数学 II 演習 (第 8 回) の略解

目 次

1　問 1 の解答

記号の意味, あるいは, 説明されている概念の意味が理解しやすくなるように, 以下では, 多項式 $f \in V_2$ を, 線型空間 V_2 の点だと考えているときには,「$\mathbf{f}$」というように「太文字」で表わして, 実数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ などと区別して表わすことにします. ただし, 多項式 f の $x \in \mathbb{R}$ での「値」を考えているときには, $f(x) \in \mathbb{R}$ を数であると考えて,「$\mathbf{f}(x)$」ではなくて, 単に,「$f(x)$」と表わすことにします.

(1) $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ が V_2 の基底であることを示すためには,

$\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ が V_2 の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{f} \in V_2$ に対して,

$$\mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2$$

となるような実数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめればよいということになります.

いま, 二次式以下の多項式とは, 正に, $\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2$ という関数の一次結合で表わせるような関数のことですから, V_2 の定義により, (イ) という条件は自動的に満たされることが分かります. したがって, 後は, (ロ) という条件が満たされることだけを確かめればよいということになります.

そこで, いま, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 \tag{1}$$

であると仮定してみます. このとき, (1) 式の左辺の $\mathbf{0}$ とは, 線型空間 V_2 の原点のことですから, すべての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $0 \in \mathbb{R}$ を対応させる「零関数」を表わしていることに注意します. したがって, (ロ) という条件を確かめるには, $\mathbf{f} \in V_2$ を,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{2}$$

と表わしたときに, 関数 $\mathbf{f}$ が「零関数」であれば,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となることが確かめられればよいということになります.

そこで, いま, 関数 $\mathbf{f}$ が 0 という定数関数であると仮定してみます. すなわち, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = 0$$

となると仮定してみます. このとき, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = 0$$

となることが分かりますから, 特に, $x = 0$ として,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \tag{3}$$

となることが分かります．一方, (2) 式の両辺を何度か微分してから, $x = 0$ を代入してみると,

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f'(0) = a_1 \\ f''(0) = 2a_2 \end{cases} \tag{4}$$

となることが分かりますから, (3) 式, (4) 式から,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となることが分かります.[1] よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ は V_2 の基底になることが分かります．すなわち, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ という基底を用いて,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

というように「番地割り」することにより,

$$V_2 \cong \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

というように, 線型空間 V_2 と数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ を同一視できることが分かります.

(2) 第 6 回の問 3 のところで見たように, 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ に関する線型写像 $T_c : V_2 \to V_2$ の表現行列を求めるためには,

(イ) 基底の元の行き先 $T_c(\mathbf{1}), T_c(\mathbf{x}), T_c(\mathbf{x^2}) \in V_2$ の「番地」を求める.
($\Longrightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{T}_c$ になる.)

(ロ) 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ を用いた「番地割り」$V_2 \cong \mathbb{R}^3$ のもとで,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているときに, $T_c(\mathbf{f}) \in V_2$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

[1] 上のような議論でなくとも, 例えば, $x \in \mathbb{R}$ として, $x = 0,\ 1,\ -1$ などの具体的な数を取ってきて,

$$f(0) = f(1) = f(-1) = 0$$

となることから, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ となることを結論されても構いません.

を用いて表わす.

($\Longrightarrow$ このとき,

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{f}) \ \longleftrightarrow \ \hat{T}_c \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法を考えることができます. 表現行列 $\hat{T}_c$ を求めるためには, どちらの方法を用いても構わないわけですが, 皆さんの参考のために, 以下では, それぞれの方法を用いて表現行列 $\hat{T}_c$ を求めると, どのようなことになるのかということを順番に見てみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. いま, 線型写像 T_c の定義にもとづいて, $T_c(\mathbf{1}), T_c(\mathbf{x}), T_c(\mathbf{x^2}) \in V_2$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned} T_c(\mathbf{1}) &= 1 \\ &= 1\mathbf{1} + 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \qquad (6) \\ T_c(\mathbf{x}) &= x + c \\ &= c\mathbf{1} + 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \qquad (7) \\ T_c(\mathbf{x^2}) &= (x+c)^2 \\ &= c^2\mathbf{1} + 2c\mathbf{x} + 1\mathbf{x^2} \qquad (8) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (6) 式, (7) 式, (8) 式から, これらの元の「番地」は, それぞれ,

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{1}) \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{x}) \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{x^2}) \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} c^2 \\ 2c \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることが分かりますから, 表現行列 $\hat{T}_c$ は,

$$\hat{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているとして, 線型写像 T_c の定義にもとづいて, $T_c(\mathbf{f}) \in V_2$ を求めてみると,

$$\begin{aligned}(T_c\mathbf{f})(x) &= f(x+c) \\ &= a_0 + a_1(x+c) + a_2(x+c)^2 \\ &= (a_0 + ca_1 + c^2a_2)\mathbf{1} + (a_1 + 2ca_2)\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{9}$$

となることが分かります. よって, (9) 式から,

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{f}) \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_0 + ca_1 + c^2a_2 \\ a_1 + 2ca_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応することが分かりますから, 表現行列 $\hat{T}_c$ は,

$$\hat{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.[2]

(3) (2) と同様に, 皆さんの参考のために, 以下では, (イ), (ロ) という二つの方法を用いて, 表現行列 $\hat{D}$ を求めてみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. いま, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{1}), D(\mathbf{x}), D(\mathbf{x^2}) \in V_2$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{1}) &= \frac{d}{dx}(1) \\ &= 0 \\ &= 0\mathbf{1} + 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dx}(x) \\ &= 1 \\ &= 1\mathbf{1} + 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x^2}) &= \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= 2x \end{aligned}$$

[2] もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{T}_c$ と同じものです.

$$= 0\mathbf{1} + 2\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \tag{12}$$

となることが分かります. よって, (10) 式, (11) 式, (12) 式から, これらの元の「番地」は, それぞれ,

$$V_2 \ni D(\mathbf{1}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni D(\mathbf{x}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni D(\mathbf{x^2}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることが分かりますから, 表現行列 $\hat{D}$ は,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているとして, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ を求めてみると,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}) &= \frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \\ &= a_1 + 2a_2 x \\ &= a_1\mathbf{1} + 2a_2\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{13}$$

となることが分かります. よって, (13) 式から,

$$V_2 \ni D(\mathbf{f}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応することが分かりますから, 表現行列 $\hat{D}$ は,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

となることが分かります.[3]

(4) (3) で求めた行列 $\hat{D}$ に対して, $\hat{D}^2, \hat{D}^3$ などを具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\hat{D}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (15) \\
\hat{D}^3 &= \hat{D}^2 \cdot \hat{D} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $k \geq 3$ のとき,

$$\hat{D}^k = 0 \qquad (16)$$

となることが分かります. したがって, (14) 式, (15) 式, (16) 式から,

$$\begin{aligned}
e^{\hat{D}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{D}^k \\
&= I + \hat{D} + \frac{1}{2!} \hat{D}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) (2) で求めた行列 $\hat{T}_c$ のそれぞれの行列成分は c の多項式なので, c について, 零次式の部分, 一次式の部分, 二次式の部分に分けてみると,

$$\hat{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

[3] もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{D}$ と同じものです.

となることが分かります. そこで, (17) 式を (14) 式, (15) 式と見比べてみると,

$$\hat{T}_c = I + c\hat{D} + \frac{c^2}{2}\hat{D}^2 \tag{18}$$

と表わされることが分かります.

もちろん, 解答は (18) 式のままで構わないのですが, (16) 式から, $k \geq 3$ のとき,

$$\hat{D}^k = 0$$

となることに注意すると, (18) 式は,

$$\begin{aligned}\hat{T}_c &= I + c\hat{D} + \frac{c^2}{2}\hat{D}^2 \\ &= I + c\hat{D} + \frac{c^2}{2!}\hat{D}^2 + \frac{c^3}{3!}\hat{D}^3 + \cdots + \frac{c^n}{n!}\hat{D}^n + \cdots \\ &= e^{c\hat{D}}\end{aligned}$$

という形に書き直すこともできます.

2　V_n の場合ではどうなるのか

第 2 回の問 3 のところで触れたように, 多項式関数とは, $\mathbb{R}$ 上の関数の中で, 最も理解しやすい関数であると言えます. 第 2 回の問 3 のところでは, このような分かりやすい多項式関数をもとにして, 一般の滑らかな関数の様子を理解しようとする **Taylor 展開**という考え方について触れました. そこで, 今回は, 再び, 分かりやすい多項式関数をもとにして, **T_c という「平行移動する操作」と D という「微分する操作」との間の関係**について, 皆さんの理解を深めてもらいたいと考えて, 問 1 を出題してみました.

ただし, いきなり, 皆さんに「平行移動」と「微分」の間の関係を見つけて下さいと尋ねたのでは, なかなか「当たり」がつかないかもしれません. そこで, **「平行移動」も「微分」も $\mathbb{R}$ 上の関数の空間には「線型写像」として作用する**ということに注目して, 次数を決めた多項式の空間に作用を制限することで, **「平行移動」と「微分」を, それぞれ同じサイズの行列として表現する**ということを考えました. このように表現すると, 両方とも「行列」という姿になりますから, それらの間の関係も見つけやすいだろうと考えたわけです. 実際, 問 1 の (5) で見たように, 3 行 3 列の行列 $\hat{T}_c$ と $\hat{D}$ との間に,

$$\hat{T}_c = I + c\hat{D} + \frac{c^2}{2}\hat{D}^2 \tag{19}$$

という関係がつきました.

もちろん解答としては, これで構わないのですが, 皆さんの中には「これでは, この式が何を意味しているのか, さっぱり分からん」と思われた方も多いのではないかと思います. そこで, 1 節の議論を注意深く見返してみると, 我々は簡単のために**二次式以下の多項式の集合 V_2 だけを取り上げて考察していた**ということに気が付きます. すなわち, 問 1 で見たことから, 二次式以下の多項式に対しては, (19) 式という関係式が成り立つことが分か

りますが, 三次式以下の多項式に対しても同じ関係式が成り立つのかということや, より一般に, 勝手な次数の多項式に対しても同じ関係式が成り立つのかということ, すなわち, その意味で, (19) 式という関係式は**何か一般的な数学法則を表わしている**のかということは明らかなことではないということに気が付きます.

そこで, もう少し様子を探ってみるために, 三次式以下の多項式の集合 V_3 に対して, 問 1 と同様の考察を行なってみることにします. すると, 問 1 の (1) と同様にして, $\mathbf{f} \in V_3$ を勝手にひとつ取ってきて,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

というように表わすと, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ という V_3 の基底に関して,

$\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ という基底を用いて, $\mathbf{f} \in V_3$ に「番地」を割り振る

$$V_3 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

というように「番地」が割り振れることが分かります. このとき,

$$\begin{aligned} (T_c\mathbf{f})(x) &= f(x+c) \\ &= a_0 + a_1(x+c) + a_2(x+c)^2 + a_3(x+c)^3 \\ &= (a_0 + ca_1 + c^2a_2 + c^3a_3)\mathbf{1} + (a_1 + 2ca_2 + 3c^2a_3)\mathbf{x} \\ &\quad + (a_2 + 3ca_3)\mathbf{x^2} + a_3\mathbf{x^3} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $T_c\mathbf{f} \in V_3$ に対応する「番地」は,

$$V_3 \ni T_c\mathbf{f} \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_0 + ca_1 + c^2a_2 + c^3a_3 \\ a_1 + 2ca_2 + 3c^2a_3 \\ a_2 + 3ca_3 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

という式によって与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ に関する線型写像 T_c の表現行列 $\hat{T}_c$ は,

基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ に関する線型写像 T_c の表現行列 $\hat{T}_c$

$$\hat{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

となることが分かります.

同様に, $D(\mathbf{f}) \in V_3$ を求めてみると,

$$D(\mathbf{f}) = \frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2 \\
&= a_1\mathbf{1} + 2a_2\mathbf{x} + 3a_2\mathbf{x^2} + 0\mathbf{x^3}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, $D(\mathbf{f}) \in V_3$ に対応する「番地」は,

$$
V_3 \ni D(\mathbf{f}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4
$$

という式によって与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$ は,

基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$

$$
\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}
$$

となることが分かります.

そこで, 問 1 と同様に, $\hat{D}$ という行列のベキを計算してみると,

$$
\hat{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}^k = 0, \ (k \geq 4)
$$

となることが分かります. また, (20) 式で与えられる $\hat{T}_c$ という行列を c のベキについて整理して, それぞれの係数をこれらの行列と比べてみると,

線型空間 V_3 における表現行列 $\hat{T}_c$ と $\hat{D}$ の間の関係

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_c &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I + c\hat{D} + \frac{c^2}{2!}\hat{D}^2 + \frac{c^3}{3!}\hat{D}^3
\end{aligned} \tag{22}
$$

となることが分かります. したがって, V_2 の場合とは異なり, 今度は, $\frac{c^3}{3!}\hat{D}^3$ という項まで登場することが分かりました.

こうして, V_3 まで調べてみると, n が一般の場合にはどうなりそうかということが, 皆さんにも, だいたい予想がつくのではないかと思います. 例えば, $\hat{D}$ という行列は, 対角線のひとつ上に, $1, 2, 3, \cdots$ という数字が並びそうなことが予想できます. ただし, このままでは, n が一般の場合に, $\hat{D}^k$ を求めるのは少し面倒臭そうな感じもします. そこで, 次に, **V_3 の基底を取り直すことで, 線型写像 T_c や D をより「見やすい形」の行列で表現することができないか**ということを考えてみます.

上の議論を見直してみると, $\hat{D}$ という行列の行列成分に, $1, 2, 3$ などの数字が現われたのは,

$$\frac{d}{dx}(x) = \underline{\underline{1}} \cdot 1, \quad \frac{d}{dx}(x^2) = \underline{\underline{2}} \cdot x, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = \underline{\underline{3}} \cdot x^2 \tag{23}$$

となるからでした. いま, (23) 式は,

$$\frac{d}{dx}(x) = \underline{\underline{1}} \cdot 1, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) = \underline{\underline{1}} \cdot x, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) = \underline{\underline{1}} \cdot \left(\frac{x^2}{2!}\right)$$

というように書き直すことができますが, このことは, **V_3 の基底として, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x}^3}{\mathbf{3!}}\}$ という基底を取れば, 線型写像 D の表現行列がより「見やすい形」になる**ということを意味しています.

そこで, V_3 の基底を, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x}^3}{\mathbf{3!}}\}$ に取り直して, この基底に関して, もう一度, 表現行列を求めてみることにします. すると, 今度は, $\mathbf{f} \in V_3$ に対して,

$\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}}\}$ という基底を用いて, $\mathbf{f} \in V_3$ に「番地」を割り振る

$$V_3 \ni \mathbf{f} = b_0\mathbf{1} + b_1\mathbf{x} + b_2\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}} + b_3\frac{\mathbf{x}^3}{\mathbf{3!}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

というように「番地」が割り振られることになります. このとき,

$$\begin{aligned}
(T_c\mathbf{f})(x) &= f(x+c) \\
&= b_0 + b_1(x+c) + \frac{b_2}{2!}(x+c)^2 + \frac{b_3}{3!}(x+c)^3 \\
&= \left(b_0 + cb_1 + \frac{c^2}{2!}b_2 + \frac{c^3}{3!}b_3\right)\mathbf{1} + \left(b_1 + cb_2 + \frac{c^2}{2!}b_3\right)\mathbf{x} + (b_2 + cb_3)\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}} + b_3\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $T_c\mathbf{f} \in V_3$ に対応する「番地」は,

$$V_3 \ni T_c\mathbf{f} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 + cb_1 + \frac{c^2}{2!}b_2 + \frac{c^3}{3!}b_3 \\ b_1 + cb_2 + \frac{c^2}{2!}b_3 \\ b_2 + cb_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c & \frac{c^2}{2!} & \frac{c^3}{3!} \\ 0 & 1 & c & \frac{c^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

という式によって与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x}^3}{\mathbf{3!}}\}$ に関する線型写像 T_c の表現行列 $\check{T}_c$ は,

基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}}\}$ に関する線型写像 T_c の表現行列 $\check{T}_c$

$$\check{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & \frac{c^2}{2!} & \frac{c^3}{3!} \\ 0 & 1 & c & \frac{c^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

となることが分かります.

同様に, $D(\mathbf{f}) \in V_3$ を求めてみると,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}) &= \frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + b_3 \frac{x^3}{3!}\right) \\ &= b_1 + b_2 x + b_3 \frac{x^2}{2!} \\ &= b_1 \mathbf{1} + b_2 \mathbf{x} + b_3 \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}} + 0 \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $D(\mathbf{f}) \in V_3$ に対応する「番地」は,

$$V_3 \ni D\mathbf{f} \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

という式によって与えられることが分かります. したがって, 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x}^3}{\mathbf{3!}}\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ は,

基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}}\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$

$$\check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

となることが分かりました.

