数学 II 演習 (第 7 回) の略解

目 次

1　問 1 の解答

(1) 第 6 回の問 2 のところで見たように, 勝手な二つの数列

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots},\ \mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,「足し算」と「スカラー倍」を,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{1}$$

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{2}$$

という式で定めることにより, 数列全体の集合は**線型空間**になることが分かります. したがって, V_1, V_2 が線型空間かどうかということは, 数列全体の集合の中で, V_1, V_2 という部分集合が「足し算」や「スカラー倍」を行なう操作で閉じているかどうかということ, すなわち, V_1, V_2 が数列全体のなす線型空間の中で**線型部分空間**であるかどうかということであると考えることができます.

第 5 回の問 2 のところで見たように, 線型空間の部分集合 V が**線型部分空間**であるとは,

V が線型部分空間になるための条件

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha\mathbf{a} \in V$ となる.

という二つの条件が満たされることでした.[1] そこで, 与えられた部分集合 V_1, V_2 について, これらの条件が満たされるかどうかを確かめてみることにします.

まず, V_1 について考えてみます. いま, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_1$ を, 勝手にふたつ取ってきたとします. すると, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ ですから, $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \\ b_n - 3b_{n-1} + 2b_{n-2} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

となることが分かります. このとき,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますが, (3) 式から, $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
&(a_n + b_n) - 3(a_{n-1} + b_{n-1}) + 2(a_{n-2} + b_{n-2}) \\
&\qquad = (a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2}) + (b_n - 3b_{n-1} + 2b_{n-2}) \\
&\qquad = 0 + 0 && \text{((3) 式から)} \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_1$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

さらに, 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってくると,

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますが, 再び, (3) 式から, $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot a_n) - 3(\alpha \cdot a_{n-1}) + 2(\alpha \cdot a_{n-2}) &= \alpha \cdot (a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2}) \\
&= \alpha \cdot 0 && \text{((3) 式から)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\alpha\mathbf{a} \in V_1$$

[1] すなわち, この世の中から, 線型空間上の点のうち, 部分集合 V に属さない点をすべて消し去ってしまったとしても, V 上の点同士を足し算した結果や V 上の点の 2 倍, 3 倍などした結果がきちんと定まるということでした.

となることが分かります．よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります．

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりますから, V_1 は数列全体のなす線型空間の線型部分空間になることが分かります．よって, V_1 自身も線型空間になることが分かります．

全く同様にして, V_2 も数列全体のなす線型空間の線型部分空間になることが分かりますから, V_2 自身も線型空間になることが分かります.[2]

次に, V_1 の基底を具体的に求めてみることにします．そのために,

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

という漸化式を解いて, V_1 の元をすべて求めてみることにします．そこで, (4) 式の漸化式を解いてみると,

$$\begin{aligned} a_n &= (2^n - 1)a_1 + (2 - 2^n)a_0 \\ &= (2a_0 - a_1) + (a_1 - a_0)2^n \end{aligned}$$

となることが分かります.[3] よって,

$$c_0 = 2a_0 - a_1, \quad c_1 = a_1 - a_0$$

として,

$$a_n = c_0 + 2^n c_1 \tag{5}$$

となることが分かります．

第 6 回の問 2 のところで見たように, 一般に, $m \in \mathbb{N}$ として, 線型空間 V の元 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m \in V$ に対して, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ が V の基底であるとは,

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m\}$ が線型空間 V の基底となる条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V$ に対して,

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{e}_m \tag{6}$$

となるような実数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ が存在する．

(ロ) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{e}_m \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

となる．

という二つの条件が満たされることでした．いま, (5) 式から, V_1 の勝手な元 $\mathbf{a} \in V_1$ は,

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

[2] 皆さん, 確かめてみて下さい．

[3] 4 節で, (4) 式のような定数係数の線型漸化式を満たす数列の一般項を求めることを, 行列の立場から見直してみようと思います．

$$
\begin{aligned}
&= \{c_0 + 2^n c_1\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \{c_0 + c_1 2^n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \{c_0 \cdot 1\}_{n=0,1,2,\cdots} + \{c_1 \cdot 2^n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= c_0 \cdot \{1\}_{n=0,1,2,\cdots} + c_1 \cdot \{2^n\}_{n=0,1,2,\cdots}
\end{aligned} \tag{7}
$$

というように表わせることが分かりますが, (7) 式を (6) 式と見比べてみると, $m=2$ で,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \{1\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \{1,1,1,\cdots\} \\
\mathbf{e}_2 &= \{2^n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \{1,2,4,\cdots\}
\end{aligned}
$$

と定めることで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底として取れそうなことが分かります.

そこで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底となることを確かめてみることにします. まず, (イ) という条件について考えてみます. いま, $\mathbf{a} \in V_1$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. すると, (7) 式から, $\mathbf{a} \in V_1$ は,

$$\mathbf{a} = c_0\mathbf{e}_1 + c_1\mathbf{e}_2$$

というように表わせることが分かりますから,

$$\alpha_1 = c_0, \quad \alpha_2 = c_1$$

として, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. そこで, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \tag{8}$$

となると仮定してみます. このとき, (8) 式の左辺の $\mathbf{0} \in V_1$ は,

$$\mathbf{0} = \{0,0,0,\cdots\}$$

という「零数列」を表わしていることに注意します. また, (8) 式の右辺は,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 &= \alpha_1 \cdot \{1,1,1,\cdots\} + \alpha_2 \cdot \{1,2,4,\cdots\} \\
&= \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+4\alpha_2, \cdots\}
\end{aligned}
$$

という数列を表わしていることに注意します. そこで, (8) 式を数列の成分を用いて表わしてみると,

$$\{0,0,0,\cdots\} = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+4\alpha_2, \cdots\}$$

となることが分かりますから, 最初の二つの成分を比較してみることで,

$$
\begin{cases}
\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\
\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0
\end{cases} \tag{9}
$$

となることが分かります．よって, (9) 式から,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件も満たされることが分かります．

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりますから, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は V_1 の基底となることが分かります.[4]

同様にして,

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

という漸化式を解いてみると,

$$\begin{aligned} a_n &= na_1 + (1-n)a_0 \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) \end{aligned}$$

となることが分かります．よって,

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1 - a_0$$

として,

$$a_n = c_0 + nc_1 \tag{10}$$

となることが分かります．したがって, (10) 式から, V_2 の勝手な元 $\mathbf{a} \in V_2$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{c_0 + nc_1\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{c_0 + c_1 n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{c_0 \cdot 1\}_{n=0,1,2,\cdots} + \{c_1 \cdot n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= c_0 \cdot \{1\}_{n=0,1,2,\cdots} + c_1 \cdot \{n\}_{n=0,1,2,\cdots} \end{aligned} \tag{11}$$

というように表わせることが分かります．そこで, V_1 のときと同様に, (11) 式に注目して,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{1\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{1, 1, 1, \cdots\} \\ \mathbf{e}_2 &= \{n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{0, 1, 2, \cdots\} \end{aligned}$$

と定めると, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_2 の基底となることが分かります.[5]

[4] もちろん, V_1 の基底は, 上で定めた $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ でなくとも構いません．後の (3) において, 対応する関数 $f_{\mathbf{e}_1}(x), f_{\mathbf{e}_2}(x) \in W_1$ が求めやすくなるように, ここでは, 数列の一般項を, わざわざ, (5) 式のように書き直して, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ として, $\{\lambda^n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ という「等比数列」の形をした元を取ることにしました.

[5] 皆さん, 確かめてみて下さい．また, 前と同様に, もちろん, V_2 の基底は上で定めた $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ でなくとも構いません．ここでも, 後の (3) において, 対応する関数 $f_{\mathbf{e}_1}(x), f_{\mathbf{e}_2}(x) \in W_2$ が求めやすくなるように, 数列の一般項を, (10) 式のように, n に関して「零次式の部分」と「一次式の部分」に分解した形に書き直して, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ として, $\{n^k\}_{n=0,1,2,\cdots}$ という「n に関する単項式」の形をした元を取ることにしました.

(2) $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_1$ とすると, 定義により,

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4 \cdots) \tag{12}$$

となることが分かります. よって, (12) 式から, $b_n = a_{n+1}$ とすれば, $n = 2, 3, 4 \cdots$ に対して,

$$\begin{aligned} b_n - 3b_{n-1} + 2b_{n-2} &= a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} \\ &= 0 && \text{((12) 式より)} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$T\mathbf{a} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_1$$

となることが分かります.

全く同様にして, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_2$ とすると,

$$T\mathbf{a} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_2$$

となることが分かります.

(3) (1) のところで定めたように, V_1 の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を,

$$\mathbf{e}_1 = \{1\}_{n=0,1,2,\cdots}, \quad \mathbf{e}_2 = \{2^n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

というように取ることにすると,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{e}_1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= e^x \\ f_{\mathbf{e}_2}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

となることが分かります.

全く同様に, V_2 の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を,

$$\mathbf{e}_1 = \{1\}_{n=0,1,2,\cdots}, \quad \mathbf{e}_2 = \{n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

というように取ることにすると,

$$f_{\mathbf{e}_1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= e^x \\
f_{\mathbf{e}_2}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots \\
&= x \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= xe^x
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[6]

(4) いま,

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{a}}(x) &= a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots && (13) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n && (14)
\end{aligned}
$$

として, (13) 式の両辺を微分してみると,

$$
\begin{aligned}
f'_{\mathbf{a}}(x) &= a_1 + a_2 x + \frac{a_3}{2!}x^2 + \frac{a_4}{3!}x^3 + \cdots && (15) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\, x^n && (16)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. さらに, (15) 式の両辺を微分してみると,

$$
\begin{aligned}
f''_{\mathbf{a}}(x) &= a_2 + a_3 x + \frac{a_4}{2!}x^2 + \frac{a_5}{3!}x^3 + \cdots && (17) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}\, x^n && (18)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (14) 式, (16) 式, (18) 式から,

$$
\begin{aligned}
f''_{\mathbf{a}}(x) - 3f'_{\mathbf{a}}(x) + 2f_{\mathbf{a}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}\, x^n - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\, x^n + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n}{n!}\, x^n && (19)
\end{aligned}
$$

[6]基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ の取り方は一通りではないので, 皆さんの基底の取り方に応じて, 上の関数 $f_{\mathbf{e}_1}(x)$, $f_{\mathbf{e}_2}(x)$ の一次結合の形の関数が得られていれば正解です.

と表わせることが分かります.

そこで, いま, $\mathbf{a} \in V_1$ であるとします. すると, V_1 の定義により,

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{20}$$

となることが分かりますから, (19) 式, (20) 式から,

$$f''_{\mathbf{a}}(x) - 3f'_{\mathbf{a}}(x) + 2f_{\mathbf{a}}(x) = 0$$

となることが分かります. したがって,

$$f_{\mathbf{a}} \in W_1$$

となることが分かります.

全く同様にして,

$$f''_{\mathbf{a}}(x) - 2f'_{\mathbf{a}}(x) + f_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}{n!}\, x^n$$

と表わせることが分かりますから, $\mathbf{a} \in V_2$ であるとすると,

$$f_{\mathbf{a}} \in W_2$$

となることが分かります.

(5) (16) 式から,

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{a}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\, x^n \\ &= f_{T\mathbf{a}}(x) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. よって,

$$f_{T\mathbf{a}}(x) = f'_{\mathbf{a}}(x)$$

となることが分かります.

2 線型空間や線型写像の代表例について

問 1 では,「漸化式を満たす数列」と「微分方程式を満たす関数」の間の関係について考えてみました. そこで, 問 1 の内容を見直す前に, ここでは, 問 1 の舞台設定について少し考えてみることにします.

さて, 第 6 回の問 2 のところでは, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」から座標軸を取り除いたときに得られる「原点のある真っ直ぐな空間」を抽象化して, **「線型空間」**という概念を導入しました. ただし,「真っ直ぐである」というのは極めて感覚的な定義なので,「真っ直ぐであり, かつ, 原点がある」ということが,「足し算やスカラー倍ができる」とい

うように言い換えができると考えて, 数学的には「線型空間」を「足し算やスカラー倍ができる集合」として定義しました. もちろん, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」は, こうした線型空間の例になるわけですが, **「(「数ベクトル空間」のような) 特定の座標軸」を持たない線型空間**の代表例が, 問 1 で取り上げた**「数列の空間」**や**「関数の空間」**です.

そこで, まず, **「関数の空間」**について少し考えてみます. いま, S を,

$$S = \{0, 1\},\ \mathbb{N},\ \mathbb{R}, \cdots$$

など, 勝手にひとつ取ってきた集合であるとして, S 上の実数値関数全体の集合を,

$$V_S = \{f : S \to \mathbb{R}\}$$

と表わすことにします.[7] このとき, 関数同士は「足し算」することができますし, 与えられた関数を「2 倍, 3 倍」することもできますから, V_S は「足し算」や「スカラー倍」ができる集合, すなわち,「線型空間」になることが分かります. このことを, 数学的に曖昧さのない形で表現すると,「$f, g \in V_S$, $a \in \mathbb{R}$ として, $x \in S$ に対して,

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (af)(x) = a \cdot f(x) \end{cases} \tag{21}$$

という式によって, $f + g$, $af \in V_S$ を定めると, これらの「足し算」と「スカラー倍」に関して V_S は線型空間になる」ということになります.

