

数学 II 演習 (第 8 回)

問 1. (実数係数の) 2 次式以下の多項式全体の集合を,

$$V_2 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

と表わすことにする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $\{1, x, x^2\}$ は V_2 の基底になることを示せ.
- (2) 実数 $c \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってくる. このとき, 勝手な多項式 $f \in V_2$ に対して, $T_cf \in V_2$ を,

$$(T_cf)(x) = f(x+c), \quad x \in \mathbb{R}$$

という式により定める. すなわち, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x+c) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数を $T_cf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と書くことにする. さらに, $f \in V_2$ に対して, $T_cf \in V_2$ を対応させる写像を,

$$T_c : V_2 \rightarrow V_2$$

と表わすことにする. このとき, 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 T_c の表現行列 $\hat{T}_c$ を求めよ.

- (3) 勝手な多項式 $f \in V_2$ に対して, $\frac{df}{dx} \in V_2$ を対応させる写像を,

$$D = \frac{d}{dx} : V_2 \rightarrow V_2$$

と書くことにする. このとき, 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$ を求めよ.

- (4) (3) で求めた行列 $\hat{D}$ に対して, $\hat{D}^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を計算することで,

$$e^{\hat{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{D}^k = I + \hat{D} + \frac{1}{2!} \hat{D}^2 + \frac{1}{3!} \hat{D}^3 + \dots$$

を求めよ.

- (5) (4) を参考にして, $\hat{T}_c$ を $\hat{D}$ を用いて表わせ.

♣ 余裕があれば,

$$V_n = \{f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

という (実数係数の) n 次式以下の多項式全体の集合 V_n に対して, 問 1 と同様の考察をすることにより, $\hat{T}_c$ と $\hat{D}$ の (n に依らない) 関係式を求めよ. また, この関係式は, 何を意味しているのかを考えてみよ.

♣ 裏に問 2, 問 3 があります.

• m 行 n 列の行列 A に対して, A を掛け算すると $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ になるような $\mathbb{R}^n$ のベクトル全体の集合を,

$$\text{Ker } A = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0} \}$$

と表わし, 行列 A の「核 (kernel) 」と呼ぶ. また, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を用いて, $A\mathbf{u}$ という形で表わせるような $\mathbb{R}^m$ のベクトル全体の集合を,

$$\text{Im } A = \{ A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \}$$

と表わし, 行列 A の「像 (image) 」と呼ぶ. このとき, $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$ は, それぞれ, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の線型部分空間になる.

問 2. A を m 行 n 列の行列とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) P を m 行 m 列の正則行列として, $A' = PA$ と定めるとき,

$$\text{Ker } A' = \text{Ker } A$$

となることを示せ.

(2) Q を n 行 n 列の正則行列として, $A'' = AQ$ と定めるとき,

$$\text{Im } A'' = \text{Im } A$$

となることを示せ.

問 3. 次の行列 A に対して, $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$ の次元と基底をひとつ求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$