そこで, 前と同様に, 行列 $\check{D}$ のベキを計算してみると,

$$\check{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{D}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{D}^k = 0, \ (k \geq 4)$$

となることが分かります. また, 行列 $\check{T}_c$ を c のベキについて整理してみると,

線型空間 V_3 における表現行列 $\check{T}_c$ と $\check{D}$ の間の関係

$$\check{T}_c = I + c\check{D} + \frac{c^2}{2}\check{D}^2 + \frac{c^3}{3!}\check{D}^3 \tag{26}$$

となることが分かります. この (26) 式は, もちろん, 前に求めた (22) 式と対応している

わけですが, **(20) 式, (21) 式で与えられる $\hat{T}_c, \hat{D}$ という行列より, (24) 式, (25) 式で与えられる $\check{T}_c, \check{D}$ という行列の方が, n を一般にしたときのパターンや二つの行列の間の関係がより「見やすい形」で表現されている**ということに注意して下さい. このように, 線型写像の性質を調べるときには, **表現行列がなるべく「見やすい形」になるような「番地割り」を選ぶことにより, 状況がより良く理解できるようになる**ことが多いです.

ここまで調べてみると, 皆さんにも予想がつくと思いますが, 一般の n の場合に同様の考察を行なうと, V_n の基底として, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \cdots, \frac{\mathbf{x}^n}{\mathbf{n!}}\}$ を取ることで, 線型写像 T_c, D は, それぞれ,

基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \cdots, \frac{\mathbf{x}^n}{\mathbf{n!}}\}$ に関する線型写像 T_c, D の表現行列 $\check{T}_c, \check{D}$

$$\check{T}_c = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & c & \frac{c^2}{2!} & \cdots & \frac{c^n}{n!} \\ 0 & 1 & c & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{c^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(n+1)\text{ コ}}, \quad \check{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(n+1)\text{ コ}}$$

という形の $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列の行列で表現されることが分かります.[4] したがって, この場合には,

線型空間 V_n における表現行列 $\check{T}_c$ と $\check{D}$ の間の関係

$$\check{T}_c = I + c\check{D} + \frac{c^2}{2}\check{D}^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!}\check{D}^n \tag{27}$$

という関係式が成り立つことが分かります.

問 1 の (5) で見たように, V_2 の場合には,

$$\check{T}_c = I + c\check{D} + \frac{c^2}{2}\check{D}^2$$

というように, $\check{D}$ に関して二次式のところで終わりましたが, これは, **V_2 上では $D^3 = 0$ である**ということ, すなわち, **二次式以下の多項式は三回以上微分すると 0 になってしまう**という特殊事情があったからだということが分かります. この特殊事情は, それぞれの V_n についても全く同じですから, $\check{T}_c$ と $\check{D}$ の間の関係を, **すべての多項式で通用する形**で表現しようと思えば, (27) 式において, $n \to \infty$ として,

$$\begin{aligned} \check{T}_c &= I + c\check{D} + \frac{c^2}{2!}\check{D}^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!}\check{D}^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(c\check{D})^n \\ &= e^{c\check{D}} \end{aligned}$$

[4] 皆さん, 確かめてみて下さい.

というような関係があるとするのが, より自然であることが分かります. すなわち, $\boldsymbol{\check{T}_c}$ **と** $\boldsymbol{\check{D}}$ **の間には,**

すべての線型空間 V_n に対して成り立つ表現行列 $\check{T}_c$ と $\check{D}$ の間の関係式

$$\boldsymbol{\check{T}_c = e^{c\check{D}}} \tag{28}$$

という関係があるということが分かりました.

3 「微分」と「平行移動」の関係について

さて, 第 7 回の問 1 のところで注意したように, 表現行列における「和」や「積」は, 線型写像における「和」や「積」と対応していますから,[5] 2 節の (28) 式という関係式は, 線型写像 T_c と D の間に,

平行移動 T_c と微分 D の間の関係

$$\begin{aligned} T_c &= e^{cD} \\ &= e^{c\frac{d}{dx}} \end{aligned} \tag{29}$$

という関係があるということを表わしています. そこで, (29) 式の意味をもう少しきちんと理解するために, ここで, もう一度, 2 節で行なった議論を見返してみることにします.

我々は, まず, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 次式以下の多項式全体の集合 V_n を考えて, 線型写像 T_c, D を「見やすい形」で表現するような線型空間 V_n の「上手い基底」

$$\left\{ \mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{2!}}, \cdots, \frac{\mathbf{x}^n}{\mathbf{n!}} \right\}$$

を選び, こうした「上手い基底」に関する線型写像 T_c, D の表現行列 $\check{T}_c, \check{D}$ を求めることで, これらの表現行列の間に (27) 式のような関係があることを見つけました. このとき, (27) 式の意味していることは, $\boldsymbol{V_n}$ **から** $\boldsymbol{V_n}$ **への線型写像として,**

$$\boldsymbol{T_c = \mathrm{id}_{V_n} + cD + \frac{c^2}{2}D^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!}D^n : V_n \to V_n} \tag{30}$$

という式が成り立つということでした.[6] したがって, いま, $\mathbb{R}$ 上の (実数係数の) 多項式関数全体の集合を,

$\mathbb{R}$ 上の (実数係数の) 多項式関数全体の集合

$$\begin{aligned} V &= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ は多項式関数 } \} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \end{aligned}$$

---

[5] ここで, 線型写像における「積」とは「合成写像」のことです.

[6] ここで, $f \in V_n$ に対して, f 自身を対応させる恒等写像 (identity mapping) を $\mathrm{id}_{V_n} : V_n \to V_n$ と表わしました.

というように表わすことにすると, (29) 式が意味していることは, **線型空間 $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への線型写像として,**

(29) 式の意味

$$\boldsymbol{T_c = e^{cD} = e^{c\frac{d}{dx}} : V \to V} \tag{31}$$

という式が成り立つということであることが分かります.

一般に, **写像が等しい**ということは, たとえ, どんなに見かけが違っていたとしても, **集合の元の対応のさせ方が等しい**ということですから, (31) 式の意味していることは, 勝手な多項式 $\mathbf{f} \in V$ に対して,

(31) 式の意味

$$T_c(\mathbf{f}) = e^{c\frac{d}{dx}}(\mathbf{f}) \tag{32}$$

という式が成り立つということに他なりません. すると, (32) 式自体が, 関数の間の等式になりますから, その意味するところは, それぞれの実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (32) 式の左辺と右辺に現われる関数の値が等しいということになります. そこで, V 上の恒等写像を id_V と表わすことにして, これらの値を具体的に求めてみると,

$$\begin{aligned}
\{T_c(f)\}(x) &= f(x+c) \\
\{e^{c\frac{d}{dx}}f\}(x) &= \left\{\left(\mathrm{id}_V + c\frac{d}{dx} + \frac{c^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \cdots + \frac{c^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} + \cdots\right)f\right\}(x) \\
&= \left\{f + c\frac{df}{dx} + \frac{c^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2} + \cdots + \frac{c^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n} + \cdots\right\}(x) \\
&= f(x) + c\frac{df}{dx}(x) + \frac{c^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \cdots + \frac{c^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(x) + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, (32) 式の意味するところは, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

(32) 式の意味

$$f(x+c) = f(x) + c\frac{df}{dx}(x) + \frac{c^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \cdots + \frac{c^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(x) + \cdots \tag{33}$$

という式が成り立つということであることが分かります.

これで, だいぶハッキリとしてきましたが, まだ少し見にくいと思われる方もいるかもしれませんから, x や c は実数であれば何でもよかったということに注意して,

$$x \rightsquigarrow a, \quad c \rightsquigarrow x-a$$

などというように文字を書き直してみると, 結局,

(33) 式の書き直し

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{34}$$

という関係式が得られることが分かります. 皆さん良くご存じのように, これは, **「$\boldsymbol{x = a}$**

のまわりでの関数 $f(x)$ の Taylor 展開」を表わす式に他なりません．こうして, 線型代数学の立場から, Taylor 展開を再発見することができました．**「微分」とは「無限小の平行移動に対する変化率」である**ということは, 皆さんも良くご存じのことだと思いますが, 逆に,**「有限の平行移動」とは「e の肩に乗るくらい一生懸命微分を繰り返すこと」である**ということを, (29) 式は意味しています．**こうした「微分」と「平行移動」の関係の表われとして, Taylor 展開というものが解釈できる**ということが分かりました．

ここで, 注意しないといけないことは, 上の議論で得られた結論は,**「多項式関数に対して Taylor 展開が成り立つ」**ということであって,**「$\mathbb{R}$ 上の勝手な滑らかな関数に対して何かを示した」**というわけではないということです．それでは「仕様もない」かと言うと, そうではなくて, 上のような具体的な関係式が得られると,「より一般の関数に対しても同様の関係式が成り立つのか」とか,「もし成り立たないとしたらどういう形に修正すればよいのか」などというように, 対象とする関数の範囲を広げて, さらに考察を進めることができるようになります．

そこで, 多項式関数について得られた結果を睨みつつ, 滑らかな関数に対しても同じようなことが言えるのではないかと「当たり」を付けながら考察を進めると, **一般の滑らかな関数に対しては, Taylor 展開は (34) 式のような形では成り立たなくて,**

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x;a)}$$

というように, 右辺も有限和にして, その代わりに剰余項 $R_n(x;a)$ をつけて表わす方が良いということが分かったりします．また, 滑らかな関数の中には, 三角関数や指数関数のように, (34) 式のような形での Taylor 展開が成り立つものも存在して,[7] **こうした (解析) 関数に対しては, (34) 式の右辺の表示を通して, 複素数や行列など,「足し算」や「掛け算」のできる「数」であれば, 変数 x のところに何でも代入して考えてみることができる**という利点があることも分かります．こうして, 関数というものに対する理解がどんどん深まってゆくことになります．

実際, 第 2 回の問 4 のところで見たように, 指数関数や三角関数に複素数を代入することを許して考察してみると, これらの関数は「本質的に同じ関数」であるということが分かったりします．また, 第 7 回の問 1 のところで見たように, 指数関数に行列を代入することを許して考察してみると, 定数係数の線型常微分方程式に対する理解が深まったりします．第 2 回の最後でも注意しましたが, 最近では, 変数 x のところに「空間」を代入して考察してみることにも大きな意味があるのではないかと考える「ちょっと危ない人たち」も増えつつあります．

4　線型空間の異なる基底はどれだけ存在するのか

さて, 2 節では, T_c という「平行移動する操作」と D という「微分する操作」の間の関係を求めるために, n 次式以下の多項式全体の集合 V_n の基底を $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^n\}$ から

[7] こうした関数を**解析関数**と呼びます．

$\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}}, \cdots, \frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n!}}\}$ に取り替えて考察を進めるということをしました. そこで, ここでは, 一般に, **線型空間 V に対して, V の異なる基底はどれだけ存在するのか**ということを考えてみることにします. 一般の (有限次元の) 線型空間の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では, V は $\mathbb{R}$ 上の線型空間であるとして,[8]

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2$$

という場合に説明することにします.

そこで, いま, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$V \in \mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{35}$$

というように, **V に「番地割り」をして考えてみる**ことにします. ただし, 毎回, (35) 式のように書くのは大変ですから, 行列の掛け算を用いて, V の元 $\mathbf{u} \in V$ を,

「番地割りの基準」と「番地」を同時に表わす便利な記法

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

というように表わすことにします. 以下で見るように, (36) 式のような記法を用いると, **どのような「番地割りの基準」のもとで, どのような「番地」を持つ元を考えているのかという二つの情報を同時にハッキリと表わすことができる**ので,「番地割り」を取り替えて議論をするようなときにはとても便利です.

そこで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ を, 勝手に二つ取ってきて,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

というように表わすことにします. このとき, (37) 式, (38) 式は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{39}$$

というように, ひとつの式にまとめて表わせるということに注意して,[9]

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[8] すなわち,「スカラー倍」=「$\mathbb{R}$ 倍」ということです.

[9] すなわち, (39) 式の両辺に現われる行列の 1 行 1 列目の成分を比べたものが (37) 式であり, 1 行 2 列目の成分を比べたものが (38) 式であるというわけです.

として, (39) 式を,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P \tag{40}$$

というように表わすことにします.[10]

そこで, **$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底となるための条件を, 行列 P の言葉を用いて表わす**ことを考えてみます. そのために, まず, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ も V の基底になったと仮定してみます. すると, このとき, 基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いて, V に「番地割り」をすることができますから, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ として, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ を,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \alpha\mathbf{f}_1 + \gamma\mathbf{f}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \beta\mathbf{f}_1 + \delta\mathbf{f}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります. すなわち,

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

として,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} Q \tag{41}$$

というように表わせることが分かります.[11]

そこで, いま, (41) 式に (40) 式を代入してみます. すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} PQ \qquad (\ (40) \text{ 式から}\ ) \end{aligned} \tag{42}$$

となることが分かりますから, (42) 式から,

$$PQ = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

として,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} \tag{43}$$

と表わせることが分かります. ここで, (43) 式は, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ に,

$$V \in \mathbf{e}_1 \ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

[10]すわなち, P は $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

[11]すわなち, Q は $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

$$V \in \mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」が割り振られることを意味していますが, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底のもとで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ に割り振られる「番地」は,

$$V \in \mathbf{e}_1 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$
$$V \in \mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

しか存在しませんから,

$$\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.[12] よって,

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned} \tag{44}$$

となることが分かります.

全く同様に, (40) 式に (41) 式を代入してみると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} QP \qquad \text{((41) 式から)} \end{aligned} \tag{45}$$

となることが分かりますが, 上と同様に考えると, (45) 式から,

$$QP = I \tag{46}$$

となることが分かります. したがって, (44) 式, (46) 式から,

$$PQ = QP = I$$

[12] あるいは, 本質的に同じことですが, (43) 式を,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = a'\mathbf{e}_1 + c'\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 = b'\mathbf{e}_1 + d'\mathbf{e}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{0} = (a'-1)\mathbf{e}_1 + c'\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} = b'\mathbf{e}_1 + (d'-1)\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

というように書き直した上で, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が線型独立となることから,

$$a' = d' = 1, \ b' = c' = 0$$

となることを結論することもできます.

となることが分かりますから, 行列 P は正則行列でなければならないことが分かります.

以上から, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底となるためには, (40) 式の右辺に現われる行列 P は正則行列でなければならないことが分かりました.

そこで, 次に, 行列 P が正則行列であると仮定してみます. このとき, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底となることが, 次のようにして分かります. そのためには,

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底となる条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 \tag{47}$$

となるような実数 $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 \implies b_1 = b_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{u} \in V$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. このとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は V の基底ですから,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{48}$$

となるような実数 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ が存在することが分かります. 一方, P が正則行列であることに注意して, (40) 式の両辺に右から P^{-1} を掛け算してみると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} PP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{49}$$

となることが分かります. よって, (48) 式に (49) 式を代入することで,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} && (\text{ (49) 式から }) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

として, (47) 式が成り立つことが分かります. したがって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. そこで, いま, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

であると仮定してみます. このとき, (40) 式を (50) 式に代入してみると,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (\text{ (40) 式から }) \end{aligned} \tag{51}$$

となることが分かります. ここで, (51) 式は, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで,

$$V \ni \mathbf{0} \;\longleftrightarrow\; P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地」が割り振られることを意味していますが, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底のもとで, $\mathbf{0} \in V$ に割り振られる「番地」は,

$$V \ni \mathbf{0} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

しか存在しませんから,

$$P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

となることが分かります. よって, (52) 式の両辺に左から P^{-1} を掛け算することで,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ は V の基底となることが分かります.

以上の議論をまとめると, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ を,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P$$

というように表わすとき,

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ が V の基底になるための条件

$$\begin{aligned}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} \text{ が } V \text{ の基底になる.} \quad &\iff \quad P \text{ は正則行列.} \\ &\iff \quad \det P \neq 0\end{aligned}$$

となることが分かりました. 全く同様に, 一般に,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n$$

として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ を,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P$$

というように表わすとき,[13]

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ が V の基底になるための条件

$$\begin{aligned}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \text{ が } V \text{ の基底になる.} \quad &\iff \quad P \text{ は正則行列.} \\ &\iff \quad \det P \neq 0 \qquad (53)\end{aligned}$$

となることが分かります.

いま, V の基底全体の集合を,

線型空間 V の基底全体の集合

$$\mathcal{B}_V = \{\, \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \mid \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \text{ は } V \text{ の基底 } \}$$

という記号を用いて表わし,[14] 実数を成分に持つ n 行 n 列の正則行列全体の集合を,

実数を成分に持つ n 行 n 列の正則行列全体の集合

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \left\{ P = \left(p_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,n}} \;\middle|\; p_{ij} \in \mathbb{R},\ \det P \neq 0 \right\}$$

という記号を用いて表わすことにします.[15] また, **$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{B}_V$ という V の基底を「基点」として勝手にひとつ選んだ**上で, n 行 n 列の正則行列 $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P$$

という式によって, V の元 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ を定めることにします. すると, (53) 式から,

---

[13]すわなち, P は $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

[14]基底のことを, 英語で basis と言います.

