数学 II 演習 (第 9 回) のヒント

問 1.

(1) $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底であることを示すためには,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{f} \in V$ に対して,

$$\mathbf{f} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \tag{1}$$

となるような複素数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ が存在する.

(ロ) $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ として,

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよい. このうち, (イ) という条件については, まず, (1) 式の両辺の関数のそれぞれの点 $x \in S = \{0, 1, 2\}$ における値を比べてみることで, (1) 式を満たすためには, 与えられた関数 $\mathbf{f} \in V$ に対して, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ をどのような値に取らなければならないか「当たり」を付けてみよ. そして, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ の値に「当たり」が付いたら, 再び, (1) 式の両辺の関数のそれぞれの点 $x \in S = \{0, 1, 2\}$ における値を比べてみることで, 実際に, (1) 式が成り立っていることを確かめてみよ. (ロ) という条件については, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ として,

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \tag{2}$$

と仮定したときに, 上と同様に, (2) 式の両辺の関数のそれぞれの点 $x \in S = \{0, 1, 2\}$ における値を比べてみることで, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ がどのような値でなければならないのかを考えてみよ.

(2) $T : V \to V$ が線型写像であることを示すためには,

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$ に対して,

$$T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = T\mathbf{f} + T\mathbf{g} \tag{3}$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{f} \in V$ と勝手な複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$T(a\mathbf{f}) = a \cdot T\mathbf{f} \tag{4}$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよい. そこで, (3) 式, (4) 式の両辺の関数のそれぞれの点 $x \in S = \{0, 1, 2\}$ における値を比べてみることで, (3) 式, (4) 式が成り立つことを確かめてみよ.

(3) 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ に関する線型写像 $T : V \to V$ の表現行列 $\hat{T}$ を求めるためには,

(イ) 基底の元の行き先 $T\mathbf{f}_0, T\mathbf{f}_1, T\mathbf{f}_2 \in V$ の「番地」を求める.
($\Longrightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{T}$ になる.)

(ロ) 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」$V \cong \mathbb{C}^3$ のもとで,

$$V \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{f}_0 + a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 \ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているときに, $T\mathbf{f} \in V$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.
($\Longrightarrow$ このとき,

$$V \ni T\mathbf{f} \ \longleftrightarrow\ \hat{T} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法が考えられることに注意して, (イ), (ロ) のうちのいずれかの方法を用いて, 表現行列 $\hat{T}$ を求めてみよ.

(4) $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ を, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} P$$

という形に表わすとき,[1]

$$\begin{aligned} \{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\} \text{ が } V \text{ の基底になる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad P \text{ は正則行列.} \\ &\Longleftrightarrow \quad \det P \neq 0 \end{aligned}$$

となることに注意して, 行列 P を具体的に求めて, $\det P$ を計算してみよ.

[1] ここで, 行列 P は, 基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in V$ に対応する「番地」を並べてできる 3 行 3 列の行列です.

(5) (1), (2) と同様に, それぞれの関数の各点 $x \in S = \{0, 1, 2\}$ における値を比べてみよ.

(6) (3) と同様にして, (イ), (ロ) のうちのいずれかの方法を用いて, 表現行列 $\check{T}$ を求めてみよ.

問 2. 例えば, (2) では「行や列に関する展開公式」を用いて, 行列式を計算してみよ. また, 余裕があれば, それぞれの行列式を一次式の積の形に因数分解してみよ.

問 3. 線型空間 $\mathbb{R}^n$ が線型部分空間 W_1, W_2 の直和に分解するということを示すためには,

(イ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{5}$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2 \in W_2$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよい. このうち, (イ) という条件については, 例えば, (5) 式の両辺に A を施すなどして, 与えられたベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して, $\mathbf{u}$ が (5) 式のように表わせるとしたら, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ はどのようなベクトルでなければならないかを考えてみよ. そして, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の形に「当たり」がついたら, それらのベクトルが, 実際に, $\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$ であり, かつ, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ となることを確かめてみよ. (ロ) という条件については, $\mathbf{u}_1 \in W_1$, $\mathbf{u}_2 \in W_2$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{6}$$

となると仮定したときに, 上と同様に, (6) 式の両辺に A を施すとどうなるかということを考えてみよ.