ここで, (21) 式は, 一見, とても抽象的な感じを与えるかもしれませんが, その意味するところは, 次のように, とても単純なことです. いま,

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad g : S \to \mathbb{R}$$

という関数を, 勝手にふたつ取ってきたとします. すると, それぞれの元 $x \in S$ に対して,

$$S \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$$
$$S \ni x \longmapsto g(x) \in \mathbb{R}$$

というように, 関数の値 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ が定まることになります. そこで,

$$S \ni x \longmapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$

というように, $x \in S$ に対して, $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ という実数を対応させる関数を,

$$f + g : S \to \mathbb{R}$$

[7] 話を具体的にするために, ここでは, 実数値関数を例にして説明することにしましたが, 以下の議論では, 関数が「実数値関数」であるということは本質的なことではありません. すなわち, 関数の値域として, $\mathbb{R}$ の代わりに $\mathbb{C}$ を考えて, V_S は,

$$V_S = \{f : S \to \mathbb{C}\}$$

という S 上の「複素数値関数」全体の集合であると考えてもらっても構いません. あるいは, $\mathbb{R}$ の代わりに $\mathbb{R}^3$ を考えて, V_S は,

$$V_S = \{f : S \to \mathbb{R}^3\}$$

という S 上の $\mathbb{R}^3$ に値を持つ「ベクトル値関数」全体の集合であると考えてもらっても構いません.

と表わすということです.[8] 全く, 同様に,

$$f : S \to \mathbb{R}$$

という関数と実数 $a \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきたとします. このとき,

$$S \ni x \longmapsto a \cdot f(x) \in \mathbb{R}$$

というように, $x \in S$ に対して, $a \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ という実数を対応させる関数を,

$$af : S \to \mathbb{R}$$

と表わすということです.[9]

特に, S が自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ である場合には,

$$\begin{aligned} x \in S \ &\rightsquigarrow \ n \in \mathbb{N} \\ f(x) \in \mathbb{R} \ &\rightsquigarrow \ a_n \in \mathbb{R} \\ f \ &\rightsquigarrow \ \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \end{aligned}$$

というような記号の置き換えをしてみることで,

$$V_{\mathbb{N}} = \{\, \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \mid a_n \in \mathbb{R} \,\}$$

というように, **$V_{\mathbb{N}}$ は「数列の空間」に他ならない**ということが分かります. また, この場合に, (21) 式という「足し算」や「スカラー倍」の定義式を書き直してみると, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ \alpha\mathbf{a} &= \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \end{aligned}$$

という式によって, $V_{\mathbb{N}}$ 上の「足し算」や「スカラー倍」を定義するということになりますから, これらは, 正しく「数列の空間」上の自然な「足し算」や「スカラー倍」に他ならないことも分かります.

こうしたことは「シチ面倒くさいだけ」と思われる方もいるかもしれませんが, 実際に「関数の空間」について何かを議論しようと思ったときに, 言葉の意味を曖昧なままにしておくと, しばしば, 自分が何を議論しているのか分からなくなってしまうということが起こります. そこで, そうした混乱を起こさないためにも, (21) 式のように,「足し算」や「スカラー倍」の意味を数学的に曖昧さのない形で定義しておくことが大切になります.

このように, 関数の空間 V_S 上の「足し算」や「スカラー倍」は「誰もが認める自然な足し算やスカラー倍」であるわけですが, 一般には, V_S 上には「誰もが認める自然な基底」

[8] 平たく言えば,「**関数** $f+g$ の $x \in S$ での**値** $(f+g)(x)$ は $f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$ ですね.」ということです. 高校までは, 関数を「$f(x)$」などと表して, **「関数 $f : S \to \mathbb{R}$」と「関数の値 $f(x)$」とをハッキリと区別せずに議論してきた**のではないかと思いますが, このように異なる概念をハッキリと区別せずに議論してしまうと, 理解が曖昧になってしまう可能性が高まります. そこで, **二つの概念をハッキリと区別して考えましょう**というのが, (21) 式の定義の意味です.

[9] こちらも, 平たく言えば,「**関数** $2f$ の $x \in S$ での**値** $(2f)(x)$ は $f(x)$ の 2 倍である $2 \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ ですね.」ということです.

が存在するわけではありません. すなわち, 一般には, V_S 上には「誰もが認める自然な「番地割り」」が存在するわけではありません. その意味で, **関数の空間 $\boldsymbol{V_S}$ は「特定の座標軸を持たない線型空間」の代表例である**と言えます. ただし, 例えば, $S = \{0, 1, 2\}$ というように, S が有限集合である場合を除いては, V_S は線型空間の例としては「大きすぎる」ので,[10] **数列の空間 $\boldsymbol{V_{\mathbb{N}}}$ や一変数関数の空間 $\boldsymbol{V_{\mathbb{R}}}$ を考える場合には, $\boldsymbol{V_{\mathbb{N}}}$ や $\boldsymbol{V_{\mathbb{R}}}$ 自身ではなく, それらの線型部分空間を考察の対象とすることが多い**です.[11]

そこで, 以下では, $S = \mathbb{R}, \mathbb{N}$ として, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ や数列の空間 $V_{\mathbb{N}}$ から, 線型部分空間を取り出す代表的な方法について考えてみることにします.

まず, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ の場合について考えてみることにします. いま, $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数全体の集合を,

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は何度でも微分できる関数 }\}$$

と表わすことにします.[12] すると, 皆さん, 良くご存じのように, f と g が何度でも微分できる関数であるとすると, $f + g$ も何度でも微分できる関数になることが分かります. また, f が何度でも微分できる関数であるとすると, $a \in \mathbb{R}$ として, af も何度でも微分できる関数になることも分かります. この事実を, 数式を用いて表現すると,

$$\begin{cases} f, g \in V \implies f + g \in V \\ f \in V,\, a \in \mathbb{R} \implies af \in V \end{cases}$$

となりますが, このことは「V は $V_{\mathbb{R}}$ の線型部分空間である」ということに他なりません.

そこで, さらに,「微分する」という操作を考えて, $f \in V$ に対して,

$$D(f) = \frac{df}{dx}$$

という式によって定まる写像

$$D = \frac{d}{dx} : V \to V$$

を考えてみます.[13] このとき, 普段, 皆さんが無意識のうちに行なっている微分の計算規則を思い出してみると, $f, g \in V$, $a \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{aligned} D(f+g) &= \frac{d}{dx}(f+g) && (\ D \text{ の定義から }) \\ &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} && (\text{ 微分の計算規則から }) \\ &= D(f) + D(g) && (\ D \text{ の定義から }) \\ D(af) &= \frac{d}{dx}(af) && (\ D \text{ の定義から }) \end{aligned}$$

[10]すなわち, $\dim V_S = \infty$ というように, V_S は無限次元の線型空間になってしまうということです.

[11]問 1 の例は, 正しく, このような例です.

[12]微積分学の教科書では, 何度でも微分できる関数のことを, **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級の関数**と呼んで, こうした関数全体の集合を,

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は何度でも微分できる関数 }\}$$

と表わしたりします.

[13]すなわち, $D : V \to V$ は, $f \in V$ に対して, f の一階導関数 $\frac{df}{dx} \in V$ を対応させる写像です.

$$= a \cdot \frac{df}{dx} \qquad\qquad\qquad (\text{ 微分の計算規則から })$$
$$= a \cdot D(f) \qquad\qquad\qquad (\text{ } D \text{ の定義から })$$

となることが分かりますから, $D : V \to V$ は線型写像になることが分かります. 上で, **「特定の座標軸を持たない線型空間」の代表例が「関数の空間」である**と言いましたが, 同様の意味で, **「行列には見えない線型写像」の代表例が「微分する」という操作である**と言えます.[14] より一般に, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ として, $f \in V$ に対して,

$$L(f) = a_n \frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f$$

という式によって定まる写像

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 : V \to V$$

も線型写像になることが分かるのですが, この事実の確認を形式的な議論で済ますために, 以下では, 線型写像に関する基本的な事柄について少し反省してみることにします.

そこで, いま, V, W を ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間として, V から W への線型写像全体の集合を,

線型空間 V から線型空間 W への線型写像全体の集合

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ は線型写像 } \} \tag{22}$$

という記号を用いて表わすことにします.[15] このとき, 上で関数の空間 V_S について考えたときと同様に, $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $a \in \mathbb{R}$ として, $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\begin{cases} (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \\ (af)(\mathbf{u}) = a \cdot f(\mathbf{u}) \end{cases} \tag{23}$$

という式によって, 二つの線型写像 f, g を「足し算」した写像

$$f + g : V \to W$$

や線型写像 f を a 倍した写像

$$af : V \to W$$

を定義することができますが, これらの写像も線型写像になるということが, 次のようにして分かります.

まず, $f + g$ という写像が線型写像となることを確かめてみることにします. そのためには,

[14] 全く同様にして,「積分する」という操作も線型写像であることが分かります. 興味のある方は確かめてみて下さい.

[15] (22) 式の記号の由来については, 第 6 回の問 3 のところを参照して下さい.

$f+g$ が線型写像になるための条件

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$(f+g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (f+g)(\mathbf{u}) + (f+g)(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(f+g)(\alpha\mathbf{u}) = \alpha \cdot (f+g)(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}
(f+g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (\, f+g \text{ の定義より} \,) \\
&= \{f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\} + \{g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})\} && (\, f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より} \,) \\
&= \{f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})\} + \{f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})\} \\
&= (f+g)(\mathbf{u}) + (f+g)(\mathbf{v}) && (\, f+g \text{ の定義より} \,)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が成り立つことが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. すると, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}
(f+g)(\alpha\mathbf{u}) &= f(\alpha\mathbf{u}) + g(\alpha\mathbf{u}) && (\, f+g \text{ の定義より} \,) \\
&= \alpha \cdot f(\mathbf{u}) + \alpha \cdot g(\mathbf{u}) && (\, f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より} \,) \\
&= \alpha \cdot \{f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})\} \\
&= \alpha \cdot (f+g)(\mathbf{u}) && (\, f+g \text{ の定義より} \,)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も成り立つことが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が成り立つことが分かりましたから, $f+g : V \to W$ は線型写像になることが分かります.

次に, af という写像が線型写像となることを確かめてみることにします. すると, $f+g$ のときと同様に, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}
(af)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= a \cdot f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (\, af \text{ の定義より} \,) \\
&= a \cdot \{f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\} && (\, f \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より} \,) \\
&= a \cdot f(\mathbf{u}) + a \cdot f(\mathbf{v}) \\
&= (af)(\mathbf{u}) + (af)(\mathbf{v}) && (\, af \text{ の定義より} \,) \qquad (24)
\end{aligned}$$

となることが分かります. また, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(af)(\alpha\mathbf{u}) = a \cdot f(\alpha\mathbf{u}) \qquad (\, af \text{ の定義より} \,)$$

$$
\begin{aligned}
&= a\cdot\alpha\cdot f(\mathbf{u}) && (\ f\in \mathrm{Hom}(V,W)\ \text{より}\ )\\
&= \alpha\cdot\{a\cdot f(\mathbf{u})\}\\
&= \alpha\cdot(af)(\mathbf{u}) && (\ af\ \text{の定義より}\ ) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (24) 式, (25) 式から, $af : V \to W$ は線型写像になることが分かります.

さらに, U も ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間として,

$$
f : V \to W, \quad g : U \to V
$$

が, それぞれ, 線型写像であるとすると, f と g の合成写像

$$
f\circ g : U \to W
$$

も線型写像となることが, 次のようにして分かります.

いま, 勝手な元 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= f(g(\mathbf{u}+\mathbf{v})) && (\ f\circ g\ \text{の定義より}\ )\\
&= f(g(\mathbf{u})+g(\mathbf{v}))\} && (\ g\in \mathrm{Hom}(U,V)\ \text{より}\ )\\
&= f(g(\mathbf{u}))+f(g(\mathbf{v})) && (\ f\in \mathrm{Hom}(V,W)\ \text{より}\ )\\
&= (f\circ g)(\mathbf{u})+(f\circ g)(\mathbf{v}) && (\ f\circ g\ \text{の定義より}\ ) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. また, 勝手な元 $\mathbf{u}\in U$ と勝手な実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(\alpha\mathbf{u}) &= f(g(\alpha\mathbf{u})) && (\ f\circ g\ \text{の定義より}\ )\\
&= f(\alpha\cdot g(\mathbf{u})) && (\ g\in \mathrm{Hom}(U,V)\ \text{より}\ )\\
&= \alpha\cdot f(g(\mathbf{u})) && (\ f\in \mathrm{Hom}(V,W)\ \text{より}\ )\\
&= \alpha\cdot(f\circ g)(\mathbf{u}) && (\ f\circ g\ \text{の定義より}\ ) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (26) 式, (27) 式から, $f\circ g : U \to W$ は線型写像になることが分かります.

以上の結果をまとめると,

線型写像の基本的な性質

(イ) $f,g\in \mathrm{Hom}(V,W) \implies f+g\in \mathrm{Hom}(V,W)$

(ロ) $f\in \mathrm{Hom}(V,W),\ a\in\mathbb{R} \implies af\in \mathrm{Hom}(V,W)$

(ハ) $f\in \mathrm{Hom}(V,W),\ g\in \mathrm{Hom}(U,V) \implies f\circ g\in \mathrm{Hom}(U,W)$

というように, **線型写像の同士の「足し算」や, 線型写像の「スカラー倍」, あるいは, 線型写像同士の「合成写像」は, やはり, 線型写像になる**ことが分かります.