[15]数学では, 掛け算ができ, それぞれの元に対して, 掛け算の逆元がその集合の中に存在するような集合を**群**と呼びます. 正則行列全体の集合は, このような群の代表例で, **一般線型群** (genaral linear group) と呼ばれます. また, 行列式が 1 となる行列全体の集合も掛け算や逆元を取る操作で閉じた集合になるので, やはり群になりますが, こちらは「行列式が 1 」という条件が付いているので, **特殊線型群** (special linear group) と呼ばれ, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ などと表わされます.

n 次元の線型空間 V の基底と n 行 n 列の正則行列の間の対応

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_V} \ni \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\} \longleftrightarrow \boldsymbol{P} \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$$

という対応により,

線型空間 V の基底全体の集合は正則行列全体の集合と同一視できる

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_V} \cong \mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R}) \tag{54}$$

というように同一視できることが分かります.

この同一視を考えるためには, 最初にひとつ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{B}_V$ という基底を選ばなければなりませんが, **この最初の「基点」を取り替えると, (54) 式の同一視の仕方も変わってしまう**ことに注意して下さい. その意味で, 上の同一視も,

線型空間 V の基底全体の集合と正則行列全体の集合の同一視 (より正確な形)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} \cdot \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ &\cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

というように表わすことにすると, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ のそれぞれの元に対して, $\mathcal{B}_V$ のどのような元を対応させて同一視を行なっているのかという「感じ」が, より良く表現できることになります.[16]

さて, 上で行った議論と第 3 回の問 2 のところで行った逆行列に関する注意を合わせると, 与えられた (有限次元の) 線型空間 V に対して, V の基底の元の個数[17]は基底の取り方に依らないということを確かめることができますので, ここで, この点についても確かめておくことにします.

そこで, いま, $m, n \in \mathbb{N}$ として, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ も $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ も V の基底であると仮定してみます. すると, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ は V の基底ですから, 適当な m 行 n 列の行列 P を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} P \tag{55}$$

というように表せることが分かります.[18] 全く同様にして, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ も V の基底ですから, 適当な n 行 m 列の行列 Q を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} Q \tag{56}$$

---

[16] このことは, 第 5 回の問 3 のところで, $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ という連立一次方程式の解全体の集合 $\mathscr{S}$ の構造について考察したときに, 特殊解 $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{S}$ を勝手にひとつ選ぶことで, 解全体の集合 $\mathscr{S}$ が, 線型部分空間 $\mathrm{Ker}\, A$ を用いて,

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \mathbf{u}_0 + \mathrm{Ker}\, A \\ &\cong \mathrm{Ker}\, A \end{aligned}$$

というように同一視できたことと似ています.

[17] この個数が線型空間 V の次元 $\dim V$ でした.

[18] すわなち, P は $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

というように表せることが分かります.[19] そこで, (56) 式に (55) 式を代入してみると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m\end{pmatrix} PQ \qquad (\ (55)\ \text{式から}\ ) \end{aligned} \tag{57}$$

となることが分かりますが, 前と同様に考えると, (57) 式から,

$$PQ = I_m \tag{58}$$

となることが分かります.[20] 全く同様に, (55) 式に (56) 式を代入してみると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m\end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix} QP \qquad (\ (56)\ \text{式から}\ ) \end{aligned} \tag{59}$$

となることが分かりますから, (59) 式から,

$$QP = I_n \tag{60}$$

となることが分かります. すると, 第 3 回の問 2 のところで見たように, (58) 式と (60) 式を同時に満たすような行列 P, Q が存在するためには, $m = n$ でなければならないことが分かりますから,[21] 結局, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ と $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ がどちらも線型空間 V の基底であると仮定すると, $m = n$ でなければならないことが分かります. すなわち, **線型空間 V の基底の元の個数は基底の取り方に依らない**ことが分かります.

5 表現行列の変換公式について

さて, 2 節では, V_3 の基底を $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ から $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2!}}, \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}}\}$ に取り替えたときに, 線型写像 $T_c : V_3 \to V_3$ や $D : V_3 \to V_3$ の表現行列が, それぞれ,

$$\hat{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \check{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & c & \frac{c^2}{2!} & \frac{c^3}{3!} \\ 0 & 1 & c & \frac{c^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[19] すわなち, Q は $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ という基底を用いた「番地割り」のもとで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m \in V$ に割り振られる「番地」を並べてできる行列です.

[20] ここで, **どのようなサイズの単位行列を考えているのか**ということが分かりやすいように, m 行 m 列の単位行列を I_m と表わすことにしました.

[21] このことは, 例えば, トレースという概念に注目すると, $\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP)$ となることから,

$$m = \mathrm{tr}(I_m) = \mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP) = \mathrm{tr}(I_n) = n$$

というように確かめることができるのでした. 詳しいことについては, 第 3 回の解説を参照して下さい.

というように姿を変えることを見ました.

そこで, ここでは, より一般に, V, W を二つの線型空間として,

$$f : V \to W$$

という線型写像が与えられているときに, **線型空間 V, W の基底を取り替えて, それぞれの線型空間の「番地割り」の仕方を変えたときに, 線型写像 f の表現行列がどのように姿を変えるのか**ということを考えてみることにします. 一般の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, 話を具体的にするために, 以下では,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2, \quad \dim_{\mathbb{R}} W = 3$$

という場合に説明することにします.

いま, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて, これらの基底に関する線型写像 $f : V \to W$ の表現行列を A と表わすことにします. そこで, さらに, V と W の基底を,

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} \\ \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3\} \end{array}$$

というように取り替えたとして, これらの新しい基底に関する線型写像 $f : V \to W$ の表現行列を A' と表わすことにします. 4 節で見たように, もともとの基底と新しく取り直した基底の間の関係は, 適当な正則行列 $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, $Q \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P \tag{61}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} Q \tag{62}$$

というように表わすことができます.[22] そこで,**「新番地割り」のもとでの表現行列 A' を,「旧番地割り」のもとでの表現行列 A と「基底変換の行列」P, Q を用いて表わす**ことを考えてみます.[23]

さて, 第 6 回の問 3 のところで見たように, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する線型写像 $f : V \to W$ の表現行列 A を求めるには,

[22]すなわち, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ という基底を用いた V の「旧番地割り」のもとで, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \in V$ に割り振られる「旧番地」を並べてできる行列が P で, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ という基底を用いた W の「旧番地割り」のもとで, $\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3 \in W$ に割り振られる「旧番地」を並べてできる行列が Q です.

[23]以下の議論の内容がよりハッキリするように, もともとの基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ や $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する「番地」を「旧番地」と呼び, 新しく取り直した基底 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ や $\{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3\}$ に関する「番地」を「新番地」と呼ぶことにしました.

線型写像 $f : V \to W$ の表現行列 A を求める二つの方法

(イ) V の基底の元の行き先 $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ の「番地」を求める.
($\Longrightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 A になる.)

(ロ) 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いた「番地割り」$V \cong \mathbb{R}^2$ のもとで,

$$V \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と対応しているときに, $f(\mathbf{u}) \in W$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.
($\Longrightarrow$ このとき,

$$W \ni f(\mathbf{u}) \quad \longleftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法を考えることができます.「表現行列の変換公式」を導くためには, どちらの方法にもとづいて議論しても構わないわけですが, 皆さんの参考のために, 以下では, それぞれの方法にもとづいて議論すると, どのようなことになるのかということを, 順番に見てみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて議論してみることにします. いま, W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を用いた「旧番地割り」のもとで, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ に割り振られる「旧番地」を,

$$W \in f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + a_{31}\mathbf{f}_3 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$W \in f(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + a_{32}\mathbf{f}_3 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

というように表わすことにします. すると,「旧番地割り」のもとでの表現行列 A とは, これらの「旧番地」を並べてできる行列のことですから,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{63}$$

というように表わせることが分かります. ここで, 4 節と同様に, 行列の積を用いて,

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

というように表わすことにすると, これら二つの式は,

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{64}$$

というようにひとつの式にまとめて表わすことができます. したがって, (63) 式, (64) 式から,「旧番地割り」のもとでの表現行列とは,

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} A \tag{65}$$

となるような 3 行 2 列の行列 A のことであると考えることができます. 全く同様に,「新番地割り」のもとでの表現行列とは,

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}'_1) & f(\mathbf{e}'_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} A' \tag{66}$$

となるような 3 行 2 列の行列 A' のことであると考えることができます. したがって, 問題は**「(61) 式, (62) 式, (65) 式から, (66) 式が成り立つような 3 行 2 列の行列 A' を求めよ」**ということになります.[24]

そこで, まず, (61) 式における $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ を $f(\mathbf{e}'_1), f(\mathbf{e}'_2)$ に「化かす」ことを考えてみます. いま,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表わすことにすると, (61) 式から,

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \end{cases} \tag{67}$$

となることが分かります. そこで, (67) 式の両辺に線型写像 f を施してみると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}'_1) &= f(a\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2) \\ &= af(\mathbf{e}_1) + cf(\mathbf{e}_2) \\ f(\mathbf{e}'_2) &= f(b\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \\ &= bf(\mathbf{e}_1) + df(\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}'_1) = af(\mathbf{e}_1) + cf(\mathbf{e}_2) \\ f(\mathbf{e}'_2) = bf(\mathbf{e}_1) + df(\mathbf{e}_2) \end{cases} \tag{68}$$

[24] 平たく言えば,「(61) 式, (62) 式, (65) 式から, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ と $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ を消去して, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ と $\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3$ の間の関係式を導きなさい」ということです.

となることが分かります. よって, (68) 式を, 再び, 行列の積を用いて表わすことで,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}'_1) & f(\mathbf{e}'_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} P \end{aligned} \tag{69}$$

となることが分かります.

こうして, (61) 式における $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ を $f(\mathbf{e}'_1), f(\mathbf{e}'_2)$ に「化かす」ことができましたから, 後は, (62) 式, (65) 式, (69) 式から, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ と $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ を消去すればよいということになります. いま, (69) 式に (65) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}'_1) & f(\mathbf{e}'_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} AP \end{aligned} \tag{70}$$

となることが分かります. また, Q は正則行列であることに注意して, (62) 式の両辺に右から Q^{-1} を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} QQ^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{71}$$

となることが分かります. よって, (71) 式を (70) 式に代入することで,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}'_1) & f(\mathbf{e}'_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} AP \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} Q^{-1}AP \end{aligned} \tag{72}$$

となることが分かります. したがって, (66) 式, (72) 式から,

$$A' = Q^{-1}AP \tag{73}$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて議論してみることにします. そこで, まず, V の元 $\mathbf{u} \in V$ に割り振られる「旧番地」と「新番地」の間の関係について考えてみます. いま, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いた「旧番地割り」のもとで, $\mathbf{u}$ に割り振られる「旧番地」を,

$$V \in \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^2)_{\text{旧}}$$

というように表わすことにします.[25] このとき, $\mathbf{u} \in V$ は, 行列の積を用いて,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \tag{74}$$

というように表わすことができます. また, 前と同様に, P は正則行列であることに注意して, (61) 式の両辺に右から P^{-1} を掛け算してみると,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{75}$$

となることが分かります. よって, (75) 式を (74) 式に代入することで,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \end{aligned} \tag{76}$$

となることが分かります. 一方, $\mathbf{u} \in V$ の「新番地」を,

$$V \in \mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^2)_{\text{新}}$$

というように表わすことにすると, $\mathbf{u} \in V$ は, 行列の積を用いて,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \tag{77}$$

というように表わすことができます. そこで, (76) 式と (77) 式を見比べてみると,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \tag{78}$$

となることが分かります. また, (78) 式の両辺に左から P を掛け算することで,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \tag{79}$$

となることも分かります.

以上から, もともとの基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と新しく取り替えた基底 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ の間に,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P, \qquad P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

という関係があるときに, V の元 $\mathbf{u} \in V$ に割り振られる「旧番地」と「新番地」の間には,

[25] 以下の議論の内容がよりハッキリするように, もともとの基底に関する「旧番地」や「旧番地全体の集合」を「$(\cdot)_{\text{旧}}$」という添え字を付けて表わし, 新しく取り替えた基底に関する「新番地」や「新番地全体の集合」を「$(\cdot)_{\text{新}}$」という添え字を付けて表わすことにしました.

「旧番地」と「新番地」の間の変換公式

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\text{新}} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \tag{80}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\text{新}} \tag{81}$$

という関係があることが分かりました.

そこで, 上の「「旧番地」と「新番地」の間の変換公式」を用いて,「新番地割り」のもとでの表現行列 A' が,「旧番地割り」のもとでの表現行列 A と基底変換の行列 P, Q を用いて, どのように表わせるのかということを考えてみます. いま,「新番地割り」のもとで,

$$V \ni \mathbf{u} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^2)_{\text{新}}$$

というように対応しているとします. すると, (81) 式から, $\mathbf{u} \in V$ に対応する「旧番地」は,

$$V \ni \mathbf{u} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^2)_{\text{旧}} \tag{82}$$

となることが分かります. ここで, $f(\mathbf{u}) \in W$ に対応する「旧番地」を,

$$W \ni f(\mathbf{u}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^3)_{\text{旧}}$$

と表わすことにすると, 表現行列の定義から,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \tag{83}$$

となることが分かります. よって, (82) 式を (83) 式に代入することで,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = AP \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\text{新}} \tag{84}$$

となることが分かります. さらに, 線型空間 W に対して, (80) 式の変換公式を適用すると, $f(\mathbf{u}) \in W$ に対応する「旧番地」と「新番地」の間には,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}_{\text{新}} = Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\text{旧}} \tag{85}$$

という関係があることが分かります．よって, (84) 式を (85) 式に代入することで, $f(\mathbf{u}) \in W$ に対応する「新番地」は,

$$W \ni f(\mathbf{u}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}_{\text{新}} = Q^{-1}AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^3)_{\text{新}} \tag{86}$$

というように与えられることが分かります．したがって, (86) 式から,「新番地割り」のもとでの表現行列 A' は,

$$A' = Q^{-1}AP \tag{87}$$

となることが分かります．

上の議論を図で表わすと, $\mathbf{u} \in V$ の「新番地」

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^3)_{\text{新}}$$

の行き先を,

$\mathbf{u} \in V$ の「新番地」の行き先を二通りに辿ってみる

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \arrow[rrr, mapsto] & & & A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{旧}} = AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \arrow[dddd, mapsto] \\
& (\mathbb{R}^2)_{\text{旧}} \arrow[ul, phantom, "\in"] \arrow[r, "A"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & (\mathbb{R}^3)_{\text{旧}} \arrow[ur, phantom, "\ni"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & W \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \\
& (\mathbb{R}^2)_{\text{新}} \arrow[r, "A'"] \arrow[dl, phantom, "\in"] & (\mathbb{R}^3)_{\text{新}} \arrow[dr, phantom, "\ni"] & \\
\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[uuuu, mapsto] & & & A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}} = Q^{-1}AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}_{\text{新}}
\end{tikzcd}$$

というように, 二通りに辿ることにより, (87) 式の変換公式を導いたということになります．

以上の議論をまとめると, (イ), (ロ) という二つの方法のうち, いずれの方法にもとづいて議論したとしても, (73) 式, あるいは, (87) 式から,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P, \qquad P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \mathbf{f}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} Q, \qquad Q \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$$

という式により, V や W の基底を,

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \quad \rightsquigarrow \quad \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$$
$$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} \quad \rightsquigarrow \quad \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}'_3\}$$

というように取り替えると, 線型写像 $f : V \to W$ の表現行列は,

$$A \rightsquigarrow A' = Q^{-1}AP$$

というように姿を変えることが分かりました.

より一般に,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

として,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} P, \qquad P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}'_1 & \mathbf{f}'_2 & \cdots & \mathbf{f}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_m \end{pmatrix} Q, \qquad Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

という式により, V や W の基底を,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} &\rightsquigarrow \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n\} \\ \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\} &\rightsquigarrow \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \cdots, \mathbf{f}'_m\} \end{aligned}$$

というように取り替えると, 線型写像 $f : V \to W$ の表現行列は,

表現行列の変換公式

$$A \rightsquigarrow A' = Q^{-1}AP \tag{88}$$

というように姿を変えることが分かります.

