

数学 II 演習 (第 9 回)

- 三点からなる集合 $S = \{0, 1, 2\}$ に対して, S 上の複素数値関数全体の集合を,

$$V = \{f \mid f : S \rightarrow \mathbb{C}\}$$

と表わすことにする. このとき, 勝手な二つの関数 $f, g \in V$ と, 勝手な複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して, $f + g, af \in V$ を,

$$\begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (af)(x) = a \cdot f(x) \end{cases}, \quad x \in S$$

という式によって定める. すなわち, $x \in S$ に対して, $f(x) + g(x) \in \mathbb{C}$ という数を対応させる関数を $f + g$ と書き, $x \in S$ に対して, $a \cdot f(x) \in \mathbb{C}$ という数を対応させる関数を af と書くことにする. これらの「足し算」と「スカラー倍」により, V は $\mathbb{C}$ 上の「線型空間」になる.

問 1.

- (1) $f_0, f_1, f_2 \in V$ を, 次のような関数とする.

$$\begin{cases} f_0(0) = 1 \\ f_0(1) = 0 \\ f_0(2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_1(1) = 1 \\ f_1(2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(0) = 0 \\ f_2(1) = 0 \\ f_2(2) = 1 \end{cases}$$

このとき, $\{f_0, f_1, f_2\}$ は V の基底となることを示せ.

- (2) 勝手な関数 $f \in V$ に対して, $Tf \in V$ を,

$$(Tf)(x) = f(x + 1), \quad x \in S$$

と定める. すなわち, $x \in S$ に対して, $f(x + 1) \in \mathbb{C}$ という数を対応させる関数を Tf と書くことにする. ただし, 「 $2 + 1 = 0$ 」であると定める. このとき, $f \in V$ に対して, $Tf \in V$ を対応させる写像

$$T : V \rightarrow V$$

は線型写像となることを示せ.

- (3) V の基底 $\{f_0, f_1, f_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\hat{T}$ を求めよ.

♠ 裏に続きがあります.

- (4) $\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を「1 の 3 乗根」のひとつとして, $g_0, g_1, g_2 \in V$ を, 次のような関数とする.

$$\begin{cases} g_0(0) = 1 \\ g_0(1) = 1 \\ g_0(2) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_1(0) = 1 \\ g_1(1) = \omega \\ g_1(2) = \omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_2(0) = 1 \\ g_2(1) = \omega^2 \\ g_2(2) = \omega^4 (= \omega) \end{cases}$$

このとき, $\{g_0, g_1, g_2\}$ も V の基底となることを示せ.

- (5) $g_0, g_1, g_2 \in V$ に対して,

$$\begin{cases} Tg_0 = g_0 \\ Tg_1 = \omega g_1 \\ Tg_2 = \omega^2 g_2 \end{cases}$$

となることを示せ.

- (6) V の基底 $\{g_0, g_1, g_2\}$ に関する線型写像 T の表現行列 $\check{T}$ を求めよ.

♣ 余裕があれば, 以上のことを, $n+1$ 点からなる集合 $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ に対して考察してみよ.

問 2. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}.$$

♣ 余裕があれば, 得られた答の因数分解を試みる事により,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

の場合に行列式がどうなるかを予想してみよ.

問 3. A を n 行 n 列の行列で,

$$A^2 = A$$

なるものとする. このとき, $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間 W_1, W_2 を,

$$W_1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \mathbf{u}\}$$

$$W_2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$$

という式により定めると, $\mathbb{R}^n$ は,

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$$

というように, W_1 と W_2 の直和に分解することを示せ. すなわち, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in V$ は,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2)$$

という形に一意的に分解できることを示せ.