第 6 回の問 3 のところで, V, W が有限次元の線型空間である場合には, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $\dim_{\mathbb{R}} W = m$ として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots,\mathbf{f}_m\}$ を,

それぞれ, 勝手にひとつずつ取ってきて, V や W に「番地割り」をして考えてみると, 線型写像 $f : V \to W$ は,

V や W の「番地割り」のもとで線型写像 f は行列 A のように見える

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \\
& V \arrow[ul, phantom, "\ni"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & W \arrow[ur, phantom, "\ni"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"'] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, "\ni"] & \\
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] & & & A\mathbf{x}
\end{tikzcd}
$$

というように, m 行 n 列の「行列の姿」A に「化ける」ことを見ました. そこで, $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ の表現行列が, それぞれ, $A, B \in M(m, n; \mathbb{R})$ であるとして,[16] $f + g$ や af の表現行列がどうなるのかということを考えてみると, それぞれ, $A + B$, aA となることが分かります.[17] すわなち,

線型写像とその表現行列との間の対応 (その１)

$$
\begin{array}{ccc}
\text{線型写像} & & \text{表現行列} \\
\mathrm{Hom}(V, W) & \cong & M(m, n; \mathbb{R}) \\
f & \longleftrightarrow & A \\
g & \longleftrightarrow & B \\
f + g & \longleftrightarrow & A + B \\
af & \longleftrightarrow & aA
\end{array}
$$

というように, **線型写像における「足し算」や「スカラー倍」は, 行列における「足し算」や「スカラー倍」に対応している**ことが分かります. また, 合成写像が考えられるような状況では, $\dim_{\mathbb{R}} U = k$ として,

線型写像とその表現行列との間の対応 (その２)

$$
\begin{array}{rcl}
\text{線型写像} & & \text{表現行列} \\
\mathrm{Hom}(V, W) \ni \ \ f & \longleftrightarrow & A \ \in M(m, n; \mathbb{R}) \\
\mathrm{Hom}(U, V) \ni \ \ g & \longleftrightarrow & B \ \in M(n, k; \mathbb{R}) \\
\mathrm{Hom}(U, W) \ni f \circ g & \longleftrightarrow & AB \in M(m, k; \mathbb{R})
\end{array}
$$

というように, **線型写像における「合成写像」は, 行列における「積」に対応している**こ

[16]第 6 回の問 3 のところと同様に, m 行 n 列の実数行列全体の集合を $M(m, n; \mathbb{R})$ という記号を用いて表わすことにしました.

[17]皆さん, 確かめてみて下さい.

とも分かります.[18] その意味で, 上で述べた (イ), (ロ), (ハ) という線型写像の基本的な性質は, それぞれ,

行列の基本的な性質

(イ) m 行 n 列の行列 A, B を足し算すると, m 行 n 列の行列 $A+B$ が得られる.

(ロ) m 行 n 列の行列 A を a 倍すると, m 行 n 列の行列 aA が得られる.

(ハ) m 行 n 列の行列 A には n 行 k 列の行列 B を (右から) 掛け算をすることができて, 掛け算の結果である AB は m 行 k 列の行列になる.

という行列の基本的な性質を線型写像の立場から見直したものであると考えることができます.

そこで, これらの基本的な性質を用いて, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ として, $f \in V$ に対して,

$$L(f) = a_n \frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f$$

という式によって定まる写像

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 : V \to V$$

が線型写像になることを確かめてみることにします.

上で見たように,「微分写像」

$$D = \frac{d}{dx} : V \to V$$

は線型写像になることが分かります. すなわち,

$$D \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{28}$$

となることが分かります. よって, (28) 式と (ハ) という性質から,

$$D^2 = D \circ D \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{29}$$

となることが分かります. すると, (28) 式, (29) 式と (ハ) という性質から,

$$D^3 = D \circ D^2 \in \mathrm{Hom}(V, V)$$

となることが分かります. 以下, 同様の議論を繰り返すと, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{30}$$

となることが分かります.[19] したがって, (30) 式と (ロ) という性質から, $a_n \in \mathbb{R}$ として,

$$a_n D^n = a_n \frac{d^n}{dx^n} \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{31}$$

[18] 皆さん, 確かめてみて下さい.

[19] 数学的帰納法を用いると, スッキリと議論することができます. また, $n = 0$ に対しては, $f \in V$ に対して, f 自身を対応させる恒等写像 (identity mapping) $D^0 = id_V : V \to V$ が線型写像であることを, 別口で確かめておく必要があります.

となることが分かります. よって, (31) 式と (イ) という性質から, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ として,

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0 \in \mathrm{Hom}(V, V)$$

となることが分かります. こうして,

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 : V \to V \tag{32}$$

という写像が線型写像になることが分かりました. 一般に, (32) 式のような写像を**定数係数の線型微分作用素**と呼んだりします.

さらに, $a(x) \in V$ として, 関数 $a(x)$ を掛け算する操作を,

$$a(x) : V \to V$$

と表わすことにします.[20] すると, $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ として,

$$a(x)\{f(x) + g(x)\} = a(x)f(x) + a(x)g(x)$$
$$a(x)\{\alpha f(x)\} = \alpha \cdot a(x)f(x)$$

となることが分かりますから,

$$a(x) \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{33}$$

となることが分かります. よって, (30) 式, (33) 式と (ハ) という性質から, $a_n(x) \in V$ として,

$$a_n(x) \circ D^n = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} \in \mathrm{Hom}(V, V) \tag{34}$$

となることが分かります. そこで, (31) 式の代わりに (34) 式を用いて, 上と同じ議論を繰り返すと, $n \in \mathbb{N}$, $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x) \in V$ として,

$$L = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) : V \to V \tag{35}$$

という写像も線型写像になることが分かります. より一般に, (35) 式のような写像を**線型微分作用素**と呼んだりします.

このような言葉を用意すると, 例えば, 問 1 で考えた

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{36}$$

という微分方程式も,

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 2$$

として,

$$L(f) = 0$$

[20] この記号の使い方は少し紛らわしいですが, 以下の議論の中では誤解の恐れはないのではないかと思います. 気になる方は, $a(x) \in V$ に対して, $a(x)$ を掛け算する操作 (multiplication) を,

$$m_{a(x)} : V \to V$$

と表わすというように記号を変えて議論してみて下さい.

というように簡明な形で表現することができます. また, $L: V \to V$ が線型写像であることに注意すると, $f, g \in V$, $a \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{cases} L(f) = 0, L(g) = 0 \implies L(f+g) = L(f) + L(g) = 0 + 0 = 0 \\ L(f) = 0 \implies L(af) = a \cdot L(f) = a \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから, (36) 式の微分方程式の解全体の集合

$$W_1 = \{ f \in V \mid f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \ \}$$

が V の線型部分空間になるということが, 上のような形式的な議論で簡単に分かることになります.

全く同様に,

$$L = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

を線型微分作用素として,

$$L(f) = 0$$

という微分方程式, すなわち,

$$a_n(x)\frac{d^n f}{dx^n}(x) + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x) + \cdots + a_1(x)\frac{df}{dx}(x) + a_0(x)f(x) = 0 \tag{37}$$

という微分方程式の解全体の集合を,

$$W = \{ f \in V \mid a_n(x)f^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0 \ \}$$

と表わすことにすると, W は V の線型部分空間になることが分かります.

一般に, (37) 式のような微分方程式を**線型常微分方程式**と呼びますが, このように**「線型常微分方程式の解全体の集合を考える」ということが, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出す代表的な方法である**と言えます. ただし, (37) 式のような「定数係数とは限らない線型常微分方程式」の場合には, 一般には, 微分方程式の解を知られている関数を用いて書き下すことができなくなってしまいますし, 微分方程式の様子をより良く理解するためには, 微分方程式自身を複素数の世界に拡張して, 微分方程式の解の方も (複素平面上の各点における関数の値がただひとつに定まるとは限らない)「多価関数」として考察する方がより自然であるというような込み入った事情も出てきてしまいます. そこで, 線型代数学の教科書では, このような込み入った事情の現われない「定数係数の線型常微分方程式」を用いて, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出すことが多いわけです. 例えば, $n \in \mathbb{N}$ として, (実数係数の) n 次式以下の多項式全体の集合

$$V_n = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \ \}$$

は, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ の有限次元の線型部分空間の代表例ですが,

$$\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x) = 0 \iff f(x) \text{ は } n \text{ 次式以下の多項式}$$

となることに注意すると,

$$V_n = \{ f \in V \mid f^{(n+1)}(x) = 0 \ \}$$

というように, V_n を定数係数の線型常微分方程式の解空間として表わすこともできるということが分かります.

次に, 数列の空間 $V_{\mathbb{N}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出す代表的な方法について考えてみることにします. 上で見たように, 一変数関数の場合には, **「線型常微分方程式の解空間を考える」**ということが, 一変数関数の空間 $V_{\mathbb{R}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出す代表的な方法です. 全く同様に, 数列の場合には, **「線型漸化式の解空間を考える」**ということが数列の空間 $V_{\mathbb{N}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出す代表的な方法です. そこで, 一変数関数の場合と同様に, 数列に対する線型漸化式を線型写像の立場から見直してみることにします.

さて, 問 1 では,

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{38}$$

という漸化式を考えて, (38) 式の漸化式の解空間

$$V_1 = \{ \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \mid a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \ (n = 2, 3, 4 \cdots) \ \}$$

について考えてみました. いま, $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して, (38) 式の漸化式を順番に書き下してみると,

$$\begin{aligned} a_2 &- 3a_1 + 2a_0 = 0 \\ a_3 &- 3a_2 + 2a_1 = 0 \\ a_4 &- 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが分かります. そこで, 第 6 回の問 2 のところと同様に,

$$V_{\mathbb{N}} \ni \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \ \longleftrightarrow \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\infty} \tag{39}$$

と対応させて, これらの式を**「∞ 個の成分を持つベクトル**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

に対する ∞ 個の方程式からなる連立一次方程式」であると解釈してみます. すると, (39) 式の対応のもとで,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix},\ \mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

として, V_1 は,

$$V_1'=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^\infty \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\ \}$$

という「連立一次方程式」の解空間と対応することが分かります. ここで, (39) 式の対応のもとで,

$$V_{\mathbb{N}}\ni\{a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}\ \longleftrightarrow\ A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} a_2-3a_1+2a_0 \\ a_3-3a_2+2a_1 \\ a_4-3a_3+2a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^\infty$$

と対応していることに注意すると, V_1 は, $\mathbf{a}=\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}\in V_{\mathbb{N}}$ に対して,

$$F(\mathbf{a})=\{a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{40}$$

という式によって定まる写像

$$F:V_{\mathbb{N}}\to V_{\mathbb{N}}$$

を用いて,

$$V_1=\{\mathbf{a}=\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}\in V_{\mathbb{N}} \mid F(\mathbf{a})=\mathbf{0}\ \} \tag{41}$$

というように簡明な形で表わせることが分かります.

そこで, いま, 問 1 の (2) で考えた「数列の番号をひとつずらす」写像を考えてみます. すなわち, $\mathbf{a}=\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}\in V_{\mathbb{N}}$ に対して,

$$T(\mathbf{a})=\{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{42}$$

という式によって定義される写像

$$T:V_{\mathbb{N}}\to V_{\mathbb{N}}$$

を考えてみます.[21] このとき,

$$T(\mathbf{a})=\{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{43}$$

[21] 問 1 では, 例えば, (5) で $f_{T\mathbf{a}}(x)$ を考えるときなどに, 括弧が重なって式が見づらくなることを避けるために, $T(\mathbf{a})$ でなく, 単に, $T\mathbf{a}$ と表わしましたが, ここでは, 以下の議論が見やすくなるように, $T(\mathbf{a})$ というように, きちんと括弧を付けて表わすことにしました.

と表わすことにすると, (42) 式から,

$$b_n = a_{n+1} \tag{44}$$

となることが分かります. そこで, (43) 式の両辺に, さらに, T を施してみると,

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{a}) &= T(T(\mathbf{a})) \\ &= \{b_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} && \text{((43) 式と } T \text{ の定義から)} \\ &= \{a_{n+2}\}_{n=0,1,2,\cdots} && \text{((44) 式から)} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$T^2(\mathbf{a}) = \{a_{n+2}\}_{n=0,1,2,\cdots} \tag{45}$$

となることが分かります. いま, 写像 $F : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$ は,

$$F(\mathbf{a}) = \{a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

という式によって定義されていましたが, (42) 式, (45) 式に注意すると,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \{a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{a_{n+2}\}_{n=0,1,2,\cdots} - 3 \cdot \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} + 2 \cdot \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= T^2(\mathbf{a}) - 3 \cdot T(\mathbf{a}) + 2 \cdot \mathbf{a} \\ &= (T^2 - 3T + 2)(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. よって, 写像 F は T を用いて,

$$F = T^2 - 3T + 2 \tag{46}$$

というように表わせることが分かります.

そこで,「数列の番号をひとつずらす」写像 $T : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$ について考えてみます. このとき, T は線型写像となることが, 次のようにして分かります. いま,

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}, \quad \mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}}$$

とすると,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \{a_{n+1} + b_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} + \{b_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{47}$$

となることが分かります. 全く同様にして, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますから,

$$
\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{a}) &= \{\alpha \cdot a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \alpha \cdot \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \alpha \cdot T(\mathbf{a}) \qquad (48)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (47) 式, (48) 式から, $T : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$ は線型写像となることが分かります. すなわち,

$$T \in \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{N}}, V_{\mathbb{N}}) \qquad (49)$$

となることが分かります.