6　行列の標準形の問題について

さて, 5 節では, V, W を線型空間として, $f : V \to W$ を線型写像とするときに, V や W の基底を取り替えて, それぞれの線型空間の「番地割り」の仕方を変えたときに, 線型写像 f の表現行列が,

$$A \rightsquigarrow A' = Q^{-1}AP$$

というように姿を変えることを見ました. このことは, **正則行列 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{m}, \mathbb{R})$ を用いて,**

$$\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$$

という関係にあるような m 行 n 列の行列 A と A' は「本質的に同じ行列」であるということを意味しています. すなわち, **これらの行列は, いずれも, $\boldsymbol{f : V \to W}$ という「同じ線型写像」を表わしており, 行列としての姿が違って見えるのは, 単に「異なる視点」から眺めているからに過ぎない**のだと考えることができます.

そこで, 行列 A が, 勝手にひとつ与えられているとして, **「最初に与えられた姿」A には惑わされずに, $\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$ が「見やすい形」になるような視点から眺めることにより, もともとの行列 A の性質もより良く理解できるのではないか**ということが考えられました. 人間の社会でも, 人を第一印象だけで判断すると, その人のことを大きく誤解してしまうことがありますが, 行列の社会でも, A さんのことを「第一印象」だけで判断せず

に, A さんが本当はどのような人なのかということを一番良く分かっている人の視点から眺めてみることで, A さんのことがより良く理解できるのではないかと考えてみるというわけです.

そこで, 与えられた行列 A に対して, A が「見やすい形」になるような視点を見つけることが問題になりますが, このような視点を見つける問題を, 一般に, **「行列の標準形の問題」**と言います. これを数学的に表現すれば,

行列の標準形の問題

与えられた行列 A に対して,

$$Q^{-1}AP = \Lambda \tag{89}$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P, Q を見つけよ.

ということになります. ただし, より正確には, 問題としている状況に応じて,

「行列の標準形の問題」の二通りの解釈

(i) P と Q が独立に取れる場合.

(ii) $P = Q$ と取らなければいけない場合.

というように,「行列の標準形の問題」を二通りに解釈することができます. 例えば, A が正方行列ではなく, 最初から, $P = Q$ とは取れない場合, あるいは, A を掛け算することにより定まる線型写像の「大まかな様子」を調べる場合などが, (i) の場合に当たります. 一方, A が正方行列で, A^n や指数関数 e^{xA} などを考えたい場合などが, (ii) の場合に当たります.

このうち, (i) の場合については, 皆さんが「行列の rank の計算」をするときに行なっていることを反省してみると, すでに「行列の標準形の問題」は解決済みであることが, 次のようにして分かります. 第 3 回の問 1 のところで見たように, 行や列に関する基本変形を施すことにより, 与えられた行列 A を,

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{90}$$

というように, 対角線上に 1 がいくつか並び, 残りの成分は 0 となるような「見やすい形」に変形できることが分かります.[26] ここで,「行や列に関する基本変形を施すこと」は,「対応する基本行列を左や右から掛け算すること」であると解釈することができますから, (90) 式より, 与えられた行列 A に対して, 適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が存在して,

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{91}$$

となることが分かります. そこで, 基本行列は正則行列であることに注意して, (89) 式と

[26] ここで, サイズが r の単位行列を I_r と表わし, 零行列を O と表わしました.

(91) 式を見比べてみると,

$$P = F_1F_2\cdots F_t, \quad Q = (E_s \cdots E_2E_1)^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

として,「行列の標準形の問題」が解決されることが分かります. すなわち, (i) の場合には,

行列の標準形（ $P = Q$ と取らなくてよい場合 ）

与えられた行列 A に対して,

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{92}$$

となるような正則行列 P, Q が存在する.

という形で「行列の標準形の問題」が解決することが分かります.

このように, (i) の場合には, すでに問題は解決済みなので, 一般に,「行列の標準形の問題」と言ったときには,

行列の標準形の問題（ $P = Q$ と取らなければいけない場合 ）

与えられた正方行列 A に対して,

$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{93}$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を見つけよ.

というように, (ii) の場合の問題を指していることが多いです. この場合に, 上と同様にして, 基本変形を用いて問題の解決を図ろうとすると, **$\boldsymbol{E}$ を基本行列として,**

$$\boldsymbol{A} \ \rightsquigarrow \ \boldsymbol{E^{-1}AE}$$

という変形を「ひとつの変形」と考えて基本変形を施す必要があります. すなわち,「行に対してある変形を施したときに, 列に対しても同じ変形 (の逆変形) を施す」というように規則を変更して, 基本変形を施す必要があります. ところが, こうした「変更された規則」のもとで, 与えられた正方行列を「見やすい形」に変形しようとすると, 行変形で「見やすい形」に近づけることができたと思った矢先に, 引き続いて行なわなければならない列変形によってそれが台無しになってしまうというようなことが起きてしまい, こうした方法で「見やすい形」に変形することは, 一般には, とても困難であることが分かります. そこで, (ii) の場合に「行列の標準形の問題」を解決するためには,「別な工夫」が必要になりますが, この演習でも, どのような「工夫」をすることで, どのような形で問題が解決されるのかということを, 順番に見ていこうと思います.

7 問 2 の解答

(1) いま, $\mathbf{u}' \in \operatorname{Ker} A'$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. すると, $\operatorname{Ker} A'$ の定義から,

$$A'\mathbf{u}' = \mathbf{0} \tag{94}$$

となることが分かります. ここで, 行列 A' は,

$$A' = PA$$

と定義されていましたから,

$$A = P^{-1}A' \tag{95}$$

と表わせることに注意すると, (94) 式, (95) 式から,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}' &= (P^{-1}A')\mathbf{u}' && \text{((95) 式から)} \\ &= P^{-1}(A'\mathbf{u}') \\ &= P^{-1}\mathbf{0} && \text{((94) 式から)} \\ &= \mathbf{0} && (96) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (96) 式より,

$$\mathbf{u}' \in \operatorname{Ker} A$$

となることが分かります.

以上の議論から,

$$\mathbf{u}' \in \operatorname{Ker} A' \Longrightarrow \mathbf{u}' \in \operatorname{Ker} A$$

となることが分かりましたから,

$$\operatorname{Ker} A' \subset \operatorname{Ker} A \tag{97}$$

となることが分かります. 全く同様にして,

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A' \tag{98}$$

となることも分かります.[27] よって, (97) 式, (98) 式から,

$$\operatorname{Ker} A' = \operatorname{Ker} A$$

となることが分かります.

(2) いま, $\mathbf{v}'' \in \operatorname{Im} A''$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. すると, $\operatorname{Im} A''$ の定義から,

$$\mathbf{v}'' = A''\mathbf{u}'' \tag{99}$$

となるような $\mathbf{u}'' \in \mathbb{R}^n$ が存在することが分かります. ここで, 行列 A'' は,

$$A'' = AQ \tag{100}$$

と定義されていたことに注意すると, (99) 式, (100) 式から,

$$\mathbf{v}'' = A''\mathbf{u}'' \qquad \text{((99) 式から)}$$

[27] 皆さん, 確かめてみて下さい.

$$
\begin{aligned}
&= (AQ)\mathbf{u}'' && \text{((100) 式から)} \\
&= A(Q\mathbf{u}'') && (101)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (101) 式から,

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{u}''$$

として,

$$\mathbf{v}'' = A\mathbf{u}$$

と表わせることが分かりますから,

$$\mathbf{v}'' \in \mathrm{Im}\, A$$

となることが分かります.

以上の議論から,

$$\mathbf{v}'' \in \mathrm{Im}\, A'' \Longrightarrow \ \mathbf{v}'' \in \mathrm{Im}\, A$$

となることが分かりますから,

$$\mathrm{Im}\, A'' \subset \mathrm{Im}\, A \tag{102}$$

となることが分かります. 全く同様にして,

$$\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Im}\, A'' \tag{103}$$

となることも分かります.[28] よって, (102) 式, (103) 式から,

$$\mathrm{Im}\, A'' = \mathrm{Im}\, A$$

となることが分かります.

8 問 3 の解答

いま, 与えられた行列 A を, 行に関する基本変形や, 列に関する基本変形を用いて,

$$A \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} A' \tag{104}$$

$$A \xrightarrow{\text{列に関する基本変形}} A'' \tag{105}$$

というように変形したと仮定してみます. すると,「行や列に関する基本変形を施すこと」は,「対応する基本行列を左や右から掛け算すること」であると解釈することができますから, (104) 式, (105) 式から, 適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ を用いて,

$$A' = E_s \cdots E_2 E_1 A, \quad A'' = A F_1 F_2 \cdots F_t$$

[28] 皆さん, 確かめてみて下さい.

というように表わせることが分かります. ここで,

$$P = E_s \cdots E_2 E_1, \quad Q = F_1 F_2 \cdots F_t$$

と表わすことにすると, P, Q は正則行列であり, 行列 A', A'' は, それぞれ,

$$A' = PA, \quad A'' = AQ$$

というように表わせることが分かります. よって, 問 2 の結果から,

$$\mathrm{Ker}\,A' = \mathrm{Ker}\,A, \quad \mathrm{Im}\,A'' = \mathrm{Im}\,A \tag{106}$$

となることが分かります.

そこで, 以下では, (106) 式に注目して, **行列 A を A' や A'' が「精一杯の見やすい形」になるように変形した上で,「$\mathrm{Ker}\,A'$, $\mathrm{Im}\,A''$ の基底として, $\mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Im}\,A$ の基底を求める」**ことを考えてみます. ただし, 列変形に関しては,

列変形に関する「精一杯の見やすい形」の行列の例

$$AF_1F_2\cdots F_t = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形[29]か, あるいは, このうちのいくつかの行が入れ替わった形のものを**「精一杯の見やすい形」**と呼ぶことにします.[30]

(1) まず, $\mathrm{Ker}\,A$ について考えてみることにします. そのために, 行列 A に**行変形のみ**を施して「精一杯の見やすい形」に変形することを考えてみます. すると, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目 }+2\text{ 行目 }\times(-2)]{1\text{ 行目 }+2\text{ 行目 }\times(-3)} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目 }\times(-\frac{1}{2})]{1\text{ 行目 }\times(-\frac{1}{4})}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目 }+1\text{ 行目 }\times(-1)]{2\text{ 行目 }+1\text{ 行目 }\times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行目 }\leftrightarrow 2\text{ 行目}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[29]すなわち, r 行 r 列の単位行列を I_r として,

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ \star & O \end{pmatrix}$$

という形です. ただし,「$\star$」の部分は $m-r$ 行 r 列の行列であれば何でもよいとします.

[30]これは, ちょうど, 行変形に関する「精一杯の見やすい形」の転置行列になっています.

というように変形できることが分かります.

そこで,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$\mathrm{Ker}\, A' = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid A'\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\}$$

の基底を求めてみることにします. いま, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ を,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} A'\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + w \\ y - z + 2w \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$A'\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x + w = 0 \\ y - z + 2w = 0 \end{cases} \tag{107}$$

となることが分かります. よって, (107) 式の右辺の連立一次方程式を解くことで, 勝手な元 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A'$ は,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{108}$$

というように表わせることが分かります.[31] したがって, (108) 式から,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

[31] ここで, (107) 式の右辺の連立一次方程式を, z, w を勝手に決めたとき, x, y がどう決まるのかということを表わしている式であると解釈しました.

として, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が $\mathrm{Ker}\, A'$ の基底になるのではないかと思われます.

そこで, このことをきちんと確かめてみることにします. そのためには,

$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ が Ker A' の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A'$ に対して,

$$\mathbf{u} = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2$$

となるような実数 $s, t \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $s, t \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \implies s = t = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります. このうち, (イ) という条件が満たされることは, (108) 式から, すでに分かっているので, 後は, (ロ) という条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $s, t \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \tag{109}$$

であるとします. このとき, (109) 式の右辺のベクトルを成分を用いて具体的に書き下してみると,

$$\begin{aligned} s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 &= s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t \\ s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (109) 式は, 今の場合,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \tag{110}$$

という式を表わしていることが分かります. よって, 例えば, (110) 式の両辺の第 3 成分と第 4 成分を比べてみることで,

$$s = t = 0$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は $\operatorname{Ker} A'$ の基底になることが分かります. よって, 問 2 の (1) の結果と合わせると, $\operatorname{Ker} A$ の基底として, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が取れることが分かります. 特に,

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} A = 2$$

となることも分かります.

次に, $\operatorname{Im} A$ について考えてみることにします. そのために, 行列 A に**列変形のみ**を施して「精一杯の見やすい形」に変形することを考えてみます. すると, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 列目 } +3 \text{ 列目 } \times 1]{\text{1 列目 } + \text{ 3 列目 } \times(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 列目 } \times \frac{1}{2}]{\text{4 列目 } +3 \text{ 列目 } \times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{4 列目 } +1 \text{ 列目 } \times(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 列目 } \leftrightarrow \text{ 3 列目}]{\text{1 列目 } \leftrightarrow \text{ 3 列目}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります.

そこで,

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$\operatorname{Im} A'' = \left\{ A''\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の基底を求めてみることにします. いま, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ を,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とすると, $A''\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ は,

$$A''\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x \\ -x+2y \\ y \end{pmatrix} \\
&= x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (111)
\end{aligned}
$$

というように表わせることが分かります. よって, (111) 式から,

$$
\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

として, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が $\operatorname{Im} A''$ の基底になるのではないかと思われます.

そこで, このことをきちんと確かめてみることにします. そのためには,

$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ が $\operatorname{Im} A$ の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} A''$ に対して,

$$
\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2
$$

となるような実数 $x, y \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $x, y \in \mathbb{R}$ として,

$$
\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \implies x = y = 0
$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります. このうち, (イ) という条件が満たされることは, (111) 式から, すでに分かっているので, 後は, (ロ) という条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $x, y \in \mathbb{R}$ として,

$$
\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \qquad (112)
$$

であるとします. このとき, (112) 式の右辺のベクトルを成分を用いて具体的に書き下してみると,

$$
\begin{aligned}
x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 &= x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ -x+2y \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, (112) 式は, 今の場合,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+2y \\ y \end{pmatrix} \tag{113}$$

という式を表わしていることが分かります. よって, 例えば, (113) 式の両辺の第 1 成分と第 3 成分を比べてみることで,

$$x = y = 0$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ は $\mathrm{Im}\, A''$ の基底になることが分かります. よって, 問 2 の (2) の結果と合わせると, $\mathrm{Im}\, A$ の基底として, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が取れることが分かります. 特に,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, A = 2$$

となることも分かります.

(2) まず, $\mathrm{Ker}\, A$ について考えてみることにします. そのために, 行列 A に**行変形のみ**を施して「精一杯の見やすい形」に変形することを考えてみます. すると, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行目 }+1\text{ 行目 }\times(-1)]{2\text{ 行目 }+1\text{ 行目 }\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行目 }+4\text{ 行目 }\times 1]{2\text{ 行目 }+4\text{ 行目 }\times 5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行目 }\leftrightarrow 4\text{ 行目}]{1\text{ 行目 }+4\text{ 行目 }\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります.

そこで,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$\mathrm{Ker}\, A' = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid A'\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\}$$

の基底を求めてみることにします. いま, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ を,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned}A'\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - z + 2w \\ y + z + w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$A'\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases} \tag{114}$$

となることが分かります. よって, (114) 式の右辺の連立一次方程式を解くことで, $\mathrm{Ker}\, A'$ の勝手な元 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A'$ は,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{115}$$

というように表わせることが分かります.[32] したがって, (1) と同様に考えると, (115) 式から,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

として, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が $\mathrm{Ker}\, A'$ の基底になることが分かります.[33] よって, 問 2 の (1) の結果と合わせると, $\mathrm{Ker}\, A$ の基底として, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が取れることが分かります. 特に,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, A = 2$$

となることも分かります.

次に, $\mathrm{Im}\, A$ について考えてみることにします. そのために, 行列 A に**列変形のみ**を施して「精一杯の見やすい形」に変形することを考えてみます. すると, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目 }+1\text{ 列目 }\times(-1)]{2\text{ 列目 }+1\text{ 列目 }\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[32] ここで, (114) 式の右辺の連立一次方程式を, z, w を勝手に決めたとき, x, y がどう決まるのかということを表わしている式であると解釈しました.

[33] 皆さん, 確かめてみて下さい.

$$\xrightarrow[2\text{ 列目 }\times(-1)]{4\text{ 列目 }+1\text{ 列目 }\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 列目 }+2\text{ 列目 }\times(-1)]{3\text{ 列目 }+2\text{ 列目 }\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります.

そこで,

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$\operatorname{Im} A'' = \left\{ A''\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \ \right\}$$

の基底を求めてみることにします. いま, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ を,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とすると, $A''\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ は,

$$\begin{aligned} A''\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2x + 5y \\ y \\ x - y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{116}$$

というように表わせることが分かります. よって, (1) と同様にして, (116) 式から,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

として, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が $\mathrm{Im}\, A''$ の基底になることが分かります.[34] したがって, 問 2 の (2) の結果と合わせると, $\mathrm{Im}\, A$ の基底として, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が取れることが分かります. 特に,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, A = 2$$

となることも分かります.

