数学 II 演習 (第 8 回) のヒント

問 1.

(1) $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ が V_2 の基底であることを示すためには,

$\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ が V_2 の基底であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{f} \in V_2$ に対して,

$$\mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2$$

となるような実数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよい. このうち, V_2 の定義から, (イ) という条件は自動的に満たされていることが分かるので, (ロ) という条件が満たされることを確かめてみよ.

(2) 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ に関する線型写像 $T_c : V_2 \to V_2$ の表現行列 $\hat{T}_c$ を求めるためには,

(イ) 基底の元の行き先 $T_c(\mathbf{1}), T_c(\mathbf{x}), T_c(\mathbf{x^2}) \in V_2$ の「番地」を求める.
($\implies$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{T}_c$ になる.)

(ロ) 基底 $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2\}$ を用いた「番地割り」$V_2 \cong \mathbb{R}^3$ のもとで,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているときに, $T_c(\mathbf{f}) \in V_2$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.

($\Longrightarrow$ このとき,

$$V_2 \ni T_c(\mathbf{f}) \;\longleftrightarrow\; \hat{T}_c \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法が考えられることに注意して, (イ), (ロ) のうちのいずれかの方法を用いて, 表現行列 $\hat{T}_c$ を求めてみよ.

(3) (2) と同様にして, (イ), (ロ) のうちのいずれかの方法を用いて, 表現行列 $\hat{D}$ を求めてみよ.

(4) $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, $\hat{D}^k$ を具体的に計算してみることで, $e^{\hat{D}}$ を求めてみよ.

(5) $\hat{T}_c$ を c について, 零次式の部分, 一次式の部分, 二次式の部分に分解して, (4) の結果と見比べてみよ.

問 2.

(1) 定義にもとづいて,

$$\mathrm{Ker}\, A' \subset \mathrm{Ker}\, A$$

となることと,

$$\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A'$$

となることを確かめてみよ. すなわち,

$$\mathbf{u}' \in \mathrm{Ker}\, A' \Longrightarrow \ \mathbf{u}' \in \mathrm{Ker}\, A$$

となることと,

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A \Longrightarrow \ \mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A'$$

となることを確かめてみよ.

(2) (1) と同様にして, 定義にもとづいて,

$$\mathrm{Im}\, A'' \subset \mathrm{Im}\, A$$

となることと,

$$\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Im}\, A''$$

となることを確かめてみよ.

問 3. 例えば, 問 2 の結果を利用して, 次のような方法で, $\mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Im}\,A$ の基底を求めてみよ.

(i) 行列 A を行や列に関する基本変形を用いて,

$$A' = E_s \cdots E_2 E_1 A\,(=PA \text{ と考える.})$$
$$A'' = AF_1F_2\cdots F_t\,(=AQ \text{ と考える.})$$

が「精一杯の見やすい形」になるように変形する. (ここで, それぞれの基本変形に対応する基本行列を $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ と表わした.)

(ii) 「精一杯の見やすい形」の行列 A', A'' に対して, 直接, $\mathrm{Ker}\,A'$, $\mathrm{Im}\,A''$ の基底を求める. ($\Longrightarrow$ 問 2 の結果から,

$$\mathrm{Ker}\,A' = \mathrm{Ker}\,A, \quad \mathrm{Im}\,A'' = \mathrm{Im}\,A$$

となることが分かるので, これらが, それぞれ, $\mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Im}\,A$ の基底となる.)

ただし, **行変形に関する「精一杯の見やすい形」**の行列とは,

$$E_1E_2\cdots E_sA = \begin{pmatrix} 1 & & & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形, あるいは, このうちいくつかの列が入れ替わった形の行列のことであり, **列変形に関する「精一杯の見やすい形」**の行列とは,

$$AF_1F_2\cdots F_t = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形, あるいは, このうちいくつかの行が入れ替わった形の行列のことである.