そこで, (49) 式と線型写像の基本的な性質を用いて, 上で線型微分作用素を考察したときの議論を繰り返すと,

$$F = T^2 - 3T + 2 \in \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{N}}, V_{\mathbb{N}})$$

となることが分かります. すなわち, $F : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$ は線型写像となることが分かります. すると, 線型常微分方程式のときと同様に, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{cases}
F(\mathbf{a}) = \mathbf{0},\ F(\mathbf{b}) = \mathbf{0} \implies F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \\
F(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \implies F(\alpha\mathbf{a}) = \alpha \cdot F(\mathbf{a}) = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{cases}
$$

となることが分かりますから,

$$V_1 = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}} \mid F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\ \}$$

が $V_{\mathbb{N}}$ の線型部分空間となることが, 上のような形式的な議論で簡単に分かることになります.[22]

より一般に, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ として,

$$F = \alpha_k T^k + \alpha_{k-1} T^{k-1} + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$$

とすると, 同様にして, F は線型写像になることが分かりますから,

$$V = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}} \mid F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\ \} \qquad (50)$$

は $V_{\mathbb{N}}$ の線型部分空間になることが分かります. また,

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{a}) &= (\alpha_k T^k + \alpha_{k-1} T^{k-1} + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0)(\mathbf{a}) \\
&= \alpha_k \cdot T^k(\mathbf{a}) + \alpha_{k-1} \cdot T^{k-1}(\mathbf{a}) + \cdots + \alpha_1 \cdot T(\mathbf{a}) + \alpha_0 \cdot \mathbf{a} \\
&= \alpha_k \cdot \{a_{n+k}\}_{n=0,1,2,\cdots} + \alpha_{k-1} \cdot \{a_{n+k-1}\}_{n=0,1,2,\cdots} + \cdots
\end{aligned}
$$

[22] 問 1 の (1) の解答では, 直接, 漸化式を考察することで, V_1 が $V_{\mathbb{N}}$ の線型部分空間であることを確かめました.

$$
\begin{aligned}
&+ \alpha_1 \cdot \{a_{n+1}\}_{n=0,1,2,\cdots} + \alpha_0 \cdot \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \\
&= \{\alpha_k \cdot a_{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot a_{n+1} + \alpha_0 \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, $F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ という条件は,

$$
\alpha_k \cdot a_{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot a_{n+1} + \alpha_0 \cdot a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{51}
$$

という漸化式を満たすことと同じことであることが分かります. 一般に, (51) 式のような漸化式を**定数係数の線型漸化式**と呼びます. 数列の場合には, (50) 式のように,**「定数係数の線型漸化式の解全体の集合を考える」ということが, 数列の空間 $V_{\mathbb{N}}$ から有限次元の線型部分空間を取り出す代表的な方法である**と言えます.

3　問 1 を見直すと

線型代数学の知識を用いることにより, スッキリと理解することができる代表的な例として, 数列に対する**定数係数の線型漸化式**と, 一変数関数に対する**定数係数の線型常微分方程式**があります. そこで, 皆さんに, これらの事柄について, 線型代数学の立場から理解を深めてもらおうと思って, 問 1 を出題してみました. それぞれの事柄がより良く理解できるように, 4 節, 5 節では,「定数係数の線型漸化式」と「定数係数の線型常微分方程式」を別個に取り上げて, それぞれ, 線型代数学の立場から見直してみようと思いますが, これら二つの事柄の間には密接な関係があります. そこで, これらの事柄について別個に議論する前に, ここでは, 問 1 の例をもとにして, これら二つの事柄の間の関係について見直してみることにします.

一般に, **微分方程式の解を求める代表的な方法として,「数列に対する漸化式を解くことにより, 微分方程式のベキ級数解を求める」という方法があります**. これは, 大まかに言って, 次のようなものです. まず, 関数 $f(x)$ が,

$$
f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{52}
$$

というようにベキ級数の形をしていると仮定して,

微分方程式のベキ級数解を求める方法

(i) (52) 式を微分方程式に代入してから, x のベキについて整理して, それぞれの x^k の係数を 0 とおくことにより, 係数 a_n たちに対する漸化式を求める.

(ii) (i) で求めた漸化式を解くことにより, 係数 a_n たちを求めて, これらの係数を用いて, (52) 式により, 微分方程式のベキ級数解を求める.

というものです. ただし, (52) 式のベキ級数をどのような形で表わすのかということについては任意性があり, 考えている微分方程式のタイプに応じてベキ級数の表示を上手く選んでやると, 対応する漸化式が少し見やすくなったりします. 例えば, 我々が問題にしている定数係数の線型常微分方程式の場合には, 問 1 の (4) で見たように,

$$
f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots \tag{53}
$$

というように, Taylor 展開に合わせたベキ級数の表示を用いると, 対応する漸化式が定数係数の線型漸化式になり, 微分方程式と漸化式の間の対応が見やすくなります.

そこで, 定数係数の線型常微分方程式の場合に, 上で述べた方法を具体的に見てみることにします. 話を具体的にするために, 以下では, 問 1 で取り上げた

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{54}$$

という微分方程式をもとにして考えてみることにします. いま, 関数 $f(x)$ が, (53) 式のようにベキ級数の形に表わせると仮定して, (53) 式を (54) 式の左辺に代入して, x のベキについて整理してみます. すると, 問 1 の (4) で見たように,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n}{n!}\, x^n \tag{55}$$

となることが分かります. ここで, (55) 式の左辺の関数が 0 という定数関数となるためには, (55) 式の右辺に現われるベキ級数の各係数が 0 とならなければいけませんから,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \iff a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{56}$$

となることが分かります. こうして, (54) 式の微分方程式を解く問題が, (56) 式の右辺の漸化式を解く問題に帰着することが分かります. そこで, この漸化式を具体的に解いてみると, 4 節で詳しく見るように,

$$\begin{aligned} a_n &= (2^n - 1)a_1 + (2 - 2^n)a_0 \\ &= (2a_0 - a_1) \cdot 1 + (a_1 - a_0) \cdot 2^n \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$c_0 = 2a_0 - a_1,\ c_1 = a_1 - a_0$$

として,

$$a_n = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 2^n \tag{57}$$

と表わせることが分かります. よって, (57) 式を (53) 式に代入することで,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 2^n}{n!}\, x^n \\ &= c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + c_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= c_0 e^x + c_1 e^{2x} \end{aligned}$$

というように, (54) 式の微分方程式の解が求まるというわけです. ただし, たくさんの事柄が頭の中で交錯して, 皆さんの考察が進まなくなってもいけないと思い, 問 1 では, (56)

式の「$\Longleftarrow$」という方向だけを確かめるという形で出題することにしました．また, 微分方程式の解の方も, 具体的な数列に対して考察を進める方が考えやすいのではないかと思い, 皆さんが求めた具体的な数列 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V_1$ に対して, 対応する解 $f_{\mathbf{e}_1}(x), f_{\mathbf{e}_2}(x)$ を求めてもらうという形で出題することにしました.

そこで, **「定数係数の線型漸化式」と「定数係数の線型常微分方程式」の間の関係**をより良く理解するために, (56) 式の対応を, 線型代数学の立場から見直してみることにします. そのために,

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は何度でも微分できる関数 }\}$$

として, 問 1 の (3) と同様に,

$$V_\mathbb{N} \ni \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \longleftrightarrow f_\mathbf{a}(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (58)$$

という対応により,「数列全体の空間」$V_\mathbb{N}$ と「(何度でも微分できる) 一変数関数全体の空間」$C^\infty(\mathbb{R})$ を「同一視」して考えてみることにします.[23]

いま,

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}, \quad \mathbf{b} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_\mathbb{N}$$

とすると,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \\ &= f_\mathbf{a}(x) + f_\mathbf{b}(x) \end{aligned} \quad (59)$$

となることが分かります．全く同様にして, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} f_{\alpha\mathbf{a}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot a_n}{n!} x^n \\ &= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\ &= \alpha \cdot f_\mathbf{a}(x) \end{aligned} \quad (60)$$

となることが分かります．よって, (59) 式, (60) 式から, (58) 式の「同一視」のもとで,

[23] 厳密なことを言えば, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_\mathbb{N}$ としたときに, 対応する関数 $f_\mathbf{a}(x)$ は, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, その値がきちんと定まるとは限らないという問題や, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ としたときに, 関数 $f(x)$ は, (53) 式のように「多項式の姿」に「化ける」とは限らないというような問題がありますが, ここでは, こうした細かい問題は気にせずに, 大らかに考えることにします.

「数列の世界」と「一変数関数の世界」の間の対応 (その 1)

数列の世界		一変数関数の世界
$V_{\mathbb{N}}$	“$\cong$”	$C^\infty(\mathbb{R})$
$\mathbf{a}$	$\longleftrightarrow$	$f_{\mathbf{a}}(x)$
$\mathbf{b}$	$\longleftrightarrow$	$f_{\mathbf{b}}(x)$
$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$\longleftrightarrow$	$f_{\mathbf{a}}(x)+f_{\mathbf{b}}(x)$
$\alpha\mathbf{a}$	$\longleftrightarrow$	$\alpha\cdot f_{\mathbf{a}}(x)$

というように,「数列の世界」での「足し算」や「スカラー倍」が「一変数関数の世界」での「足し算」や「スカラー倍」に対応することが分かります.[24]

また,「数列の番号をひとつずらす」線型写像

$$T : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$$

を考えると, 問 1 の (5) で見たように,

$$f_{T\mathbf{a}}(x) = \frac{df_{\mathbf{a}}}{dx}(x) \tag{61}$$

となることが分かります. よって,

$$T : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}} \ \longleftrightarrow \ D = \frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \tag{62}$$

というように,「数列の世界」で「番号をひとつずらす操作」が「一変数関数の世界」で「微分する操作」に対応していることが分かります. いま, (58) 式の右辺のベキ級数表示と関数 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ の Taylor 展開の式

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

を見比べると, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対応する数列 $\mathbf{a}_{f(x)} \in V_{\mathbb{N}}$ が,

$$\mathbf{a}_{f(x)} = \{f^{(n)}(0)\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}} \tag{63}$$

という式で与えられることが分かります. 問 1 では, (61) 式を確かめることにより, (62) 式のような対応があることを示しましたが, (63) 式をもとにして考えると,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}_{f(x)}) &= \{f^{(n+1)}(0)\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \left\{ \left(\frac{df}{dx}\right)^{(n)}(0) \right\}_{n=0,1,2,\cdots} \\ &= \mathbf{a}_{\frac{df}{dx}(x)} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (62) 式のような対応があることが, より直感的に納得できるかもしれません.

[24] 上で注意したように, 厳密なことを言うと, (58) 式の「同一視」には細かい問題点があるので, $V_{\mathbb{N}}$ と $V_{\mathbb{R}}$ の「同一視」も「$V_{\mathbb{N}}$ “$\cong$” $V_{\mathbb{R}}$」というように「“ ”」を付けて表わすことにしました.

さて, 2 節で見たように,

$$\begin{aligned} L &= \frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 2 \\ &= D^2 - 3D + 2 \end{aligned}$$

とすると, (54) 式の微分方程式は,

$$L(f) = 0$$

というように簡明な形で表わすことができます. いま, (61) 式から,

$$D(f_{\mathbf{a}}) = f_{T(\mathbf{a})}$$

となることと, (58) 式の「同一視」のもとで,「数列の世界」での「足し算」や「スカラー倍」が「一変数関数の世界」での「足し算」や「スカラー倍」に対応することに注意すると, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_{\mathbb{N}}$ として,

$$\begin{aligned} L(f_{\mathbf{a}}) &= (D^2 - 3D + 2)f_{\mathbf{a}} \\ &= D^2 f_{\mathbf{a}} - 3Df_{\mathbf{a}} + 2f_{\mathbf{a}} \\ &= D(D(f_{\mathbf{a}})) - 3(D(f_{\mathbf{a}})) + 2f_{\mathbf{a}} \\ &= D(f_{T(\mathbf{a})}) - 3(f_{T(\mathbf{a})}) + 2f_{\mathbf{a}} \\ &= f_{T^2(\mathbf{a})} - f_{3T(\mathbf{a})} + f_{2\mathbf{a}} \\ &= f_{T^2(\mathbf{a}) - 3T(\mathbf{a}) + 2\mathbf{a}} \\ &= f_{(T^2 - 3T + 2)(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$F = T^2 - 3T + 2 : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}} \ \longleftrightarrow \ L = D^2 - 3D + 2 : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$$

と対応していることが分かります.

以上から, (58) 式の「同一視」のもとで, それぞれの空間上の線型写像の間には,

「数列の世界」と「一変数関数の世界」の間の対応 (その 2)

数列の世界		一変数関数の世界
$V_{\mathbb{N}}$	“$\cong$”	$C^{\infty}(\mathbb{R})$
番号のずらし : $T : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$	$\longleftrightarrow$	微分 : $D = \frac{d}{dx} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$
$F = T^2 - 3T + 2 : V_{\mathbb{N}} \to V_{\mathbb{N}}$	$\longleftrightarrow$	$L = D^2 - 3D + 2 : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$
線型漸化式 : $F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	$\longleftrightarrow$	線型常微分方程式 : $L(f) = 0$

というような対応があることが分かります. また, このような立場から眺めると, 上で述べた「微分方程式のベキ級数解を求める方法」とは, 今の場合, **(58) 式の「同一視」のもとで, 定数係数の線型常微分方程式 $L(f) = 0$ を, 対応する定数係数の線型漸化式 $F(\mathbf{a}) = 0$ に置き換えて解く**ということであることが分かります.

このように,**「数列の世界」と「関数の世界」は, 数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対して, 変数 x を導入して,**

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n}$$

というような関数[25]**を考えることによりピッタリと対応している**ことが分かります. すなわち, これらは**本質的に同じ事柄の異なる表現である**と考えることができます. 皆さんに「微分方程式のベキ級数解を求める方法」を紹介するという目的のために, ここでは「微分方程式を解く問題」を「漸化式を解く問題」に帰着するという形で説明しましたが, 一方の見方がもう一方の見方より, より優れているということではありません. 実際には, 与えられた微分方程式に対して, Taylor 展開の係数たちが満たす漸化式を解くことにより, 微分方程式の解を見つけることができたり, 逆に, 母関数がきれいな形の関数で表わせるということを見い出すことで, 漸化式の意味がより明確に理解できたりするというように, **必要に応じて両方の面から問題を眺めてみることにより, より良い理解を目指す**ということが大切です.

4 定数係数の線型漸化式について

さて, 3 節でも説明しましたが, 問 1 で V_1 や V_2 を定義するときに用いた

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{64}$$

や

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{65}$$

というような形の漸化式を**定数係数の線型漸化式**と呼びます. そこで, ここでは**「定数係数の線型漸化式の解法」を線型代数学の立場から見直してみる**ことにします. 一般の定数係数の線型漸化式の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, ここでは, (64) 式の漸化式をもとにして説明してみることにします.