9 問 3 の解答について

さて, 上で挙げた解答では, 問 2 の結果を利用して, $\mathrm{Ker}\, A$ や $\mathrm{Im}\, A$ の基底を求めましたが, $\mathrm{Im}\, A$ については, 次のようにして, その基底を求めることもできます. 以下, 話を具体的にするために, (1) で考えた

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という例にもとづいて説明することにします.

いま, 行列 A の列ベクトルを,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と表わすことにします. このとき, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ を,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

と表わすことにすると,

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ &= x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \end{aligned} \tag{117}$$

となることが分かりますから, $\mathrm{Im}\, A$ は,

$$\mathrm{Im}\, A = \{x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\ \} \tag{118}$$

というように表わせることが分かります.

[34] 皆さん, 確かめてみて下さい.

一般に, $\mathbb{R}^m$ のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ の一次結合で表わされるベクトル全体の集合を,

$$\mathbb{R}\mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{R}\mathbf{v}_n = \{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\ \}$$

などと表わして, **「$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ の生成する線型部分空間」**とか, **「$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ の張る線型部分空間」**とか呼んだりします.[35] いま, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ を列ベクトルとする m 行 n 列の行列を,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

と表わし,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

と表わすことにすると, (117) 式と同様に,

$$A\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

となることが分かりますから,

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}\mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{R}\mathbf{v}_n$$

というように表わせることが分かります.

そこで, (118) 式の記述を用いて, $\operatorname{Im} A$ の基底を求めることを考えてみます. いま, (118) 式から, $\operatorname{Im} A$ の勝手な元 $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} A$ は, 適当な実数 $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \tag{119}$$

という形に表わせるということに注目して, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ が $\operatorname{Im} A$ の基底になるかどうかということを考えてみることにします. すなわち,

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ が $\operatorname{Im} A$ の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} A$ に対して,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4$$

となるような実数 $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \implies x = y = z = w = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされるかどうかということを考えてみます. すると, (119) 式か

[35] 皆さん, $\mathbb{R}\mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{R}\mathbf{v}_n$ が $\mathbb{R}^m$ の線型部分空間になることを確かめてみて下さい.

ら, (イ) という条件は自動的に満たされることが分かります. したがって, 後は, (ロ) という条件が満たされるかどうかを確かめればよいということになります.

そこで, いま, $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \tag{120}$$

であると仮定してみます. すると, (117) 式から,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

として,

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 = A\mathbf{u} \tag{121}$$

と表わせることに注意すると, (120) 式, (121) 式から,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 &\iff \mathbf{0} = A\mathbf{u} \\ &\iff \mathbf{u} \in \operatorname{Ker} A \end{aligned} \tag{122}$$

となることが分かります. したがって, **(ロ) という条件が満たされるかどうかということは, Ker A の考察に帰着される**ことが分かります. すなわち, (ロ) という条件が満たされるかどうかということは,

$$\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$$

となるかどうかということと同じことであることが分かります.

そこで, $\operatorname{Ker} A$ を調べてみると, 問 3 の解答で見たように,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

として,

$$\operatorname{Ker} A = \{ s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^4 \mid s, t \in \mathbb{R} \ \} \tag{123}$$

となることが分かります. さらに, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は $\operatorname{Ker} A$ の基底になることも分かりますから,

$$\operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{0}\}$$

となることが分かります. よって, 今の場合, 残念ながら, (ロ) という条件は満たされないことが分かります. すなわち, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ は $\operatorname{Im} A$ の基底ではないことが分かります. このことは, 一見, 残念な結果のように見えますが, 以下で見るように, $\operatorname{Ker} A$ に対する (123) 式の記述を利用して, $\operatorname{Im} A$ の基底を求めることができることが分かります.

いま, (122) 式から,

$$\mathbf{0} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 \iff \mathbf{u} \in \operatorname{Ker} A \tag{124}$$

となることが分かりますから, $\mathrm{Ker}\,A$ の元 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,A$ に応じて, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ の間の線型関係式が得られることが分かります. 特に, $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,A$ として, 上で求めた基底の元 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathrm{Ker}\,A$ を選んでみると,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{125}$$

という線型関係式が得られることが分かります. このとき, **$\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ は, それぞれ, (125) 式の一番目の式, 二番目の式にしか登場しない**ことが分かりますから,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \end{cases} \tag{126}$$

というように, **$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ を用いて $\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ を表わせる**ことが分かります. よって, (126) 式から,

$$\begin{aligned} x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 &= x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z(-\mathbf{v}_2) + w(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) \\ &= (x+w)\mathbf{v}_1 + (y - z + 2w)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

というように, $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ を「消去する」ことができることが分かりますから,

$$\alpha = x + w, \quad \beta = y - z + 2w$$

として,

$$\mathrm{Im}\,A = \{\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \} \tag{127}$$

というように表わせることが分かります. したがって, **基底の条件のうち, (イ) という条件を満たすためには, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ という四つのベクトルを考えなくとも, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ という二つのベクトルを考えるだけで十分である**ことが分かります.

そこで, 前と同様に, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が $\mathrm{Im}\,A$ の基底となるかどうかということを考えてみることにします. すなわち,

$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ が $\mathrm{Im}\,A$ の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}\,A$ に対して,

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

となるような実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \implies \alpha = \beta = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされるかどうかということを考えてみます. すると, (127) 式か

ら, (イ) という条件は自動的に満たされることが分かります. よって, 前と同様に, 後は, (ロ) という条件が満たされるかどうかを確かめればよいということになりますが, 今度の場合, 次のように考えると, (ロ) という条件が満たされることも比較的簡単に分かります.

いま, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \tag{128}$$

となると仮定してみます. このとき, **わざわざ, $\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ を付け加えて**, (128) 式を,

$$\mathbf{0} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 \tag{129}$$

という形に書き直してみます. すると, (124) 式, (129) 式から,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \tag{130}$$

となることが分かりますから, 後は, **$\operatorname{Ker} A$ の元のうち, ベクトルの第 3 成分と第 4 成分が共に 0 となるような元がどれだけあるのかが分かれば良い**ということになります. いま, (123) 式から, $\operatorname{Ker} A$ の元は, $s, t \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{aligned} s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 &= s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t \\ s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように表わせることが分かりますから, **このような元は $s = t = 0$ となるもの, すなわち, 0 しか存在しない**ことが分かります. よって,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となることが分かりますから,

$$\alpha = \beta = 0$$

となることが分かります. したがって, 今度の場合, (ロ) という条件も満たされることが分かりますから, $\operatorname{Im} A$ の基底として, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が取れることが分かります.

上の議論を見返すと, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が $\operatorname{Im} A$ の基底であることを示す上で, **「(125) 式のような線型関係式を用いて, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ の中から $\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4$ を消去する」**ということと, **「(130) 式のような形をした $\operatorname{Ker} A$ の元は 0 しか存在しない」**という二つの点が議論の

ポイントになっていることが分かります．そこで，これら二つの点について，もう一度，反省してみることにします．

問 3 の解答を見直すと，$\operatorname{Ker} A$ に対する (123) 式の記述は，行に関する基本変形を用いて，$A\mathbf{u}=\mathbf{0}$ という連立一次方程式を，

$$A\mathbf{u}=\mathbf{0} \iff \begin{cases} x+w=0 \\ y-z+2w=0 \end{cases} \tag{131}$$

というように「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に変形することによって得られたものでした．すなわち，(131) 式の連立一次方程式に注目すると，**$\boldsymbol{x}$ という変数は一番目の方程式にしか登場せず，$\boldsymbol{y}$ という変数は二番目の方程式にしか登場しない**ことが分かりますから，(131) 式から，

$$\begin{cases} x=-w \\ y=z-2w \end{cases}$$

というように，**$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ を用いて $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を表わせる**ことが分かります．そこで，$s, t \in \mathbb{R}$ として，

$$z=s, \quad w=t$$

となる解を考えると，

$$\operatorname{Ker} A=\left\{\mathbf{u}=\begin{pmatrix} -t \\ s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R}\right\} \tag{132}$$

という記述が得られるというわけです．したがって，この時点で，**「(130) 式のような形をした $\operatorname{Ker} A$ の元は $\mathbf{0}$ しか存在しない」**という二番目のポイントが保障されることが分かります．

そこで，さらに，$\operatorname{Ker} A$ の元 $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} A$ を，

$$\mathbf{u}=s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

というように書き直して，

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$$

に対応した線型関係式を考えてみると，

$$\begin{cases} \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=\mathbf{0} \\ -\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4=\mathbf{0} \end{cases} \tag{133}$$

という線型関係式が得られることが分かります．よって，この時点で，**「線型関係式を用いて，$\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\mathbf{v_4}\}$ の中から $\mathbf{v_3},\mathbf{v_4}$ を消去する」**という一番目のポイントも保障されることが分かります．ここで，このような消去が可能であるということは，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ が，

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \tag{134}$$

という形をしているということと対応していることに注意して下さい．また，$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ の中から，ベクトルを消去するに当たっては，$\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ を消去するのではなく，例えば，

$$\begin{cases} \mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 \end{cases}$$

といういうように，$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\}$ を消去することも可能なわけですが，(134) 式のベクトルの形に対応させて，$\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ を消去することに決めると，上で見たように，二番目のポイントを用いて，$\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ が線型独立であることも自動的に分かるというわけです．

このように，基本変形を用いて連立一次方程式を解くことにより，$\operatorname{Ker} A$ の基底を求めることができたとすると，その情報を用いて，比較的簡単に，$\operatorname{Im} A$ の基底を求めることもできます．興味のある方は，問 3 の (2) の例に対して，皆さんが求めた $\operatorname{Ker} A$ の基底の情報から，$\operatorname{Im} A$ の基底を求めてみて下さい．

10　線型写像の「大まかな様子」について

さて，行列 A に対する $\operatorname{Ker} A$ や $\operatorname{Im} A$ という概念については，すでに，第 5 回の問 3 のところで少し触れましたが，こうした概念は，線型写像の「大まかな様子」を理解する上で便利な概念として導入されました．そこで，ここでは，**Ker や Im という概念を用いて，どのように線型空間の間の線型写像の「大まかな様子」を理解することができるのか**ということを考えてみることにします．そのために，まず，写像に関する基本的な事柄について反省してみることにします．

一般に，S,T を二つの集合として，

$$f : S \to T$$

を S から T への写像とするとき，T の元であって，S の元 $s \in S$ を用いて，$f(s)$ という形で表わされるような元全体からなる T の部分集合を，写像 f の**像** (<u>im</u>age) と呼んで，記号で，

写像 $f : S \to T$ の像

$$\operatorname{Im} f = \{ f(s) \in T \mid s \in S \}$$

と表わしたりします．また，T の元 $t \in T$ を，勝手にひとつ取ってきたときに，写像 f に

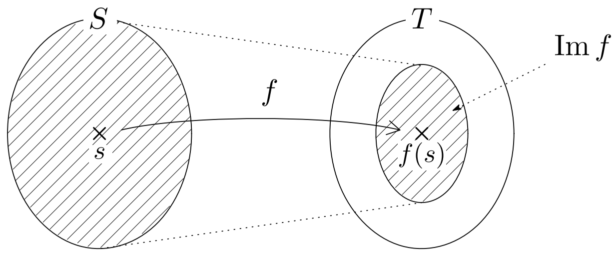

図 1: 写像 $f : S \to T$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ の様子.

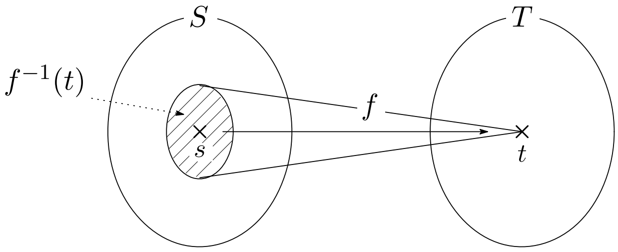

図 2: $t \in T$ に対する写像 f による t の逆像 $f^{-1}(t)$ の様子.

よって, t に写されるような S の元全体からなる S の部分集合を, 写像 f による元 $t \in T$ の**逆像** (inverse image) と呼んで, 記号で,

写像 $f : S \to T$ による元 $t \in T$ の逆像

$$f^{-1}(t) = \{s \in S |\ f(s) = t\ \}$$

と表わしたりします.

いま, 集合 S の左側から光を当てて,「物体」S の像を「スクリーン」T 上に映し出すところを想像してみます. すなわち, S の元 $s \in S$ に対して, s の「影」が $f(s) \in T$ であるというように, 写像 $f : S \to T$ のことをイメージしてみます. このとき,「スクリーン」T 上に映し出された「物体」S の「像」が $\mathrm{Im}\, f$ であると考えることができますから, T の部分集合である $\mathrm{Im}\, f$ のことを写像 f の**像**と呼びます (図 1 を参照). 全く同様に, 今度は, 集合 T の右側から光を当てて,「物体」T の像を「スクリーン」S 上に映し出すところを想像してみます. すると, 今度は, T の元 $t \in T$ に対して, 光を逆向きに当てたときの $t \in T$ の「像」が $f^{-1}(t)$ であると考えることができますから, S の部分集合 $f^{-1}(t)$ のことを (写像 f による) **t の逆像**と呼びます (図 2 を参照).[36]

例えば,

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

という式によって与えられる写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

[36] $t \notin \mathrm{Im}\, f$ のときには, $f^{-1}(t) = \emptyset$ となりますから, このような t に対しては, t の「逆像」は「見えない」と解釈することにします.

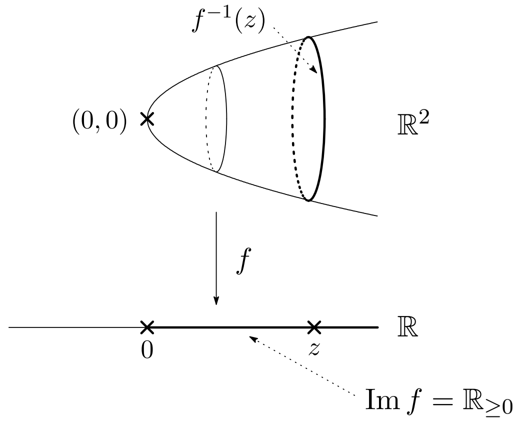

図 3: $f(x,y) = x^2 + y^2$ という例では, 写像 f の像は $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_{\geq 0}$ という半直線となり, 逆像 $f^{-1}(z)$ は, $z \in \mathbb{R}$ に応じて, 円, または, 一点, または, 空集合 $\emptyset$ となる.

を考えてみると, 写像 f の像は,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f &= \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &= \{ z \in \mathbb{R} |\ z \geq 0\ \}\end{aligned}$$

となり, $z \in \mathbb{R}$ に対して, z の逆像は,

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} \text{円}, & (\ z > 0 \text{ のとき }) \\ \text{一点}, & (\ z = 0 \text{ のとき }) \\ \emptyset, & (\ z < 0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

となることが分かります (図 3 を参照). いま, 関数 $f(x,y)$ のグラフを,

$$\Gamma_f = \{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \} \subset \mathbb{R}^3$$

と表わして,[37]

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \ \longleftrightarrow\ (x, y, f(x,y)) \in \Gamma_f$$

という対応により,

$$\mathbb{R}^2 \ \cong\ \Gamma_f$$

というように, $\mathbb{R}^2$ と Γ_f を同一視することにします. この同一視のもとで, $z = f(x,y)$ のグラフ上の点を z 方向に射影した様子を考えてみると, 写像 $f(x,y)$ に対する図 3 のような描像が得られることになります (図 4 を参照). 一般に, 写像 $f : S \to T$ に対して, 図 3 のように, 集合 T のそれぞれの点 $t \in T$ の真上に, t の逆像 $f^{-1}(t) \subset S$ が載っているような図を描いて考えることにすると, 写像 f の「大まかな様子」が理解しやすくなることが多いです. その意味で, **写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ や $t \in T$ の逆像 $f^{-1}(t)$ は, 写像 f の「大まかな様子」を理解する上で最も基本的な概念である**と考えることができます.

[37] 平たく言えば, Γ_f とは「$z = f(x,y)$ のグラフ」のことです.

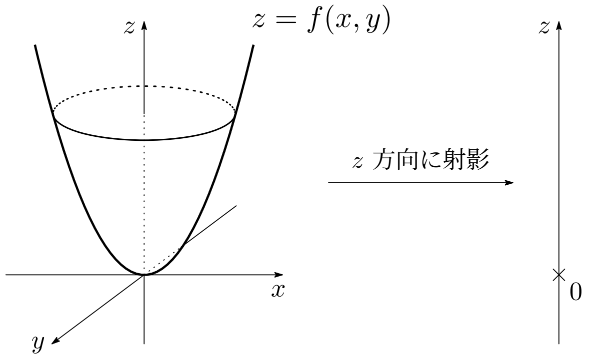

図 4: 関数 $z = f(x, y)$ 上の点を z 方向に射影した様子.

