかいけないかという性質は、**全くもって「番地割り」の仕方によってしまう性質**です。すなわち、 $u \in V$ が座標軸にのるように「番地割り」をすることもできれば、 $u \in V$ が座標軸にのらないように「番地割り」することもできるわけです。皆さんの中の多くの方も「りんご」は「旨い」と思われているのではないかと思います。中には、こんなもの見たくもないと思うほど、「りんご」は「不味い」と思われている方もいるかもしれません。このように、「りんごは旨い」という性質は、前に挙げた「りんごは赤い」という性質とは違って、**「りんご」の固有な性質ではない**と考えられます。すなわち、「りんごの旨さ」は、**誰が見ているかということによってしまう性質である**わけです。

まあ、どちらの性質がより興味深いかということは、一概に言うことはできませんが、ギリシアの昔から今日に至るまでの長い間の数学者の経験から、**誰もが共通に見い出すであろう「固有な性質」を理解することが、数学の世界の法則をより良く理解するためにとても大切である**ということが分かってきたので、数学においては、こうした「固有な性質」を理解しようすることに力を注ぐことが多いわけです。