第 6 回の問 2 のところでも説明しましたが, (64) 式のような漸化式を線型代数学の立場から見直すためのアイデアは, **(64) 式の漸化式を「(a_{n-1}, a_{n-2}) から a_n が決まる」と読まないで,「わざわざ a_{n-1} を付け加えて」,「(a_{n-1}, a_{n-2}) から (a_n, a_{n-1}) が決まる」というように読み替えてみる**ということです. すなわち, (64) 式の漸化式を,

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \iff a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \tag{66}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases} \tag{67}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{68}$$

というように書き直して考えてみるということです.

[25] このような関数を, 数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対する**母関数**と呼んだりします.

普通は, (64) 式の漸化式を (66) 式のように書き直して, (66) 式を「(a_{n-1}, a_{n-2}) から a_n が決まる」と読むわけですが, **わざわざ,**

$$\boldsymbol{a_{n-1} = a_{n-1}}$$

という「当たり前の式」を付け加えて, (67) 式のように読んでみるというのが, 行列を用いて漸化式を見直すときの一番のポイントです. すなわち,「(a_{n-1}, a_{n-2}) という**二つの数**から a_n という**ひとつの数**が決まる」と読んでしまうと,「(a_n, a_{n-1}) から a_{n+1} が決まる」という次のステップに進むときに,「a_n という**ひとつの数**に a_{n-1} という数を付け加えて (a_n, a_{n-1}) という**二つの数**にする」という余分な操作をする必要が出てきてしまい, 少しバランスが悪い感じがするのに対して,「(a_{n-1}, a_{n-2}) という**二つの数**から (a_n, a_{n-1}) という**二つの数**が決まる」と読むことにすれば, このような余分な操作をする必要がなくなりますから, **それぞれのステップでどのように「数」が変わってゆくのかということが, より追跡しやすくなる**と期待されるというわけです.

実際,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わすことにすると, (68) 式から, (64) 式の漸化式が,

定数係数の線型漸化式の行列による読み替え (3 項間漸化式の場合)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{69}$$

というように読み直せることが分かりますから, **それぞれのステップで A という行列が掛かるだけ**であることが分かります. すると, (69) 式の漸化式は, すぐに解くことができて,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \cdots \\ &= A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{70}$$

となることが分かります. よって, (70) 式から,

行列で読み替えた定数係数の線型漸化式の一般解 (3 項間漸化式の場合)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

となることが分かりますから, **「定数係数の漸化式を満たす数列の一般項 a_n を求める問題」が「A^n という行列 A の n 乗を求める問題」に帰着する**ことが分かります.

そこで,「A^n を求める問題」に話を移す前に, (69) 式という漸化式の意味について少し考えてみることにします. そのために, 漸化式が 2 項間漸化式の場合にはどのようなことになっているのかということを少し反省してみます. 3 節で見たように, この場合, 定数係数の漸化式とは, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ として,

$$\alpha_1 a_n + \alpha_0 a_{n-1} = 0 \tag{72}$$

という形の漸化式ということになります. ここで, $\alpha_1 = 0$ であるとすると, (72) 式の漸化式は 2 項間漸化式ではなくなってしまいますから, $\alpha_1 \neq 0$ と仮定してよいことが分かります. そこで, (72) 式の両辺を α_1 で割り算して, 改めて,

$$\alpha = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$$

と書くことにすると,[26] 結局, $\alpha \in \mathbb{R}$ として,

定数係数の線型漸化式 (2 項間漸化式の場合)

$$a_n - \alpha a_{n-1} = 0 \tag{73}$$

という形の漸化式が最も一般的な 2 項間の定数係数の線型漸化式であるということになります. すると, (73) 式は,

定数係数の線型漸化式の読み替え (2 項間漸化式の場合)

$$a_n = \alpha a_{n-1} \tag{74}$$

というように書き直すことができますから, (73) 式を満たす数列の一般解は,

定数係数の線型漸化式の一般解 (2 項間漸化式の場合)

$$a_n = \alpha^n a_0 \tag{75}$$

となることが分かります. すなわち, **2 項間漸化式の場合には, 定数係数の線型漸化式の解 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ とは, 公比が α の等比数列に他ならない**ということが分かります.

以上の考察のもとで, (69) 式, (71) 式を, それぞれ, (74) 式, (75) 式と見比べてみると, **3 項間漸化式の場合にも, 定数係数の線型漸化式の解とは「公比」が A の「等比数列」である**と解釈できることが分かります. いま,

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{76}$$

と表わすことにすると, (69) 式, (71) 式は, それぞれ,

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$$
$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1$$

[26] (72) 式を (74) 式のような形に書き直すために, $\alpha = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ ではなく, $\alpha = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ と定めることにしました.

と表わすことができますから, 皆さんにも, **「数列」$\{\mathbf{x}_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は「公比」が A の「等比数列」である**という感じがしてくるかもしれません. 最初に与えられた

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \tag{77}$$

という漸化式だけを眺めていると, 等比数列とは全く関係ないように見えますが, 2 項間漸化式のときとの主な違いは, **数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ 自身ではなく, (76) 式で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上の点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ をもとにして考える方がより自然である**ということと,[27] **「公比」A が実数ではなく, 2 行 2 列の行列になる**ということ,[28] また, **「公比」A を求めるためには, (77) 式の漸化式を (67) 式のように書き直す必要がある**ということだけで, この場合にも, **定数係数の線型漸化式の解は, やはり,「等比数列」である**ということが分かります.

ここでは, 3 項間漸化式の場合に説明しましたが, 一般に, n 項間漸化式の場合にも全く同様に議論することができて, **定数係数の線型漸化式の解は「等比数列」である**ということが分かります. 例えば,

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0, \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \tag{78}$$

というような 4 項間漸化式の場合であれば,

$$\begin{aligned}
a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0 \iff& a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \\
\iff& \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \\ a_{n-2} = a_{n-2} \end{cases} \\
\iff& \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

というように書き直すことができますから,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として, (78) 式の漸化式を,

定数係数の線型漸化式の行列による読み替え (4 項間漸化式の場合)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} \tag{79}$$

というように読み直せることが分かります. よって, (79) 式から,

[27] 2 項間漸化式の場合にも,「$\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は数直線 $\mathbb{R}$ 上の点列である」と解釈することができます.
[28] 2 項間漸化式の場合にも,「公比 α は 1 行 1 列の行列である」と解釈することができます.

行列で読み替えた定数係数の線型漸化式の一般解 (4 項間漸化式の場合)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから, この場合にも, **「定数係数の漸化式を満たす数列の一般項 a_n を求める問題」が「A^n という行列 A の n 乗を求める問題」に帰着する**ことが分かります.

そこで, 次に, **「$n \in \mathbb{N}$ として, 与えられた正方行列 A に対して, A^n を求める」という問題**について考えてみることにします. この問題を勝手なサイズの正方行列 A に対して, 一般的に解決するためには, **「与えられた正方行列 A に対して,**

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = \Lambda} \tag{80}$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を見つけよ」という「行列の標準形の問題」に帰着して考えるのが普通です. すなわち,「行列の標準形の問題」が解決されたと仮定すると, (80) 式から,

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

と表わせることが分かりますから,

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})^n \\ &= \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{n \text{ 個}} \\ &= P\Lambda^n P^{-1} \end{aligned} \tag{81}$$

となることが分かります. よって, **「見やすい形」の行列 Λ として, 例えば,「対角行列」のように, Λ^n が直接計算できるような行列を取ることができる**ということが分かれば, 後は, (81) 式を用いて, A^n を求めることができるというわけです.

このように, **「行列の標準形の問題」を解決するということが, 行列をより良く理解するための大きな鍵となっている**ので, 線型代数学の教科書でも「行列の標準形の問題」の解決を最終目標としていることが多いです. そこで, この演習でも, 与えられた正方行列 A を (80) 式のように変形するということの意味や, 考えている設定に応じて「行列の標準形の問題」がどのような形で解決されるのかということについて, 順番に取り上げていこうと思います. その意味で, 一般のサイズの正方行列 A に対して, A^n を求めるという問題の解決は少し先送りすることにして, ここでは, **A が 2 行 2 列の行列の場合に, A^n を求めるという問題について考えてみる**ことにします. 第 6 回の問 2 のところでも見たように, A が 2 行 2 列の行列である場合には, **Cayley-Hamilton の定理**を用いて, 比較的簡単に, A^n を求めることができます.

第 6 回の問 1 のところで見たように, 一般に, m 行 m 列の行列 A に対して,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(t) = \det(tI - A) \tag{82}$$

という式によって定まる m 次の多項式 $\varphi_A(t)$ を行列 A の**特性多項式**と呼びます. そこで, いま, $c_0, c_1, \cdots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$ として, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ を,

$$\varphi_A(t) = t^m + c_{m-1}t^{m-1} + \cdots + c_1 t + c_0 \tag{83}$$

と表わすことにします. このとき, 特性多項式 $\varphi_A(t)$ の変数 t のところに, もともとの行列 A を代入して,

$$\varphi_A(A) = A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I$$

という行列を考えてみることができますが, **不思議なことに,**

Cayley-Hamilton の定理

$$\boldsymbol{\varphi_A(A) = O} \tag{84}$$

というように, $\boldsymbol{\varphi_A(A)}$ という行列は常に零行列になるということが知られていて, この事実を, **Cayley-Hamilton の定理**と呼びます. ここで, **(84) 式は, (82) 式の右辺に現われる変数 $\boldsymbol{t}$ のところへ行列 $\boldsymbol{A}$ をそのまま代入することで得られる**

$$\begin{aligned}\mathbf{det}(\boldsymbol{AI} - \boldsymbol{A}) &= \mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}) \\ &= \mathbf{det}\boldsymbol{O} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned} \tag{85}$$

という式とは意味が異なるということに注意して下さい. すなわち, **(85) 式は, 単に,**

$$(\boldsymbol{AI} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$$

という零行列の行列式が 0 という「数」になるということを主張しているに過ぎないのに対して, **(84) 式は, (82) 式の右辺の行列式を, (83) 式のように「多項式の姿」で表わした上で, 変数 $\boldsymbol{t}$ のところに行列 $\boldsymbol{A}$ を代入することによって得られる $\boldsymbol{\varphi_A(A)}$ という「行列」が「零行列」になるということを主張している**わけです.

例えば, V_1 の例では,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{86}$$

となりますから,

$$\begin{aligned}\varphi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t \end{vmatrix} \\ &= (t-3)t + 2 \\ &= t^2 - 3t + 2 \\ &= (t-1)(t-2)\end{aligned} \tag{87}$$

となることが分かります. そこで, (87) 式で与えられる多項式 $\varphi_A(t)$ の変数 t のところへ, (86) 式で与えられる行列 A を代入してみると,

$$\varphi_A(A) = (A - I)(A - 2I)$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

全く同様にして, V_2 の例では,

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{88}
$$

となりますから,

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} \\
&= (t-2)t + 1 \\
&= t^2 - 2t + 1 \\
&= (t-1)^2
\end{aligned} \tag{89}
$$

となることが分かります. そこで, (89) 式で与えられる多項式 $\varphi_A(t)$ の変数 t のところへ, (88) 式で与えられる行列 A を代入してみると,

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(A) &= (A - I)^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

より一般に, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として,

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{90}
$$

としてみると, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} \\
&= (t-a)(t-d) - bc \\
&= t^2 - (a+d)t + (ad - bc)
\end{aligned} \tag{91}
$$

となることが分かります. そこで, (91) 式で与えられる多項式 $\varphi_A(t)$ の変数 t のところへ, (90) 式で与えられる行列 A を代入してみると,

$$
\varphi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & (a+d)b \\ (a+d)c & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[29]

このような等式が, 一般の m 行 m 列の行列 A に対して成り立つということを, (84) 式は主張しているのですが, 一般のサイズの場合の証明を与えるためには少し準備を要しますので, 後で, **行列の三角化**について取り上げるときに立ち返って考えてみることにしようと思います.

さて, 行列 A が 2 行 2 列の行列であるときには, この Cayley-Hamilton の定理を用いることで, 次のように, 比較的簡単に A^n を求めることができます.

まず, V_1 の例について考えてみます. すると, 上で見たように, この場合には, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ は,

$$\varphi_A(t) = (t-1)(t-2)$$

となることが分かりますから, Cayley-Hamilton の定理から,

$$(A-I)(A-2I) = O \tag{92}$$

となることが分かります. そこで, いま, (92) 式を,

$$A(A-2I) = (A-2I) \tag{93}$$

という形に書き換えてみます.[30] すると, (93) 式から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
A^n(A-2I) &= A^{n-1}A(A-2I) \\
&= A^{n-1}(A-2I) && (\text{ (93) 式から }) \\
&= A^{n-2}A(A-2I) \\
&= A^{n-2}(A-2I) && (\text{ (93) 式から }) \\
&= \cdots \\
&= (A-2I)
\end{aligned} \tag{94}
$$

となることが分かります.[31] あるいは, (93) 式を, **「$(A-2I)$ という行列にとっては, A という行列は 1 という数に見える」**と解釈して, そうだとすれば, **「A^n という行列は 1^n という数に見えるはずである」**と考えて, (94) 式の結論を導くこともできます.

[29] 上と同様に, $\varphi_A(x) = (t-a)(t-d) - bc$ という表示を用いて, $\varphi_A(A) = (A-aI)(A-dI) - bcI$ という行列を計算するという方針を取ると少し計算が楽になります.

[30] すなわち, $(A-2I)$ という行列だけを**「ひと塊の行列」**と思うということです.

[31] n に関する数学的帰納法を用いると, スッキリと議論することができます.