もうひとつ別な例として, 例えば,

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \tag{135}$$

という式で与えられる写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

を考えてみます. すると, 今度は, 写像 f の像や逆像がどうなるのかということは, すぐには分からないように思われますが, 実は, この写像は, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, z^2 という複素数を対応させる

$$f(z) = z^2$$

という写像を,

$$z = x + \sqrt{-1}\, y$$

という式によって定まる実座標 (x, y) を用いて書き直したものです. そこで, 勝手な複素数 $w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$z^2 = w$$

という方程式は, 複素数の範囲で, 重複度を込めてちょうど二つの解を持つということと, 重根を持つのは $z^2 = 0$ の場合だけであるということに注意すると, 写像 f の像は,

$$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$$

となり, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して, (u, v) の逆像は,

$$f^{-1}(u, v) = \begin{cases} \text{一点}, & (\ (u, v) = (0, 0) \text{ のとき }) \\ \text{二点}, & (\ (u, v) \neq (0, 0) \text{ のとき }) \end{cases}$$

となることが分かります (図 5 を参照). 興味のある方は, (135) 式という表示をもとにして, これらの事実を直接確かめてみて下さい.

さて, 一般に, 二つの集合 S, T の間に, 写像 $f : S \to T$ が与えられているときに, しばしば,

$$S \ni s \ \longleftrightarrow \ t = f(s) \in T$$

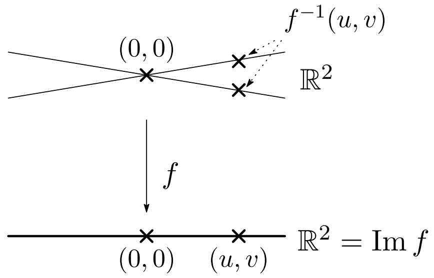

図 5: $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ という例では, 写像 f の像は $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ となり, 逆像 $f^{-1}(u,v)$ は, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に応じて, 一点, または, 二点となる.

という対応のもとで, いつ, S の元と T の元がぴったり一対一に対応するのかということを考察する必要が生まれます. そこで, 次に, この問題について考えてみることにします.

一般に, $f : S \to T$ を二つの集合 S, T の間の写像として, それぞれの元 $s \in S$ に応じて, 写像 f によって写される元 $f(s) \in T$ がそれぞれ異なるときに, 写像 f を **単射**と呼びます.[38] すなわち, $s_1, s_2 \in S$ として,

写像 $f : S \to T$ が単射であるための条件

$$s_1 \neq s_2 \implies f(s_1) \neq f(s_2) \tag{136}$$

となるときに, 写像 f を**単射**と呼びます. あるいは, (136) 式の主張の対偶を考えて, 単射の条件を,

単射の条件の言い換え (その１)

$$f(s_1) = f(s_2) \implies s_1 = s_2 \tag{137}$$

というように言い換えることもできます. いま, 写像 $f : S \to T$ を「S の各点 $s \in S$ から一本ずつ矢を放って, $s \in S$ から放たれた矢が $f(s) \in T$ という点に刺さる」という状況を表わしているとイメージしてみます. このとき, (136) 式, あるいは, (137) 式は,「T のどの点 $t \in T$ を見ても, t という場所に刺さる矢は高々一本である」というように解釈できますから, このような状況のときに, 写像 f を「単射」と呼ぶわけです.

また, 勝手な元 $t \in T$ に対して, 写像 f により t に写されるような S の元が少なくともひとつ存在するときに, 写像 f を**全射**と呼びます.[39] すなわち, 勝手な元 $t \in T$ に対して,

$$f(s) = t$$

となるような元 $s \in S$ が存在するときに, 写像 f を**全射**と呼びます. 上と同様に,「S の各点 $s \in S$ から一本ずつ矢を放って, $s \in S$ から放たれた矢が $f(s) \in T$ という点に刺さる」という状況をイメージしてみると, 今度の場合,「T のどの点 $t \in T$ を見ても, t という場所に少なくとも一本は矢が刺さっている」というように解釈できますから, このような状況のときに, 写像 f を「全射」と呼ぶわけです.

[38]「単射」のことを**「一対一の写像」**と呼んだりもします.
[39]「全射」のことを**「上への写像」**と呼んだりもします.

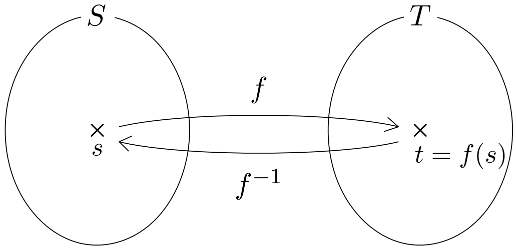

図 6: 写像 $f : S \to T$ により, S の元と T の元がぴったり一対一に対応しているときには, 逆写像 $f^{-1} : T \to S$ を考えることができる.

さらに, f が単射であり, かつ, 全射でもあるときに, 写像 f を**全単射**と呼びます. いま, $f : S \to T$ が全単射であるとすると,

$$S \ni s \ \longleftrightarrow \ t = f(s) \in T$$

という対応によって, S の元と T の元がぴったり一対一に対応することが分かります. このとき, T の勝手な元 $t \in T$ に対して,

$$f(s) = t \tag{138}$$

となるような S の元 $s \in S$ が唯ひとつ存在することになりますから, $t \in T$ に対して, (138) 式を満たすような元 $s \in S$ を対応させることができます. このような対応を与える写像を,

$$f^{-1} : S \to T$$

と表わして, 写像 $f : S \to T$ の**逆写像**と呼びます (図 6 参照).

以上の概念は, 次のような状況をイメージしてみると多少は理解しやすくなるかもしれません. いま, S を男性の集合, T を女性の集合として, 男性から女性にプロポーズするという状況を考えてみます.[40] すなわち, 男性 s さんが女性 $f(s)$ さんにプロポーズをするという状況を考えてみます. また, 女性の側は, 一人の男性からプロポーズされた場合にのみ,「はい」という返事ができることとし, 複数の男性からプロポーズされた場合には, どの男性にも返事はできないこととします.

この状況のもとで, 男性全員, あるいは, 女性全員が, いつハッピーになれるのかということを考えてみます. まず, 男性全員がハッピーな状況を考えてみます. すると, このことは男性同士の間に争いが起こらないということを意味していますから, それぞれの男性が別々の女性にプロポーズする状況であると解釈することができます. このように, 男性全員にとってハッピーな状況を「単射」と呼ぶわけです.

次に, 女性全員がハッピーな状況を考えてみます. すると, このことは, プロポーズしてくれる男性が一人もいないという女性はいなくて, どの女性にも少なくともひとりの男性がプロポーズしてくれるという状況であると解釈することができます. このように, 女性全員にとってハッピーな状況を「全射」と呼ぶわけです.

[40] 最近は女性の方から男性にプロポーズすることも多くなってきたとか, 結婚が必ずしも幸せに結びつくとは限らないとか, 現実に当てはめたときの様々な問題点はすべて無視して考えることにします.

さらに, 男性全員にとっても, 女性全員にとってもハッピーな状況を考えてみます. このことは, 男性同士の争いも起きず, プロポーズされない女性も出ないということを意味していますから, プロポーズという行為のもとで, 男性と女性がぴったり一対一に対応している状況であると解釈することができます. このような状況を「全単射」と呼ぶわけです. このように男性, 女性を問わず, 全員がハッピーな状況では, それぞれの女性がプロポーズしてくれた男性に対して「はい」という返事をすることができますが, それぞれの女性に対して, 返事をする男性を対応させる写像が「逆写像」ということになります.

さて, 上では, 写像の「大まか様子」を理解する上で基本的な概念として,「像」や「逆像」という概念を導入しました. これらの概念を用いると,「単射」や「全射」の条件は, 次のように表わすこともできます. いま, 写像 $f : S \to T$ が単射であるということは, 勝手な元 $t \in T$ に対して, $f(s) = t$ となるような元 $s \in S$ は高々ひとつであるということを意味していますから, 単射の条件は, 逆像を用いて,

単射の条件の言い換え (その２)

$$^{\#}f^{-1}(t) \leq 1, \quad ({}^{\forall}t \in T) \tag{139}$$

というように表わせることが分かります.[41] また, 写像 $f : S \to T$ が全射であるということは, 勝手な元 $t \in T$ に対して, $f(s) = t$ となるような元 $s \in S$ が少なくともひとつは存在するということを意味していますが, $f(s) = t$ と表わせるような T の元全体の集合が,

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(s) \in T \mid s \in S \}$$

でしたから, 全射の条件は, 像を用いて,

全射の条件の言い換え

$$\mathrm{Im}\, f = T \tag{140}$$

というように表わせることが分かります.

以上の準備のもとで, S, T が線型空間で, f が線型写像の場合について考えてみることにします. すなわち, **$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を二つの線型空間として, $\boldsymbol{f : V \to W}$ が線型写像である場合**について考えてみることにします. すると, この場合にも, f は写像には違いありませんから, 上で見たように,

線型写像 $\boldsymbol{f : V \to W}$ の像

$$\boldsymbol{\mathrm{Im}\, f = \{ f(\mathrm{u}) \in W \mid \mathrm{u} \in V \}}$$

という式によって, 線型写像 f の**像** (image) が定義されます. また, W の元 $\mathbf{w} \in W$ に対して,

線型写像 $\boldsymbol{f : V \to W}$ による元 $\mathrm{w} \in \boldsymbol{W}$ の逆像

$$\boldsymbol{f^{-1}(\mathrm{w}) = \{ \mathrm{u} \in V \mid f(\mathrm{u}) = \mathrm{w} \}}$$

という式によって, 線型写像 f による $\mathbf{w} \in W$ の**逆像** (inverse image) が定義されます.

[41] ここで, $f^{-1}(t) \subset S$ という部分集合の元の個数を「$^{\#}f^{-1}(t)$」という記号を用いて表わしました.

ただし, 今の場合, W は線型空間であり, W には特別な「原点」$\mathbf{0} \in W$ が存在しますから, 特別な「原点」$\mathbf{0} \in W$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{0})$ だけは特別扱いをして, これを, 線型写像 f の**核** (kernel) と呼び, 記号で,

線型写像 $f : V \to W$ の核

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= f^{-1}(\mathbf{0}) \\ &= \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\ \} \end{aligned}$$

と表わしたりします.

特に, A を m 行 n 列の (実数) 行列として, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

という式によって定まる線型写像

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

の場合には,[42] 線型写像 f_A の像を,

行列 A の像

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, A &= \mathrm{Im}\, f_A \\ &= \{A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ \} \end{aligned}$$

と表わして, **行列 A の像**と呼び, 線型写像 f_A の核を,

行列 A の核

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, A &= \mathrm{Ker}\, f_A \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \} \end{aligned}$$

と表わして, **行列 A の核**と呼びます.

一般の写像 $f : S \to T$ の場合には, 写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f \subset T$ や $t \in T$ の逆像 $f^{-1}(t) \subset S$ が, それぞれ T や S のどのような部分集合になるのかということに関して, 様々な可能性が考えられるわけですが, **V, W が線型空間で, $f : V \to W$ が線型写像の場合には, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ は, それぞれ, 線型空間 V, W の線型部分空間になる**ことが分かります.[43] すなわち, この場合には, **線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ は, 常に, W の「原点を通る真っ直ぐな部分集合」になり, 線型写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は, 常に, V の「原点を通る真っ直ぐな部分集合」になる**ことが分かります.

また, 勝手な元 $\mathbf{w} \in W$ に対する逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ も,「特別な逆像」$\mathrm{Ker}\, f$ を用いて, 次のように記述できることが分かります. いま, $\mathbf{w} \notin \mathrm{Im}\, f$ となる場合には,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \emptyset$$

[42] すなわち, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は「行列 A を掛け算する」写像のことです.

[43] 皆さん, 確かめてみて下さい.

となることが分かりますから, 以下では, $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\, f$ であると仮定することにします. すると, この場合, $\mathrm{Im}\, f$ の定義から,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) \neq \emptyset$$

となることが分かります. そこで, $f^{-1}(\mathbf{w})$ の元 $\mathbf{u}_0 \in f^{-1}(\mathbf{w})$ を, 何でもよいから勝手にひとつ取ってきて, $\mathbf{u} \in V$ を,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v} \tag{141}$$

と表わすことで, $\mathbf{u} \in f^{-1}(\mathbf{w})$ となるための条件を $\mathbf{u}_0$ からの「ズレ」$\mathbf{v}$ を用いて表わすことを考えてみます. いま,

$$f(\mathbf{u}_0) = \mathbf{w} \tag{142}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}) && \text{((141) 式から)} \\ &= f(\mathbf{u}_0) + f(\mathbf{v}) && \text{(} f \text{ は線型写像から)} \\ &= \mathbf{w} + f(\mathbf{v}) && \text{((142) 式から)} \end{aligned} \tag{143}$$

となることが分かります. よって, (143) 式から,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in f^{-1}(\mathbf{w}) &\iff f(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \\ &\iff f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && \text{((143) 式から)} \\ &\iff \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f \end{aligned} \tag{144}$$

となることが分かります. したがって, (141) 式, (144) 式から, $\mathbf{w} \in W$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{w}) &= \{\mathbf{u}_0 + \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f\ \} \\ &= \mathbf{u}_0 + \mathrm{Ker}\, f \end{aligned}$$

というように記述できることが分かります.

以上の議論から, W の勝手な元 $\mathbf{w}$ に対する逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ が,「特別な逆像」$\mathrm{Ker}\, f$ を用いて,

線型写像 $f : V \to W$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ の記述

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \begin{cases} \mathbf{u}_0 + \mathrm{Ker}\, f, & \text{(} \mathbf{w} \in \mathrm{Im}\, f \text{ のとき)} \\ \emptyset, & \text{(} \mathbf{w} \notin \mathrm{Im}\, f \text{ のとき)} \end{cases}$$

というように記述できることが分かりました. 特に, $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\, f$ のとき, $f^{-1}(\mathbf{w})$ は線型空間 V の中で $\mathrm{Ker}\, f$ を $\mathbf{u}_0$ だけ平行移動したような「真っ直ぐな部分集合」であることが分かります.[44] 上で, $\mathrm{Ker}\, f$ や $\mathrm{Im}\, f$ は, それぞれ, 線型空間 V, W の線型部分空間になることを注意しましたが, 勝手な元 $\mathbf{w} \in W$ に対する逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ も, $f^{-1}(\mathbf{w}) \neq \emptyset$ となる場合には, $\mathrm{Ker}\, f$ を平行移動したような「真っ直ぐな部分集合」になることが分かるというわけです. したがって, 線型写像 f の「大まかな様子」は, 図 7 のようにイメージできることが分かります.

[44] 第 5 回の問 3 のところで注意したように, このような「特定の原点を持たない真っ直ぐな空間」のことを**「アファイン空間」**と呼んだりします.

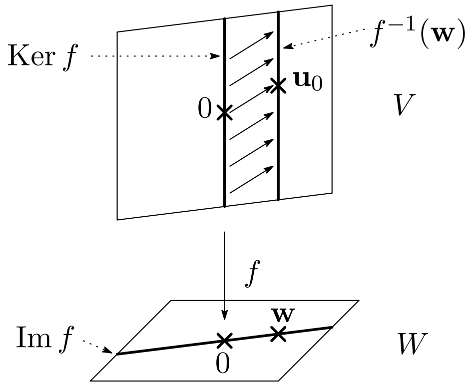

図 7: 線型写像 $f : V \to W$ の「大まかな様子」.

さて, (140) 式から, 像という概念を用いると, 線型写像が全射となるための条件を,

線型写像 $f : V \to W$ が全射であるための条件

$$\mathrm{Im}\, f = W$$

というように簡明な形で表わせることが分かります. また, 上で見たように, $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\, f$ のとき, $\mathbf{u}_0 \in f^{-1}(\mathbf{w})$ を, 勝手にひとつ取ってくると,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v} \ \longleftrightarrow \ \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f$$

という対応により,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) \ \cong \ \mathrm{Ker}\, f$$

というように同一視できることが分かりますから,

$$^{\#} f^{-1}(\mathbf{w}) = {}^{\#}\, \mathrm{Ker}\, f \tag{145}$$

となることが分かります. よって, (145) 式から,

$$\begin{aligned} {}^{\#} f^{-1}(\mathbf{w}) = 1 \ &\Longleftrightarrow \ {}^{\#}\, \mathrm{Ker}\, f = 1 \\ &\Longleftrightarrow \ \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (139) 式と合わせて,

線型写像 $f : V \to W$ が単射であるための条件

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \tag{146}$$

となることが分かります. このように, **$\mathrm{Ker}\, f$ や $\mathrm{Im}\, f$ という概念を用いると, 線型写像 $f : V \to W$ が「単射になるための条件」や「全射になるための条件」が簡明な形で表わせる**ことが分かります.

ここでは, (139) 式, (145) 式をもとにして, (146) 式を導きましたが, 次のようにして, 直接,

$$\text{線型写像 } f : V \to W \text{ が単射.} \quad \Longleftrightarrow \ \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$$

となることを確かめることもできます.

まず,「$\Longrightarrow$」という主張について考えてみます. そこで, いま, 線型写像 $f : V \to W$ が単射であると仮定してみます. このとき,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

となることに注意すると, f は単射ですから,

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

となる元 $\mathbf{u} \in V$ は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 以外には存在しないことが分かります. よって,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$$

となることが分かりますから,「$\Longrightarrow$」という主張が成り立つことが分かります.

次に,「$\Longleftarrow$」という主張について考えてみます. そこで, いま,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \tag{147}$$

であると仮定してみます. このとき, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ として,

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \tag{148}$$

であるとすると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) && (\ f \text{ は線型写像から }) \\ &= \mathbf{0} && (\ (148) \text{ 式から }) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f$$

となることが分かります. よって, (147) 式から,

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

となることが分かります. したがって, f は単射であることが分かりますから,「$\Longleftarrow$」という主張も成り立つことが分かります.

11　線型写像の性質について

さて, 10 節では, Ker や Im という概念を用いることで, 線型写像の「大まかな様子」を理解できることを見ました. そこで, 線型写像の性質をより良く理解するために, ここでは,**「上手い番地割り」を用いて, 直接, 線型写像の様子を調べる**ことを考えてみることにします.

いま, V, W を線型空間として, V, W の次元を, それぞれ,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

とします. また, V から W への線型写像

$$f : V \to W$$

が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて, これらの基底に関する線型写像 f の表現行列を A と表わすことにします. ただし, このままでは, 表現行列 A が「見やすい形」の行列であるとは限りませんから, 線型写像 f の表現行列が「見やすい形」の行列になるように, V や W の基底を「上手く取り替える」ことを考えてみます. すると, 6 節で見たように, V や W の基底を,

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n\} \\ \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\} & \rightsquigarrow & \{\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \cdots, \mathbf{f}'_m\} \end{array}$$

というように「上手く取り替える」ことで, 線型写像 f の表現行列は,

$$A \rightsquigarrow \Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」の行列に変換できることが分かります.[45] すなわち, V, W の「上手い基底」を用いた「上手い番地割り」のもとで,

「上手い番地割り」のもとで線型写像 f は「見やすい形」の行列 Λ に化ける

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddd, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, "\in"] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[dddd, leftrightarrow] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & W \arrow[ur, phantom, "\ni"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_\Lambda"'] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, "\in"] & \\
& & & \\
\mathbf{z} \arrow[rrr, mapsto] & & & \Lambda\mathbf{z} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\mathbf{z}
\end{tikzcd}$$

というように, 線型写像 $f : V \to W$ は,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{149}$$

という「見やすい形」の行列の姿に「化ける」ことが分かります.

[45]基底を「上手く取り替える」ための具体的な方法については, 6 節を参照して下さい.

そこで, いま, (149) 式の行列 Λ の形に注目して, V の「上手い番地」$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ を, 最初の r 個の成分 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ と残りの $(n-r)$ 個の成分 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$ に分けて,

$$V \ni \mathbf{u} \;\longleftrightarrow\; \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

というように表わすことにします. また,

$$\begin{aligned} \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

となることに注目して, W の「上手い番地」も, 最初の r 個の成分 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r$ と残りの $(m-r)$ 個の成分 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{m-r}$ に分けて,

$$W \ni \mathbf{w} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

というように表わすことにします. すると, この「上手い番地割り」のもとで, 線型写像 $f : V \to W$ は,

「上手い番地割り」のもとで線型写像 f の具体的な姿

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, "\in" sloped] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & W \arrow[d, phantom, "\wr|"] \arrow[ur, phantom, "\ni" sloped] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_\Lambda"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, "\ni" sloped] & \\
\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\in" sloped] & & & \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

というように, とても単純な姿で記述できることが分かります.

そこで, この「上手い番地割り」を用いて, 線型写像 $f : V \to W$ の様子を直接調べてみることにします. 議論が見やすくなるように, 以下では,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}$$

というように, **線型空間の「点」と「(上手い) 番地」を同一視して表わす**ことにします. すると,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

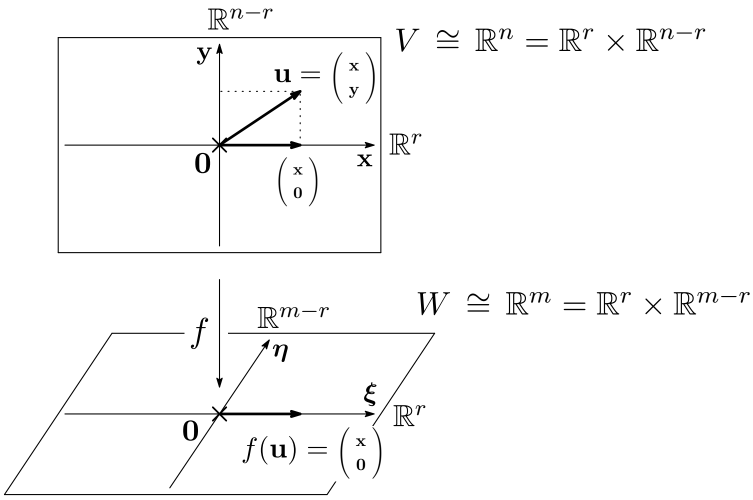

図 8: 「上手い番地割り」のもとでの線型写像 $f : V \to W$ の「大まかな様子」.

に対して,

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W \cong \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \tag{150}$$

となることが分かりますから, 線型写像 f の「大まかな様子」は図 8 のように与えられることが分かります.

いま, (150) 式から,

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W \cong \mathbb{R}^m \;\middle|\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r \right\} \tag{151}$$

となることが分かりますから, 線型写像 f の像 $\operatorname{Im} f$ は $W \cong \mathbb{R}^m$ における「$\boldsymbol{\xi}$ 方向」$\mathbb{R}^r$ に対応していることが分かります. また,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \cong \mathbb{R}^r$$

に対して, $\mathbf{w}$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \tag{152}$$

となることも分かります. 特に, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ とすると,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in V \cong \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \tag{153}$$

となることが分かりますから, 線型写像 f の核 $\operatorname{Ker} f$ は $V \cong \mathbb{R}^n$ における「$\mathbf{y}$ 方向」$\mathbb{R}^{n-r}$ に対応していることが分かります. さらに,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

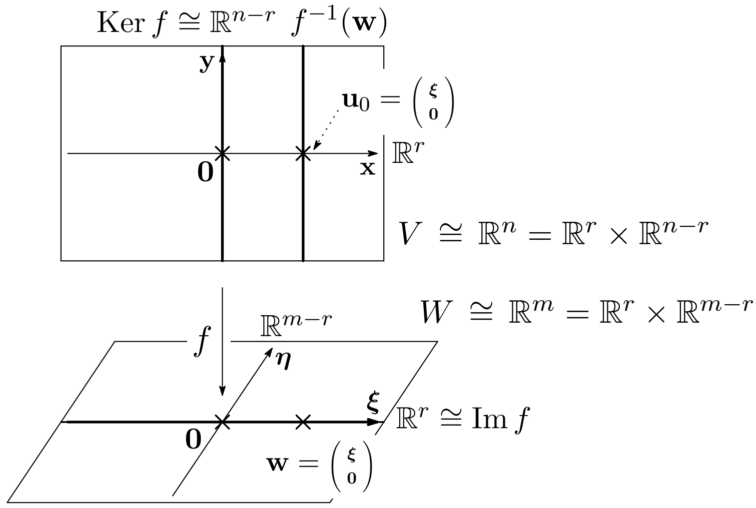

図 9: 線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$, 核 $\mathrm{Ker}\, f$, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ の様子.

と分解して考えると, (152) 式, (153) 式から,

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in f^{-1}(\mathbf{w})$$

として,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{u}_0 + \mathrm{Ker}\, f$$

というように表わせることが分かります. 以上から, 線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$, 核 $\mathrm{Ker}\, f$, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ は, それぞれ, 図 9 のように与えられることが分かります.[46]

さて, 写像 f が全射とは,

$$\mathrm{Im}\, f = W$$

となることでしたが, (151) 式から, これは, $W \cong \mathbb{R}^m$ における「$\boldsymbol{\eta}$ 方向」$\mathbb{R}^{m-r}$ が存在しないことと同値であることが分かります. したがって,

線型写像 $f : V \to W$ が全射となるための条件

$$\begin{aligned} f : V \to W \text{ が全射となる.} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = W \\ &\Longleftrightarrow \quad m = r \end{aligned} \tag{154}$$

となることが分かります. また, 写像 f が単射とは,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$$

となることでしたが, (153) 式から, これは, $V \cong \mathbb{R}^n$ における「$\mathbf{y}$ 方向」$\mathbb{R}^{n-r}$ が存在しないことと同値であることが分かります. したがって,

[46] もちろん, 図 9 は, 10 節の図 7 と本質的に同じものです.

線型写像 $f : V \to W$ が単射となるための条件

$$
\begin{aligned}
f:V\to W \text{ が単射となる.} &\iff \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \\
&\iff n = r \qquad (155)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

いま, $\mathbb{R}^r$ は, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, あるいは, $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ の一部の「方向」を取り出したものですから,

$$r \leq n, \text{ かつ, } r \leq m \qquad (156)$$

となることに注意します. すると, (156) 式から, $n < m$ のときには,

$$r \leq n < m \qquad (157)$$

となることが分かります. したがって, (154) 式, (157) 式から, **$\dim_{\mathbb{R}} V < \dim_{\mathbb{R}} W$ のときには, 線型写像 $f : V \to W$ は全射にはなりえない**ことが分かります. 全く同様に, (156) 式から, $m < n$ のときには,

$$r \leq m < n \qquad (158)$$

となることが分かります. したがって, (155) 式, (158) 式から, **$\dim_{\mathbb{R}} W < \dim_{\mathbb{R}} V$ のときには, 線型写像 $f : V \to W$ は単射にはなりえない**ことが分かります. よって, **線型写像 $f : V \to W$ が全単射になる可能性があるのは, $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ のときだけである**ことが分かります.

そこで, $m = n$ の場合を考えてみます. すると, この場合, **(154) 式の条件と (155) 式の条件は, 全く同じ条件になる**ことが分かりますから,

$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ のときの特殊事情

$$
\begin{aligned}
f:V\to W \text{ が単射となる.} &\iff f:V\to W \text{ が全射となる.} \\
&\iff f:V\to W \text{ が全単射となる.}
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すなわち, この場合には, **「f が全射である」ことさえ確かめられれば, あるいは,「f が単射である」ことさえ確かめられれば, 後は, 自動的に「f が全単射である」ことが結論できる**ことが分かります. また, このことを逆に考えれば, **「f が全単射でない」ということから,「f は全射でもなければ, 単射でもない」ということが自動的に結論できる**ことが分かります.

さて, (151) 式, (153) 式から,

$$\mathrm{Ker}\, f \cong \mathbb{R}^{n-r}, \quad \mathrm{Im}\, f \cong \mathbb{R}^r$$

となることに注意して, 二つの線型空間の次元を足し算してみると,

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f &= (n-r) + r \\
&= n \\
&= \dim_{\mathbb{R}} V
\end{aligned}
$$

となることが分かります．したがって，

次元公式

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \tag{159}$$

となることが分かりますが，(159) 式のことを**「次元公式」**と呼んだりします．

12　連立一次方程式の解法や rank の計算を見直すと

さて，行列の基本変形については，すでに，第 3 回の問 1 のところで説明しましたが，ちょうど良い機会なので，ここで，**線型空間や線型写像という立場から，基本変形によって連立一次方程式の解を求めるということの意味や，基本変形によって行列の rank を求めるということの意味について見直してみる**ことにします．

そこで，いま，A を m 行 n 列の (実数) 行列，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ として，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対する

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{160}$$

という連立一次方程式を考えてみます．また，第 5 回の問 3 のところと同様に，(160) 式の連立一次方程式の解全体の集合を，

$$\mathscr{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\ \}$$

と表わすことにします．このとき，

連立一次方程式に関する基本的な問題

(i) $\mathscr{S} \neq \emptyset$ となるようなベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ を求める．すなわち，連立一次方程式に解が存在するようなベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ を求める．

(ii) $\mathscr{S}$ の元をすべて求める．すなわち，連立一次方程式の解をすべて求める．

ということが，**連立一次方程式に関する基本的な問題**ということになります．第 5 回の問 3 のところで見たように，これらの問題は，基本変形を用いることで，次のように解決することができるのでした．

いま，(160) 式の両辺に左から，適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s$ を掛け算して，(160) 式の連立一次方程式を，

$$E_s \cdots E_2 E_1 A\mathbf{x} = E_s \cdots E_2 E_1 \mathbf{b}$$

という形に書き直すことを考えて，

$$A' = E_s \cdots E_2 E_1 A$$

が「精一杯の見やすい形」になるように変形してみます．すると，このとき，

$$\mathbf{b}' = E_s \cdots E_2 E_1 \mathbf{b}$$

として, 最初の連立一次方程式が,

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \tag{161}$$

という「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に変形できたことになります. 実際には, 行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ を横に並べて, これをひとつ行列と考えて, **行に関する基本変形だけを用いて,**

基本変形を用いて連立一次方程式を「精一杯の見やすい形」に変形する

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} A' & \mathbf{b}' \end{array} \right)$$

というように「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に変形すればよいわけです. また, このとき, (161) 式の「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式の解全体の集合を,

$$\mathscr{S}' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \}$$

と表わすことすると,

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}' \tag{162}$$

となることが分かるのでした. そこで, 後は, **$\mathscr{S}$ を $\mathscr{S}'$ に置き換えて,「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に対して, (i), (ii) の問題を直接調べてみることで, 最初に与えられた連立一次方程式に対する (i), (ii) の問題を解決することができる**というわけです.

そこで, こうした連立一次方程式の解法を「線型空間」や「線型写像」という立場から見直してみることにします. 特に, 上のような解法において鍵となっている (162) 式の事実を, より自然な形で理解することができないかということを考えてみることにします. すなわち, 第 5 回の問 3 のところでは,

$$\mathscr{S} \subset \mathscr{S}', \quad \mathscr{S} \supset \mathscr{S}'$$

という二通りの「不等号」を示すことで, (162) 式が成り立つことを確かめましたが, このような議論を通さずに, **最初から (162) 式が成り立つことが納得できないか**ということを考えてみることにします.

そこで, いま, 行列 A を掛け算することによって定まる線型写像を,

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

と表わすことにします. このように, 行列 A が与えられていると考える代わりに, 線型写像 f_A が与えられていると考えてみるということが,「線型空間」や「線型写像」という考え方ですが, その意味するところは, **ひとまず, 物事の本質には関わっていないと思われる「座標軸」を取り去って,「特定の座標軸」に惑わされずに考察を進めてみることで, 行列 A 自身の性質もより良く理解できるようになるのではないか**と考えてみるということでした. そこで, 特定の座標軸に惑わされないということを強調するために, 以下では, $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{R}^m$ を,

$$V = \mathbb{R}^n, \quad W = \mathbb{R}^m \tag{163}$$

などと表わすことにして, 線型写像 f_A の方も添え字「$_A$」を省略して, 単に,

$$f : V \to W$$

と表わすことにします．すなわち，ここで，発想を逆転させて，**最初に，V, W という線型空間の間の線型写像 $f : V \to W$ が与えられていて，たまたま最初に与えられた V や W の「番地割り」のもとでの線型写像 f の表現行列が A であったと考えてみる**ことにします．

そこで，たまたま最初に与えられた (163) 式の「番地割り」を，5 節の言葉使いに合わせて，「旧番地割り」と呼ぶことにして，それぞれ，

$$V \;\cong\; (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}, \quad W \;\cong\; (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} \tag{164}$$

と表わすことにします．このとき，

$$\begin{gathered} V \ni \mathbf{u} \;\longleftrightarrow\; \mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} \\ W \ni \mathbf{w} \;\longleftrightarrow\; \mathbf{b}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} \end{gathered}$$

と対応しているとすると，[47]

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \;\longleftrightarrow\; A\mathbf{x}_{\text{旧}} = \mathbf{b}_{\text{旧}}$$

と対応することが分かりますから，(164) 式の「旧番地割り」のもとで，

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\ \} \;\cong\; \mathscr{S} = \{\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} \mid A\mathbf{x}_{\text{旧}} = \mathbf{b}_{\text{旧}}\ \}$$

というように同一視できることが分かります．すなわち，**「連立一次方程式の解全体の集合 $\mathscr{S}$ を求める問題」は「線型写像 f の逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ を求める問題」に対応している**ことが分かります．

また，$\mathscr{S} \neq \emptyset$ ということは，

$$A\mathbf{x}_{\text{旧}} = \mathbf{b}_{\text{旧}}$$

となるような「旧番地」$\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}$ が存在するということですが，

$$\operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} \mid \mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}\ \}$$

という行列 A の像の定義を思い出すと，

$$\mathscr{S} \neq \emptyset \iff \mathbf{b}_{\text{旧}} \in \operatorname{Im} A \tag{165}$$

というように言い換えられることが分かります．したがって，**(i) の問題は「行列 A の像 $\operatorname{Im} A$ を決定する問題」であると言い換えることができる**ことが分かります．また，前と同様に，(164) 式の「旧番地割り」のもとで，

$$\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{u}) \in W \mid \mathbf{u} \in V\ \} \;\cong\; \operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} \mid \mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}\ \}$$

というように対応することが分かりますから，**「$\mathscr{S} \neq \emptyset$ となる $\mathbf{b}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}}$ を求める問題」，すなわち，「行列 A の像 $\operatorname{Im} A$ を求める問題」は「線型写像 f の像 $\operatorname{Im} f$ を求める問題」に対応している**ことが分かります．

[47] すなわち，$\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}$ という「旧番地」を持つ V の点を $\mathbf{u} \in V$ と表わし，$\mathbf{b}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}}$ という「旧番地」を持つ W の点を $\mathbf{w} \in W$ と表わすということです．

以上から, 上で述べた「連立一次方程式に関する基本的な問題」は,

「連立一次方程式に関する基本的な問題」の二通りの表現

「番地割り」を用いない表現		「番地割り」を用いた表現
(i) 像 $\mathrm{Im}\, f$ を求める問題	$\longleftrightarrow$	(i) 像 $\mathrm{Im}\, A$ を求める問題
(ii) 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求める問題	$\longleftrightarrow$	(ii) 解集合 $\mathscr{S}$ を求める問題

というように,「線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ や逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求める問題」と解釈できることが分かりました.