全く同様にして, (92) 式を,

$$A(A-I) = 2(A-I) \tag{95}$$

という形に書き換えてみます.[32] すると, 前と同様に, (95) 式から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} A^n(A-I) &= A^{n-1}A(A-I) \\ &= A^{n-1} \cdot 2(A-I) && (\text{ (95) 式から }) \\ &= 2A^{n-1}(A-I) \\ &= 2A^{n-2}A(A-I) \\ &= 2A^{n-2} \cdot 2(A-I) && (\text{ (95) 式から }) \\ &= 2^2A^{n-2}(A-I) \\ &= \cdots \\ &= 2^n(A-I) \end{aligned} \tag{96}$$

となることが分かります. あるいは, 前と同様に, こちらも, (95) 式を, **「$(A-I)$ という行列にとっては, A という行列は 2 という数に見える」**と解釈して, そうだとすれば, **「A^n という行列は 2^n という数に見えるはずである」**と考えて, (96) 式の結論を導くこともできます. よって, (94) 式, (96) 式から,

$$A^{n+1} - 2A^n = (A-2I) \tag{97}$$

$$A^{n+1} - A^n = 2^n(A-I) \tag{98}$$

となることが分かりますから, (98) 式から (97) 式を引き算することで,

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n(A-I) - (A-2I) \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{99}$$

となることが分かります.[33] すると, (71) 式, (99) 式から,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n-1 & 2-2^n \\ 2^{n-1}-1 & 2-2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[32] すなわち, $(A-I)$ という行列だけを**「ひと塊の行列」**と思うということです.

[33] 以上の計算は, 皆さんが 3 項間の定数係数の線型漸化式を解くときに行なっている「お馴染みの手続き」を, 線型代数学の立場から見直したものに他なりません.

となることが分かりますから, V_1 を定義するときに用いた

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

という定数係数の線型漸化式の一般解は,

$$a_n = (2^n - 1)a_1 + (2 - 2^n)a_0$$

という式で与えられることが分かります.

より一般に, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ が,

$$\varphi_A(t) = (t - \lambda)(t - \mu), \quad \lambda \neq \mu$$

というように, 異なる二つの複素数 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ を用いて因数分解される場合には, Cayley-Hamilton の定理から,

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) = O \tag{100}$$

となることが分かります. そこで, (100) 式を,

$$\begin{cases} A(A - \mu I) = \lambda(A - \mu I) \\ A(A - \lambda I) = \mu(A - \lambda I) \end{cases}$$

というように二通りに書き直して, 同様の議論を行なうことで,

2 行 2 列の行列 A に対する A^n の具体形（異なる固有値 λ, μ を持つ場合）

$$A^n = \frac{\lambda^n(A - \mu I) - \mu^n(A - \lambda I)}{\lambda - \mu} \tag{101}$$

となることが分かります.[34] したがって, 後は, (101) 式の右辺に, A や λ, μ などの具体的な数値を代入することで, A^n が求まることになります.

次に, V_2 の例について考えてみます. すると, 上で見たように, この場合には, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ は,

$$\varphi_A(t) = (t - 1)^2$$

となることが分かりますから, Cayley-Hamilton の定理から,

$$(A - I)^2 = O \tag{102}$$

となることが分かります. よって, (102) 式から, 今の場合, **$(A - I)$ という行列はベキ零行列になる**ことが分かります. そこで, 第 6 回の問 2 のところでも見たように, 行列 A を,

$$A = I + (A - I)$$

というように**「スカラー行列」と「ベキ零行列」の和の形**に変形してから二項展開してみることで,

$$A^n = \{I + (A - I)\}^n$$

[34] 皆さん, 確かめてみて下さい.

$$
\begin{aligned}
&= I + n(A-I) + \frac{n(n-1)}{2}(A-I)^2 + \cdots + (A-I)^n \\
&= I + n(A-I) && \text{((102) 式から)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix} && (103)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すると, (71) 式, (103) 式から,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & 1-n \\ n-1 & 2-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, V_2 を定義するときに用いた

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

という定数係数の線型漸化式の一般解は,

$$a_n = na_1 + (1-n)a_0$$

という式で与えられることが分かります.

より一般に, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ が,

$$\varphi_A(t) = (t-\lambda)^2$$

というように, ただひとつの複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を用いて因数分解される場合には, Cayley-Hamilton の定理から,

$$(A - \lambda I)^2 = O$$

となることが分かります. よって, **$(A - \lambda I)$ という行列はベキ零行列になる**ことが分かります. そこで, 上と同様に, 行列 A を,

$$A = \lambda I + (A - \lambda I)$$

というように**「スカラー行列」と「ベキ零行列」の和の形**に変形してから二項展開してみることで,

$$
\begin{aligned}
A^n &= \{\lambda I + (A - \lambda I)\}^n \\
&= \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(A - \lambda I)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

2 行 2 列の行列 A に対する A^n の具体形 (重複する固有値 λ を持つ場合)

$$A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(A - \lambda I) \tag{104}$$

となることが分かります. したがって, 後は, (104) 式の右辺に, A や λ などの具体的な数値を代入することで, A^n が求まることになります.

5 定数係数の線型常微分方程式について

次に, 関数に対する**定数係数の線型常微分方程式**について考えてみることにします. 2 節でも説明しましたが, 問 1 で W_1 や W_2 を定義するときに用いた

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{105}$$

や,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0 \tag{106}$$

というような形の微分方程式を**定数係数の線型常微分方程式**と呼びます. そこで, ここでは**「定数係数の線型常微分方程式の解法」を線型代数学の立場から見直してみる**ことにします. 一般の定数係数の線型常微分方程式の場合でも, 考え方の本質は全く変わりませんから, ここでは, (105) 式の微分方程式をもとにして説明してみることにします.

さて, 4 節で見たように, 定数係数の線型漸化式を線型代数学の立場から見直すためのアイデアは, **与えられた漸化式を「(a_{n-1}, a_{n-2}) から a_n が決まる 」と読まないで, わざわざ, a_{n-1} を付け加えて,「(a_{n-1}, a_{n-2}) から (a_n, a_{n-1}) が決まる 」と読み替えてみる**ということでした. 全く同様に, 定数係数の線型常微分方程式を線型代数学の立場から見直すためのアイデアは, **(105) 式の微分方程式を「関数 $(f'(x), f(x))$ から $f''(x)$ が決まる」と読まないで, わざわざ, $f'(x)$ を付け加えて,「関数 $(f'(x), f(x))$ から $(f''(x), f'(x))$ が決まる」と読み替えてみる**ということです. すなわち, (105) 式の微分方程式を,

$$\begin{aligned}
f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 &\iff f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\
&\iff \begin{cases} f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\ f'(x) = f'(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{107}$$

というように書き直して考えてみるということです.

いま,

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} \tag{108}$$

となることに注意すると,[35] (107) 式, (108) から,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として, **(105) 式の微分方程式が,**

[35] (108) 式が成り立つことについては, 後で,「行列値関数の微分」という一般化した形で説明しようと思います.

定数係数の線型常微分方程式の行列による読み替え（二階の方程式の場合）

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}} \tag{109}$$

というように，一階の常微分方程式の形に書き直すことができることが分かります．さらに，

$$F(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{110}$$

と表わすことにすれば, (109) 式は,

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{111}$$

というように表わすことができますから, (111) 式から,**「定数係数の線型常微分方程式の解を求める問題」が「微分すると A 倍される関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります.

そこで, 状況をより良く理解するために, 漸化式のときと同様に, 微分方程式が一階の常微分方程式の場合にはどのようなことになっているのかということを考えてみることにします．2 節で見たように, この場合, 定数係数の線型常微分方程式とは, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ として,

$$a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \tag{112}$$

という形の微分方程式ということになります．ここで, $a_1 = 0$ であるとすると, (112) 式の微分方程式は一階の常微分方程式ではなくなってしまいますから, $a_1 \neq 0$ と仮定してよいことが分かります．そこで, (112) 式の両辺を a_1 で割り算して, 改めて,

$$a = -\frac{a_0}{a_1}$$

と書くことにすると,[36] 結局, $a \in \mathbb{R}$ として,

定数係数の線型常微分方程式（一階の方程式の場合）

$$f'(x) - af(x) = 0 \tag{113}$$

という形の微分方程式が最も一般的な定数係数の一階線型常微分方程式であるということになります．すると, (113) 式は,

定数係数の線型常微分方程式の読み替え（一階の方程式の場合）

$$\frac{df}{dx}(x) = af(x) \tag{114}$$

というように書き直すことができますから, **一階の微分方程式の場合，定数係数の線型常微分方程式の解 $f(x)$ とは「微分すると a 倍される関数」に他ならない**ということが分かります.

[36] ここで, (112) 式を (114) 式のような形に書き直すために, $a = \frac{a_0}{a_1}$ ではなく, $a = -\frac{a_0}{a_1}$ と定めることにしました.

そこで, このような関数がどれだけあるのかということを考えてみることにします. そのために, (114) 式の微分方程式を直接解いてみることにします. このとき, アイデアは, **(114) 式の両辺を $\boldsymbol{f(x)}$ で割って,**

$$\boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)} = a} \tag{115}$$

という形にしてから, (115) 式の両辺を, それぞれ, 別個に積分してみるということです.

そこで, まず,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\log f(x))'$$

となることに注意して, $x \in \mathbb{R}$ として, (115) 式の左辺を 0 から x まで積分してみます. すると,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \int_0^x (\log f(x))'\,dx \\ &= [\log f(x)]_0^x \\ &= \log f(x) - \log f(0) \\ &= \log \frac{f(x)}{f(0)}\end{aligned} \tag{116}$$

となることが分かります. 一方, (115) 式の右辺を 0 から x まで積分してみると,

$$\begin{aligned}\int_0^x a dx &= [ax]_0^x \\ &= ax\end{aligned} \tag{117}$$

となることが分かります. いま, (115) 式の両辺を 0 から x まで積分してみると,

$$\int_0^x \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_0^x a dx$$

となることが分かりますから, (116) 式, (117) 式と合わせて,

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} = ax$$

となることが分かります. よって,

$$f(x) = f(0)e^{ax} \tag{118}$$

となることが分かります. 以上から, (114) 式の微分方程式の解, すなわち, **「微分すると $\boldsymbol{a}$ 倍される関数」は「指数関数 $\boldsymbol{e^{ax}}$ の定数倍」になる**ということが分かりました.

こうして, (114) 式の微分方程式の一般解が求まったように見えますが, 注意深く見直すと, **上の議論には少し穴がある**ことが分かります. 例えば, 議論の出発点として, (114) 式を (115) 式のように変形しましたが, このような変形が許されるためには, $f(x) \neq 0$ となるということを暗黙のうちに仮定していたということが分かります. したがって, $\boldsymbol{f(x) = 0}$ **と**

いう定数関数解は, 上の議論からはスッポリ抜け落ちてしまっていることが分かります.[37] すると, **上の議論からスッポリ抜け落ちてしまっている解が他にはないのか**ということが気にかかります. また, 我々が問題にしてる二階の微分方程式の場合には, (110) 式のように, 関数 $F(x)$ はベクトル値関数になり, **「(111) 式の両辺を $F(x)$ で割る」という操作は意味をなさなくなります**から, 上の議論と同様にして微分方程式の解を求めるということはできなくなってしまいます.

そこで, 高階の微分方程式の場合にも適用できる形で,

定数係数の線型常微分方程式とその一般解 (一階の方程式の場合)

$$\frac{df}{dx}(x) = af(x) \iff f(x) = f(0)e^{ax} \tag{119}$$

となることをきちんと確かめてみることにします.

まず,「$\Longleftarrow$」について考えてみます. そこで, いま,

$$f(x) = f(0)e^{ax} \tag{120}$$

であるとします. このとき,

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{121}$$

となることに注意して, (120) 式の両辺を微分してみると,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(f(0)e^{ax}) && (\ (120)\text{ 式から }) \\
&= f(0) \cdot \frac{d}{dx}(e^{ax}) \\
&= f(0) \cdot ae^{ax} && (\ (121)\text{ 式から }) \\
&= a \cdot f(0)e^{ax} \\
&= af(x) && (\ (120)\text{ 式から })
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{df}{dx}(x) = af(x)$$

となることが分かります. よって,「$\Longleftarrow$」という主張が成り立つことが分かります.

次に,「$\Longrightarrow$」について考えてみます. そこで, いま, 関数 $f(x)$ が,

$$\frac{df}{dx}(x) = af(x) \tag{122}$$

という微分方程式を満たしているとします. このとき, 確かめたいことは, 関数 $f(x)$ が, (120) 式のように,「指数関数 e^{ax} の定数倍になる」ということになります. もちろん, このことは上でも確かめたわけですが, 上で行なった議論には少し穴がありますし, 我々が考えている場合に議論を拡張することもできませんから, 高階の微分方程式の場合にも一般化できるような形で確認作業を行ないたいというわけです.

[37] (118) 式の表示では, $f(0) = 0$ となる場合として, $f(x) = 0$ という定数関数解も復活しています.

そのためのアイデアは, とても簡単なことではありますが, **(120) 式を,**

$$\boldsymbol{e^{-ax} f(x) = f(0)} \tag{123}$$

という形に書き換えて, (120) 式ではなく, (123) 式が成り立つことを確かめるということです. すなわち,**「(123) 式の右辺 $f(0)$ は定数である」ということに注目して,「$e^{-ax} f(x)$ という関数が定数関数となる」ことを確かめる**ということです.「ある関数 $f(x)$ が指数関数 e^{ax} の定数倍になる」ということを確かめることは大変そうに見えますが,「$e^{-ax}f(x)$ という組み合わせが定数関数になる」ということを確かめることは簡単で, 例えば, **微分して 0 になることを確かめれば済んでしまう**わけです.[38]

そこで, いま, 関数 $f(x)$ が (122) 式の微分方程式を満たしていると仮定して, $e^{-ax} f(x)$ という組み合わせを微分してみます. すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^{-ax}f(x)) &= \frac{d}{dx}(e^{-ax}) \cdot f(x) + e^{-ax} \cdot \frac{df}{dx}(x) && (\text{ ライプニッツ則から }) \\
&= (-a)e^{-ax} \cdot f(x) + e^{-ax} \cdot \frac{df}{dx}(x) && (\text{ (121) 式から }) \\
&= e^{-ax} \cdot (-a)f(x) + e^{-ax} \cdot \frac{df}{dx}(x) \\
&= e^{-ax} \cdot \left\{-af(x) + \frac{df}{dx}(x)\right\} \\
&= e^{-ax} \cdot \{-af(x) + af(x)\} && (\text{ (122) 式から }) \\
&= e^{-ax} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $e^{-ax}f(x)$ は定数関数になることが分かります.[39] すなわち, 適当な実数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$e^{-ax}f(x) = C \tag{124}$$

と表わせることが分かります. そこで,

$$e^0 = 1$$

となることに注意して, (124) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$C = f(0)$$

となることが分かりますから,

$$e^{-ax}f(x) = f(0) \tag{125}$$

となることが分かります. よって, (125) 式の両辺に e^{ax} を掛け算することで,

$$f(x) = f(0)e^{ax}$$

[38] もちろん, このような議論ができる大前提として,**「微分して a 倍される関数」は「指数関数 e^{ax} の定数倍」しかなさそうだ**と思えることが大切です.