そこで, まず, (ii) の問題について考えてみます. すなわち,「最初に与えられた連立一次方程式の解全体の集合 $\mathscr{S}$ を求める問題」について考えてみます. すると, 上で見たように, この問題は,

解集合 $\mathscr{S}$ と逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{S} & \subset & (\mathbb{R}^n)_{旧} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^m)_{旧} & \ni & \mathbf{b}_{旧} \\
\wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \updownarrow \\
f^{-1}(\mathbf{w}) & \subset & V & \xrightarrow{f} & W & \ni & \mathbf{w}
\end{array}$$

というように,「線型写像 f の逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求める問題」に対応していることが分かります. したがって, もし, 何らかの形で逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求めることができれば, 後は,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) \xrightarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \mathscr{S} \tag{166}$$

というように, $f^{-1}(\mathbf{w})$ に属する点の「旧番地」をピックアップすることで解集合 $\mathscr{S}$ が求まることになります.

そこで, 試みに, 素直に $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求めてから, (166) 式を用いて, 解集合 $\mathscr{S}$ を求めようとすると, どのようなことになるのかということを考えてみます. 11 節で見たように, V や W の「上手い番地割り」を用いると, 線型写像 $f : V \to W$ の表現行列は,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

という「見やすい形」の行列になるのでした. そこで, いま, V や W の「上手い番地割り」を,

$$V \cong (\mathbb{R}^n)_{新}, \quad W \cong (\mathbb{R}^m)_{新} \tag{167}$$

と表わすことにして,

$$V \ni \mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{x}_{新} \in (\mathbb{R}^n)_{新}$$
$$W \ni \mathbf{w} \longleftrightarrow \mathbf{b}_{新} \in (\mathbb{R}^m)_{新}$$

と対応しているとして,

$$\mathscr{S}'' = \{\mathbf{x}_{新} \in (\mathbb{R}^n)_{新} \mid \Lambda \mathbf{x}_{新} = \mathbf{b}_{新}\ \}$$

と表わすことにします. すると, 前と同様に,

解集合 $\mathscr{S}''$ と逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(\mathbf{w}) & \subset & V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \ni & \mathbf{w} \\
\wr\!| & & \wr\!| & & \wr\!| & & \updownarrow \\
\mathscr{S}'' & \subset & (\mathbb{R}^n)_{\text{新}} & \xrightarrow{\quad \Lambda \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} & \ni & \mathbf{b}_{\text{新}}
\end{array}$$

というように対応することが分かりますが, 11 節で見たように, $\mathscr{S}''$ は簡単に求めることができますから, 後は,

$$\mathscr{S}'' \xrightarrow{\text{「新番地」に対応する点をピックアップ}} f^{-1}(\mathbf{w}) \tag{168}$$

というように, $\mathscr{S}''$ に属する「新番地」に対応する点をピックアップすることで, 逆像 $f^{-1}(\mathbf{w})$ を求めることができることになります. よって, (166) 式と (168) 式を合わせて考えると, 結局,

$$\mathscr{S}'' \xrightarrow{\text{「新番地」を対応する「旧番地」に変換}} \mathscr{S} \tag{169}$$

というように, $\mathscr{S}''$ に属する「新番地」を対応する「旧番地」に変換することで, めでたく解集合 $\mathscr{S}$ が求まることになります.

これはこれで良いように思われますが, 実際に上の作戦を実行に移そうとすると, 少し煩わしい点があることが分かります. 6 節で見たように, V や W の「上手い番地割り」を見つけるためには, 行列 A に**行や列に関する基本変形**を施して,

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \Lambda \tag{170}$$

というように, 行列 A を「見やすい形」の行列 Λ に変形したときに,

$$P = F_1 F_2 \cdots F_t, \quad Q = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1} \tag{171}$$

として, 正則行列 P, Q を用いて, 線型空間 V, W の基底を取り替えれば良いことが分かります. また, 5 節で見たように, このとき, 線型空間 V の「旧番地」と「新番地」は,

$$(\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} \ni \mathbf{x}_{\text{旧}} = P\mathbf{x}_{\text{新}} \longleftrightarrow \mathbf{x}_{\text{新}} = P^{-1}\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{新}}$$

というように対応することが分かりますから, **(169) 式の「番地の読み替え」を実行するためには, P という正則行列を知らなければいけない**ことが分かります. ところが, 正則行列 P は (171) 式のように与えられていますから, **行列 P を具体的に求めるためには, (170) 式の基本変形において, どのような列変形を行なったかということを覚えておかないといけない**ことになります.

そこで, こうした煩わしさを避けるために, 上の戦略を少し手直しすることを考えてみます. そのためには, (169) 式のような「番地の読み替え」が必要なくなるようにすれば良いことが分かります. このことは,

$$P = I$$

となるようにするということを意味していますから, (170) 式も, 行列 A に**行に関する基本変形**だけを施して,

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = A' \tag{172}$$

というように, 行列 A を「精一杯の見やすい形」の行列 A' にすることを考えるというように変更すれば良いということになります.

そこで, 前と同様に, (172) 式のように, 行列 A を「精一杯の見やすい形」A' に変形したとして,

$$Q = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1}$$

という正則行列を用いて, 線型空間 W の基底を取り替えて,

$$V \;\cong\; (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}}, \quad W \;\cong\; (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} \tag{173}$$

というように, **V の「番地割り」は最初に与えられた「旧番地割り」のままにして, W の「番地割り」だけを「新番地割り」に取り替えてみます**. また, 前と同様に,

$$\mathscr{S}' = \{\mathbf{x}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} \mid A'\mathbf{x}_{\text{旧}} = \mathbf{b}_{\text{新}}\ \}$$

と表わすことにすると,

解集合 $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ と逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{S} & \subset & (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \ni & \mathbf{b}_{\text{旧}} \\
\wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \updownarrow \\
f^{-1}(\mathbf{w}) & \subset & V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \ni & \mathbf{w} \\
\wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \updownarrow \\
\mathscr{S}' & \subset & (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A' \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} & \ni & \mathbf{b}_{\text{新}}
\end{array} \tag{174}$$

というように対応することが分かります. このとき, **前と大きく違う点**は,

$$\mathscr{S} \xleftarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} f^{-1}(\mathbf{w}) \xrightarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \mathscr{S}' \tag{175}$$

というように, **$\mathscr{S}$ も $\mathscr{S}'$ も, 逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ に属する点の「旧番地」をピックアップすることにより得られる**ということです. したがって, **これらの解集合は同じ集合である**ことが分かりますから,

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}' \tag{176}$$

となることが分かります.

こうして, **線型写像 f の逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ という概念を仲立ちにして考える**ことにすると, (175) 式から, **最初から, (176) 式が成り立つことが納得できる**ことが分かりました. また, **「連立一次方程式の解を求める問題」を「逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ に属する点の「旧番地」をピックアップする問題」であると解釈してみる**と, **この問題には W の「番地割り」は何ら本質的な意味を持たない**ことが分かります. そこで, **逆像 $f^{-1}(\mathrm{w})$ に属する点の「旧番地」がピックアップしやすくなるように, W の「番地割り」だけを「新番地」に取り替えて考**

えてみるということが,「基本変形を用いた連立一次方程式の解法」の意味であることが分かります.

さて, $\mathbf{w} = \mathbf{0} \in W$ のときには,

$$\mathbf{b}_{\text{旧}} = \mathbf{0}_{\text{旧}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}}, \quad \mathbf{b}_{\text{新}} = \mathbf{0}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{新}}$$

となることが分かりますから,

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \operatorname{Ker} f, \quad \mathscr{S} = \operatorname{Ker} A, \quad \mathscr{S}' = \operatorname{Ker} A'$$

となることが分かります. よって, (174) 式から,

$\operatorname{Ker} A, \operatorname{Ker} A'$ と $\operatorname{Ker} f$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Ker} A & \subset & (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \ni & \mathbf{0}_{\text{旧}} \\
\rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} & & \updownarrow \\
\operatorname{Ker} f & \subset & V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \ni & \mathbf{0} \\
\rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} & & \updownarrow \\
\operatorname{Ker} A' & \subset & (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A' \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} & \ni & \mathbf{0}_{\text{新}}
\end{array}$$

というように対応していることが分かります. したがって, 前と同様に,

$$\operatorname{Ker} A \xleftarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \operatorname{Ker} A' \tag{177}$$

というように, **$\operatorname{Ker} A$ も $\operatorname{Ker} A'$ も, 線型写像 f の核 $\operatorname{Ker} f$ に属する点の「旧番地」をピックアップすることにより得られる**ことが分かりますから, **これらの集合は同じ集合である**ことが分かります. すなわち,

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A' \tag{178}$$

となることが分かります. 問 2 では,

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A', \quad \operatorname{Ker} A \supset \operatorname{Ker} A'$$

という二通りの「不等号」を示すことで, (178) 式が成り立つことを確かめましたが, **線型写像 f の核 $\operatorname{Ker} f$ という概念を仲立ちにして, (177) 式のように考えると, 最初から, (178) 式が成り立つことが納得できる**ことが分かります.

(i) の問題に関しても, 全く同様の考察をすることができます. すなわち, この場合には,

行列 A の像 $\operatorname{Im} A$ と線型写像 f の像 $\operatorname{Im} f$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \supset & \operatorname{Im} A \\
\rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} & & \rotatebox{90}{$\cong$} \\
V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \supset & \operatorname{Im} f
\end{array}$$

というように,「行列 A の像 $\operatorname{Im} A$ を求める問題」が「線型写像 f の像 $\operatorname{Im} f$ を求める問

題」」に対応していることが分かります．よって，もし，何らかの形で線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ を求めることができれば，後は，

$$\mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \mathrm{Im}\, A$$

というように，$\mathrm{Im}\, f$ に属する点の「旧番地」をピックアップすることで，行列 A の像 $\mathrm{Im}\, A$ が求まることになります．

そこで，前と同様に，V や W の「番地割り」を「上手い番地割り」に取り替えて，

$\mathrm{Im}\, A$, $\mathrm{Im}\, \Lambda$ と $\mathrm{Im}\, f$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \supset & \mathrm{Im}\, A \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \supset & \mathrm{Im}\, f \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ (\mathbb{R}^n)_{\text{新}} & \xrightarrow{\quad \Lambda \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} & \supset & \mathrm{Im}\, \Lambda \end{array} \tag{179}$$

という対応をもとにして，

$$\mathrm{Im}\, \Lambda \xrightarrow{\text{「新番地」を対応する「旧番地」に変換}} \mathrm{Im}\, A \tag{180}$$

という戦略で $\mathrm{Im}\, A$ を求めることを考えてみます．すると，この場合にも，(180) 式の「番地の読み替え」を実行するためには，

$$Q = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1}$$

という正則行列を具体的に求めなければならないという煩わしさが出てきてしまうことが分かります．

そこで，こうした煩わしさを避けるためには，今度の場合，行列 A に**列に関する基本変形**だけを施して，

$$AF_1F_2 \cdots F_t = A'' \tag{181}$$

というように，行列 A を「(列変形に関する) 精一杯の見やすい形」の行列 A'' に変形することを考えれば良いということになります．すなわち，**W の「番地割り」は最初に与えられた「旧番地割り」のままにして，V の「番地割り」だけを「新番地割り」に取り替えてみる**ことを考えれば良いということになります．すると，このとき，

$\mathrm{Im}\, A$, $\mathrm{Im}\, A''$ と $\mathrm{Im}\, f$ の間の対応

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n)_{\text{旧}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \supset & \mathrm{Im}\, A \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W & \supset & \mathrm{Im}\, f \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ (\mathbb{R}^n)_{\text{新}} & \xrightarrow{\quad A'' \quad} & (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}} & \supset & \mathrm{Im}\, A'' \end{array}$$

というように対応することが分かりますから，

$$\mathrm{Im}\, A \xleftarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\text{「旧番地」をピックアップ}} \mathrm{Im}\, A'' \tag{182}$$

というように, **$\mathrm{Im}\,A$ も $\mathrm{Im}\,A''$ も, $\mathrm{Im}\,f$ に属する点の「旧番地」をピックアップすることにより得られる**ことが分かります. したがって,

$$\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,A'' \tag{183}$$

となることが分かりますから, 後は, 直接, $\mathrm{Im}\,A''$ を求めることで, $\mathrm{Im}\,A$ が求まることになります. こうして, **線型写像 f の像 $\mathrm{Im}\,f$ という概念を仲立ちにして, (182) 式のように考えると, 最初から, (183) 式が成り立つことが納得できる**ことが分かります.

さて, (179) 式に注目すると, 行列 A の rank を, 次のように理解することができることが分かります. いま, (179) 式から,

$$\mathrm{Im}\,A \;\cong\; \mathrm{Im}\,f \;\cong\; \mathrm{Im}\,\Lambda \tag{184}$$

というように同一視することができますから,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,A &= \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,f \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,\Lambda \end{aligned} \tag{185}$$

となることが分かります.[48] 一方, 11 節で見たように,

$$\mathrm{Im}\,\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\text{新}} \in (\mathbb{R}^m)_{\text{新}} \;\middle|\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r \right\} \cong \mathbb{R}^r$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,\Lambda &= r \\ &= \mathrm{rank}\,A \end{aligned} \tag{186}$$

となることが分かります. よって, (185) 式, (186) 式から,

行列 A の rank の意味

$$\mathrm{rank}\,A = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,A \tag{187}$$

となることが分かります.

第 3 回の問 1 のところでは, 行列 A に行や列に関する基本変形を施して, Λ という「見やすい形」の行列に変形したときに, 行列 Λ の対角成分に残る 1 の数として, $\mathrm{rank}\,A$ を定義しました. このとき, **基本変形のやり方は人によって異なり得るのに, 最終的に対角線上**

---

[48]一般に, 二つの線型空間 V_1, V_2 が $V_1 \cong V_2$ というように (線型空間として) 同一視できるとき, すなわち, $\varphi : V_1 \to V_2$ という全単射となる線型写像が存在するとき, $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = n$ として, V_1 の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を勝手にひとつ取ってきて, $\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_n) \in V_2$ という V_2 の元を考えると, $\{\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_n)\}$ は V_2 の基底となることが分かります. よって,

$$\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$$

となることが分かります. 興味がある方は, $\{\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_n)\}$ が V_2 の基底となることを確かめてみて下さい.

に残る 1 の数は常に等しくなるということは, とても不思議なことのように思われます. ところが, $\mathrm{rank}\, A$ を (187) 式のように解釈してみると,

$$\mathrm{Im}\, A \subset (\mathbb{R}^m)_{\text{旧}}$$

という線型部分空間は, **基本変形とは無関係に, 行列 A だけから定まる**ことが分かりますから, その次元である $\mathrm{rank}\, A$ も, 基本変形のやり方とは無関係に行列 A だけから定まる量であることが分かります.