[39] 後で, 高階の微分方程式の場合に議論を一般化することを考えて, それぞれの式変形ができる根拠を一緒に書き留めておくことにしました. また, 細かいことを言えば, 二番目の等号では, $a \rightsquigarrow -a$ と置き換えて, (121) 式を適用しました.

となることが分かります．したがって，「$\Longrightarrow$」という主張も成り立つことが分かります．

こうして，(119) 式の主張をきちんと確かめることができました．特に，**(122) 式の微分方程式の解，すなわち，「微分すると a 倍される関数」は「指数関数 e^{ax} の定数倍」しか存在しない**ということが分かりました．

以上の議論をもとにして，我々が問題にしていた

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \tag{126}$$

という微分方程式の場合に考察を戻すことにします．上で見たように，この場合には，

$$F(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として，(126) 式の微分方程式を，

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{127}$$

という形に書き直せることが分かります．したがって，この場合にも，**「定数係数の線型常微分方程式の解を求める問題」が「微分すると A 倍される関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります．すると，「微分すると A 倍される関数 $F(x)$ とは何か」ということを考えてみる必要が出てきますが，一階の常微分方程式の場合との類推で考えると，この場合にも，**「指数関数」e^{Ax} を定義することができて，「微分すると A 倍される関数」は，やはり，「指数関数」e^{Ax} の定数倍になる**のではないかと期待することは自然なことのように思われます．

そこで，まず，「指数関数」e^{Ax} とは何かということを考えてみます．第 2 回の問 3 のところでは，Taylor 展開という考え方を取り上げて，一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」ということを考えてみました．また，第 2 回の問 4 のところでは，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{128}$$

という指数関数の「多項式の姿」を用いて，変数 x のところに複素数を代入して考えてみるということをしました．そこで，我々の場合にも，(128) 式の変数 x のところに xA という行列を代入することで，

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I + (xA) + \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + \cdots \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \end{aligned} \tag{129}$$

と定めてみることにします．[40] こうして，指数関数 e^{xA} を定義することができましたが，一

[40] 連立一次方程式の記法と混同しないように，行列の場合には，行列 A の x 倍を「Ax」ではなく，「xA」と表わす習慣があります．そこで，ここでも，行列 A の x 倍を xA という順番で表わすことにしました．また，本当は，(129) 式の右辺の無限和の値がきちんと定まることを確かめる必要がありますが，以下で見るように，行列 A が 2 行 2 列の場合には，右辺の無限和の値を直接計算することができるので，ここでは，この問題には立ち入らないことにします．興味のある方は，一般に，正方行列 A に対して，(129) 式の右辺の無限和の値がきちんと定まるということを確かめてみて下さい．

階の常微分方程式の場合と同様の議論ができるためには, そもそも, 指数関数 e^{xA} 自身が「微分すると A 倍される関数」でなければお話になりません.

そこで, このことを確かめてみる前に, 以下の議論の準備として, **行列値関数の微分とは何か**ということについて少し考えてみることにします. いま, $\Phi(x)$ という m 行 n 列の行列に値を持つ関数が, 勝手にひとつ与えられたとします. このとき, 注目すべき点は, **一変数関数 $\boldsymbol{f(x)}$ に対する**

$$\boldsymbol{\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

という微分 (係数) の定義式は, $\boldsymbol{f(x) \rightsquigarrow \Phi(x)}$ というように, $\boldsymbol{f(x)}$ を行列値関数 $\boldsymbol{\Phi(x)}$ に置き換えても, そのままの形で意味を持つということです. 例えば, $\Phi(x)$ が,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

という 2 行 2 列の行列に値を持つ関数であるとすると,

$$\begin{aligned}\Phi(x+h)-\Phi(x) &= \begin{pmatrix} a(x+h) & b(x+h) \\ c(x+h) & d(x+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x+h)-a(x) & b(x+h)-b(x) \\ c(x+h)-c(x) & d(x+h)-d(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

というように表わすことができますから,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h}\cdot\begin{pmatrix} a(x+h)-a(x) & b(x+h)-b(x) \\ c(x+h)-c(x) & d(x+h)-d(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a(x+h)-a(x)}{h} & \frac{b(x+h)-b(x)}{h} \\ \frac{c(x+h)-c(x)}{h} & \frac{d(x+h)-d(x)}{h} \end{pmatrix} \qquad (130)\end{aligned}$$

というように表わせることが分かります. よって, (130) 式から,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-a(x)}{h} & \lim_{h\to 0}\frac{b(x+h)-b(x)}{h} \\ \lim_{h\to 0}\frac{c(x+h)-c(x)}{h} & \lim_{h\to 0}\frac{d(x+h)-d(x)}{h} \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{d\Phi}{dx}(x) = \begin{pmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

全く同様に考えると, 一般に, m 行 n 列の行列に値を持つ関数

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{ij}(x) \end{pmatrix}$$

に対して, その微分は,

行列値関数の微分 (一般的な形の場合)

$$\frac{d\Phi}{dx}(x) = \left(\ \varphi'_{ij}(x) \ \right) \tag{131}$$

という式によって与えられることが分かります. すなわち, **行列値関数の微分とは, それぞれの行列成分を微分することに他ならない**ということが分かります.

また, $\varphi(x)$ を ($\mathbb{R}$ に値を持つ) 一変数関数, B を定数行列として, $\Phi(x)$ が,

$$\Phi(x) = \varphi(x)B$$

という特別な形をしている場合には,

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \cdot B$$

というように表わせることが分かりますから,

行列値関数の微分 (特別な形の場合)

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)B\right) = \varphi'(x)B \tag{132}$$

というような計算ができることが分かります. すると, (132) 式から, 例えば, $0 \neq n \in \mathbb{N}$ として,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}A^n\right) &= \left(\frac{x^n}{n!}\right)' A^n \\ &= \frac{(x^n)'}{n!}A^n \\ &= \frac{nx^{n-1}}{n!}A^n \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}A^n \end{aligned} \tag{133}$$

というような計算ができることが分かります.

次に, **行列値関数に対する「積の微分則 (ライプニッツ則)」**を確かめてみることにします. いま,

$$\Phi(x) = \left(\ \varphi_{ij}(x) \ \right), \quad \Psi(x) = \left(\ \psi_{jk}(x) \ \right)$$

を, それぞれ, l 行 m 列の行列に値を持つ関数, m 行 n 列の行列に値を持つ関数として, l 行 n 列の行列に値を持つ関数 $\Phi(x)\Psi(x)$ の行列成分を,

$$\Phi(x)\Psi(x) = \left(\ \xi_{ik}(x) \ \right)$$

と表わすことにします. このとき,

$$\xi_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x)\psi_{jk}(x)$$

と表わせることが分かりますから,

$$
\begin{aligned}
\xi'_{ik}(x) &= \sum_{j=1}^{m}(\varphi_{ij}(x)\psi_{jk}(x))' \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left\{\varphi'_{ij}(x)\psi_{jk}(x) + \varphi_{ij}(x)\psi'_{jk}(x)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\varphi'_{ij}(x)\psi_{jk}(x) + \sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(x)\psi'_{jk}(x) \qquad (134)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. ここで, (134) 式の右辺の第一項, 第二項は, それぞれ, 行列値関数 $\Phi'(x)\Psi(x)$, $\Phi(x)\Psi'(x)$ の i 行 k 列成分に等しいことに注意すると, (134) 式から,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\Psi(x)\right) &= \left(\ \xi'_{ik}(x)\ \right) \\
&= \frac{d\Phi}{dx}(x)\Psi(x) + \Phi(x)\frac{d\Psi}{dx}(x)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すなわち, **行列値関数の場合にも,**

行列値関数に対する積の微分則 (ライプニッツ則)

$$
\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\Psi(x)\right) = \frac{d\Phi}{dx}(x)\Psi(x) + \Phi(x)\frac{d\Psi}{dx}(x)} \qquad (135)
$$

という「積の微分則」が成り立つことが分かります.

以上の準備のもとで, 指数関数 e^{xA} の基本的な性質を確かめてみることにします. まず, **指数関数 $\boldsymbol{e^{xA}}$ は「微分すると $\boldsymbol{A}$ 倍される関数」である**ということを確かめてみます. いま, (133) 式から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}A^n\right) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}A^n, & (\ n \geq 1\ \text{のとき}\ ) \\ O, & (\ n = 0\ \text{のとき}\ ) \end{cases}
$$

となることが分かりますから,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{xA} &= \frac{d}{dx}\left(I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots\right) \\
&= A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \cdots \\
&= A\left(I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots\right) \\
&= Ae^{xA} \qquad (136)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. 全く同様ににして,

$$
\frac{d}{dx}e^{xA} = \frac{d}{dx}\left(I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^3}{3!}A^3 + \cdots\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \cdots \\
&= \left(I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots \right) A \\
&= e^{xA} A \qquad (137)
\end{aligned}
$$

となることも分かります．よって, (136) 式, (137) から,

$$
\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} = e^{xA} A \qquad (138)
$$

となることが分かりますから, 確かに, **指数関数 e^{xA} は「微分すると A 倍される関数」である**ことが分かりました.

次に,

$$
e^{xA} \cdot e^{-xA} = e^{-xA} \cdot e^{xA} = I
$$

となること, すなわち, **行列 e^{xA} は正則行列であり, その逆行列は e^{-xA} で与えられる**ということを確かめてみます．いま, $e^{xA} \cdot e^{-xA}$ という行列値関数を微分してみると, (135) 式, (138) 式から,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{xA} \cdot e^{-xA}\right) &= \frac{d}{dx}\left(e^{xA}\right) \cdot e^{-xA} + e^{xA} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-xA}\right) && \text{((135) 式から)} \\
&= e^{xA} A \cdot e^{-xA} + e^{xA} \cdot (-A) e^{-xA} && \text{((138) 式から)} \\
&= e^{xA} \cdot A \cdot e^{-xA} - e^{xA} \cdot A \cdot e^{-xA} \\
&= O
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[41] よって, $e^{xA} \cdot e^{-xA}$ は定数関数であることが分かりますから, C を適当な定数行列として,

$$
e^{xA} \cdot e^{-xA} = C \qquad (139)
$$

と表わせることが分かります．そこで,

$$
e^{O} = I
$$

となることに注意して, (139) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$
\begin{aligned}
C &= e^{O} \cdot e^{O} \\
&= I \cdot I \\
&= I
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
e^{xA} \cdot e^{-xA} = I \qquad (140)
$$

となることが分かります．全く同様にして,

$$
e^{-xA} \cdot e^{xA} = I \qquad (141)
$$

[41] ここで, 二番目の等号で第二項を書き換えるときには, $A \rightsquigarrow -A$ と置き換えて, (138) 式を適用しました.

となることも分かります.[42] よって, (140) 式, (141) 式から,

$$e^{xA} \cdot e^{-xA} = e^{-xA} \cdot e^{xA} = I$$

となることが分かりました.

以上の結果をまとめると, 指数関数 e^{xA} は,

指数関数 e^{xA} の基本的な性質

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} = e^{xA} A \tag{142}$$

$$e^{O} = I \tag{143}$$

$$e^{xA} \cdot e^{-xA} = e^{-xA} \cdot e^{xA} = I \tag{144}$$

という性質を持つことが分かります.

これらの性質を用いると, **「微分すると A 倍される関数」は「指数関数 e^{xA} の定数倍」になる**ということ, すなわち,

行列で読み替えた定数係数の線型常微分方程式とその一般解 (一般の場合)

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \iff F(x) = e^{xA} F(0) \tag{145}$$

となることを, 次のように, **実数値関数の場合と全く同じ議論で確かめることができます**.[43]

まず,「$\Longleftarrow$」について考えてみます. そこで, いま,

$$F(x) = e^{xA} F(0) \tag{146}$$

としてみます. このとき,

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(e^{xA} F(0)\right) && (\ (146)\ \text{式から}\ ) \\
&= \frac{d}{dx} e^{xA} \cdot F(0) + e^{xA} \cdot \frac{d}{dx} F(0) && (\ \text{ライプニッツ則から}\ ) \\
&= \frac{d}{dx} e^{xA} \cdot F(0) + e^{xA} \cdot O \\
&= A e^{xA} \cdot F(0) && (\ (142)\ \text{式から}\ ) \\
&= A \cdot e^{xA} F(0) \\
&= AF(x) && (\ (146)\ \text{式から}\ )
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x)$$

[42] あるいは,「(140) 式において, $x \rightsquigarrow -x$ と置き換えることで (141) 式が得られる」と考えてもらっても構いません.

[43] 実数値関数のときには,「指数関数 e^{ax} の定数倍」として, $f(0)e^{ax}$ という表示を用いて議論しましたが, 今の場合, $F(0)$ は 2 行 1 列の行列で e^{xA} は 2 行 2 列の行列になりますから,「指数関数 e^{xA} の定数倍」として, $F(0)e^{xA}$ という表示は意味がなくなることに注意して下さい. このように, **「行列の世界」に議論を拡張する場合には,「掛け算する順番」をきちんと考えながら議論する必要があります**.

となることが分かります．よって,「$\Longleftarrow$」という主張が成り立つことが分かります．
　次に,「$\Longrightarrow$」について考えてみます．そこで, いま, 関数 $F(x)$ が,

$$\frac{dF}{dx}(x) = AF(x) \tag{147}$$

という微分方程式を満たしているとします．このとき, $e^{-xA}F(x)$ という組み合わせを微分してみると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{-xA}F(x)\right) &= \frac{d}{dx}e^{-xA} \cdot F(x) + e^{-xA} \cdot \frac{dF}{dx}(x) && (\text{ ライプニッツ則から })\\
&= e^{-xA}(-A) \cdot F(x) + e^{-xA} \cdot \frac{dF}{dx}(x) && (\text{ (142) 式から })\\
&= e^{-xA} \cdot (-A)F(x) + e^{-xA} \cdot \frac{dF}{dx}(x)\\
&= e^{-xA} \cdot \left\{-AF(x) + \frac{dF}{dx}(x)\right\}\\
&= e^{-xA} \cdot \{-AF(x) + AF(x)\} && (\text{ (147) 式から })\\
&= e^{-xA} \cdot O\\
&= O
\end{aligned}$$

となることが分かります．よって, $e^{-xA}F(x)$ という関数は定数関数であることが分かりますから, 適当な定数ベクトル $C \in \mathbb{R}^2$ を用いて,

$$e^{-xA}F(x) = C \tag{148}$$

と表わせることが分かります．ここで,

$$e^{O} = I$$

となることに注意して, (148) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$\begin{aligned}
C &= e^{O}F(0)\\
&= I \cdot F(0)\\
&= F(0)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$e^{-xA}F(x) = F(0) \tag{149}$$

となることが分かります．そこで, (144) 式に注意して, (149) 式の両辺に, 左から e^{xA} を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}
e^{xA}F(0) &= e^{xA} \cdot e^{-xA}F(x)\\
&= e^{xA}e^{-xA} \cdot F(x)\\
&= I \cdot F(x) && (\text{ (144) 式から })\\
&= F(x)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$F(x) = e^{xA} F(0)$$

となることが分かります. よって,「$\Longrightarrow$」という主張も成り立つことが分かります.

こうして, (145) 式の主張を確かめることができましたから, 我々の場合にも, やはり, **「微分すると A 倍される関数」は「指数関数 e^{xA} の定数倍」しか存在しない**ということが分かりました. 特に, (127) 式, (145) 式から, 我々が問題としている定数係数の線型常微分方程式の一般解が,

行列で読み替えた定数係数の線型常微分方程式の一般解 (二階の方程式の場合)

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = e^{xA} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \tag{150}$$

というように与えられることが分かります. よって, **「定数係数の線型常微分方程式の解を求める問題」が「行列 A の指数関数 e^{xA} を求める問題」に帰着する**ことが分かります. いま,

$$\begin{aligned} e^{xA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \frac{x^3}{3!} A^3 + \cdots \end{aligned}$$

でしたから, **「行列 A の指数関数 e^{xA} を求める問題」は, 本質的には「行列 A の n 乗 A^n を求める問題」と同じである**ということに注意して下さい.

4 節で触れたように, こうした問題を一般的に解決するためには, **「与えられた正方行列 A に対して,**

$$\boldsymbol{P^{-1} A P = \Lambda}$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P が見つけよ」という「行列の標準形の問題」に帰着して考えるのが普通です. すなわち,「行列の標準形の問題」が解決されたと仮定すると, 4 節で見たように,

$$A^n = P \Lambda^n P^{-1}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} e^{xA} &= I + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \frac{x^3}{3!} A^3 + \cdots \\ &= I + xP\Lambda P^{-1} + \frac{x^2}{2!} P\Lambda^2 P^{-1} + \frac{x^3}{3!} P\Lambda^3 P^{-1} + \cdots \\ &= P \left(I + x\Lambda + \frac{x^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{x^3}{3!} \Lambda^3 + \cdots \right) P^{-1} \\ &= P e^{x\Lambda} P^{-1} \end{aligned} \tag{151}$$

となることが分かります. よって, 後は,「見やすい形」の行列 Λ に対して, 直接, 指数関数 $e^{x\Lambda}$ を計算することで, (151) 式を用いて, 指数関数 e^{xA} を求めることができます. た

だし, A **が 2 行 2 列の場合には, 4 節で見たように, Cayley-Hamilton の定理を用いることで, 直接,** A^n **を求めることができますから, そのときの結果を用いて, 直接, 指数関数** e^{xA} **を求めることもできます**.

例えば, 問 1 の W_1 の例では,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますが, 4 節の結果から,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!}A^n &= \begin{pmatrix} \frac{x^n}{n!}(2^{n+1}-1) & \frac{x^n}{n!}(2-2^{n+1}) \\ \frac{x^n}{n!}(2^n-1) & \frac{x^n}{n!}(2-2^n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{(2x)^n}{n!}-\frac{x^n}{n!} & 2\cdot\frac{x^n}{n!}-2\cdot\frac{(2x)^n}{n!} \\ \frac{(2x)^n}{n!}-\frac{x^n}{n!} & 2\cdot\frac{x^n}{n!}-\frac{(2x)^n}{n!} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{152}$$

となることが分かります. よって, (152) 式から,

$$\begin{aligned} e^{xA} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}A^n \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} & 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} & 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x}-e^x & 2e^x-2e^{2x} \\ e^{2x}-e^x & 2e^x-e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります. 特に, (150) 式と合わせると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} &= e^{xA}\begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x}-e^x & 2e^x-2e^{2x} \\ e^{2x}-e^x & 2e^x-e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, W_1 を定義するときに用いた

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=0$$

という微分方程式の一般解が,

$$f(x)=f'(0)(e^{2x}-e^x)+f(0)(2e^x-e^{2x})$$

というように与えられることが分かります.

より一般に, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ が,

$$\varphi_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu), \quad \lambda \neq \mu$$

というように, 異なる二つの複素数 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ を用いて因数分解される場合には, 4 節の結果から,

$$A^n = \frac{\lambda^n(A-\mu I) - \mu^n(A-\lambda I)}{\lambda-\mu}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{x^n}{n!}A^n = \frac{1}{\lambda-\mu}\cdot\left\{\frac{(\lambda x)^n}{n!}(A-\mu I) - \frac{(\mu x)^n}{n!}(A-\lambda I)\right\} \tag{153}$$

となることが分かります. よって, (153) 式から,

2 行 2 列の行列 A に対する e^{xA} の具体形（異なる固有値 λ, μ を持つ場合）

$$e^{xA} = \frac{e^{\lambda x}(A-\mu I) - e^{\mu x}(A-\lambda I)}{\lambda-\mu} \tag{154}$$

となることが分かります. したがって, 後は, (154) 式の右辺に, A や λ, μ などの具体的な数値を代入することで, e^{xA} が求まることになります.

また, 問 1 の W_2 の例では,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますが, 4 節の結果から,

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!}A^n &= \begin{pmatrix} \frac{x^n}{n!}(n+1) & -n\cdot\frac{x^n}{n!} \\ n\cdot\frac{x^n}{n!} & \frac{x^n}{n!}(1-n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n\cdot\frac{x^n}{n!}+\frac{x^n}{n!} & -n\cdot\frac{x^n}{n!} \\ n\cdot\frac{x^n}{n!} & \frac{x^n}{n!}-n\cdot\frac{x^n}{n!} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{155}$$

となることが分かります. いま,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots \\ &= x\cdot\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

$$= xe^x$$

となることに注意すると, (155) 式から,

$$\begin{aligned}
e^{xA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & -\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xe^x + e^x & -xe^x \\ xe^x & e^x - xe^x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かります. 特に, (150) 式と合わせると,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} &= e^{xA} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xe^x + e^x & -xe^x \\ xe^x & e^x - xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, W_2 を定義するときに用いた

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$$

という微分方程式の一般解が,

$$f(x) = f'(0)xe^x + f(0)(e^x - xe^x)$$

というように与えられることが分かります.

より一般に, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ が,

$$\varphi_A(t) = (t - \lambda)^2$$

というように, ただひとつの複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を用いて因数分解される場合には, 4 節の結果から,

$$A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(A - \lambda I)$$

となることが分かりますから,

$$\frac{x^n}{n!} A^n = \frac{(\lambda x)^n}{n!} I + x \cdot n \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{n!} (A - \lambda I) \tag{156}$$

となることが分かります. よって, 前と同様に,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

となることに注意すると, (156) 式から,

2 行 2 列の行列 A に対する e^{xA} の具体形（重複する固有値 λ を持つ場合）

$$e^{xA} = e^{\lambda x} I + x e^{\lambda x}(A - \lambda I) \tag{157}$$

となることが分かります．したがって, 後は, (157) 式の右辺に, A や λ, μ などの具体的な数値を代入することで, e^{xA} が求まることになります．

こうして, 定数係数の線型常微分方程式の解法を線型代数学の立場から見直すことができましたが, (150) 式, (154) 式, (157) 式の結果を用いると, 一般に, 定数係数の線型常微分方程式の解は, 次のような形をしていることが分かります．

まず, 問 1 の W_1 の例のように, 指数関数 e^{xA} が (154) 式のような形で求まる場合を考えてみます．このとき, (150) 式, (154) 式から,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} &= e^{xA} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda - \mu} \cdot (A - \mu I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} + \frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda} \cdot (A - \lambda I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります．よって,

$$\frac{1}{\lambda - \mu} \cdot (A - \mu I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\mu - \lambda} \cdot (A - \lambda I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表わすことにすれば, 微分方程式の解 $f(x)$ は,

定数係数の二階線型常微分方程式の解の形（異なる固有値 λ, μ を持つ場合）

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x} \tag{158}$$

という形に表わせることが分かります．

次に, 問 1 の W_2 の例のように, 指数関数 e^{xA} が (157) 式のような形で求まる場合を考えてみます．このとき, (150) 式, (157) 式から,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} &= e^{xA} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda x} \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} + x e^{\lambda x}(A - \lambda I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります．よって,

$$\begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda I) \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表わすことにすれば, 微分方程式の解 $f(x)$ は,

定数係数の二階線型常微分方程式の解の形（重複する固有値 λ を持つ場合）

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \tag{159}$$

という形に表わせることが分かります．

このように, 一旦, **定数係数の線型常微分方程式の解がどのような形をしているのかということが分かってしまう**と, 次のような戦略で微分方程式の解を求めることができるということが分かります.

定数係数の線型常微分方程式の解を求める戦略（二階の方程式の場合）

(i) 与えられた微分方程式に $f(x) = e^{\lambda x}$ を代入して, 指数関数解 $e^{\lambda x}$ を求める.

(ii) (i) のステップで, 異なる二つの指数関数解 $e^{\lambda x}, e^{\mu x}$ が見つかる場合には, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ として, 二つの指数関数解の「重ね合わせ」

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}$$

を考える. また, (i) のステップで, ただひとつの指数関数解 $e^{\lambda x}$ しか見つからない場合には, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ として, 指数関数解 $e^{\lambda x}$ と $xe^{\lambda x}$ の「重ね合わせ」

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

を考える.

(iii) 例えば, 初期値 $f(0), f'(0)$ を用いることで, 係数 C_1, C_2 を決定する.

このような戦略で微分方程式の解を求めることにすれば, 直接, 行列の指数関数 e^{xA} を計算する必要がなくなるので, 物理学の教科書などでは, このような解法が説明されていることが多いわけです.

6　問 2 の解答

(1) 第 6 回の問 3 のところで見たように, $T_{\mathbf{v}}$ が線型写像であることを示すには,

$T_{\mathbf{v}}$ が線型写像であるための条件

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})$$

が成り立つ.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{x}) = c \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$$

が成り立つ.

という二つの条件が満たされることを確かめれば良いということになります.

いま, 内積の持つ**双線型性**という性質から,[44] $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle \tag{160}$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = c \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \tag{161}$$

となることが分かりますから, (160) 式, (161) 式から,

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \frac{2\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} \\
&= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} && \text{((160) 式から)} \\
&= \left(\mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{y} - \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\right) \\
&= T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) && (162) \\
T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{x}) &= c\mathbf{x} - \frac{2\langle c\mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} \\
&= c\mathbf{x} - \frac{2c\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} && \text{((161) 式から)} \\
&= c \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\right) \\
&= c \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) && (163)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (162) 式, (163) 式から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりますから, $T_{\mathbf{v}}$ は線型写像であることが分かります.

(2) 写像 $T_{\mathbf{v}}$ の定義に戻って計算してみると, 勝手なベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\rangle &= \langle \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}, \mathbf{y} - \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}, \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\rangle - \langle \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle \\
&\quad + \langle \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}, \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle \\
&\quad + \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \cdot \frac{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \frac{4\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} + \frac{4\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}
\end{aligned}$$

[44] すなわち, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ を勝手にひとつ固定して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ を,

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \mathbb{R},$$

というように $\mathbf{x}$ だけの関数と思ったときに, あるいは, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を勝手にひとつ固定して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ を,

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \mathbb{R}$$

というように $\mathbf{y}$ だけの関数と思ったときに, それぞれ, 線型写像になるということです.

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

となることが分かります.

(3) 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \tag{164}$$

となることに注意して, 写像 $T_{\mathbf{v}}$ の定義に戻って計算してみると, (164) 式から,

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) &= T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) - \frac{2\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \\ &= \left(\mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \right) + \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} && \text{((164) 式から)} \\ &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) いま,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}, \quad 0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{165}$$

であると仮定してみます. そこで,

$$T_{\mathbf{v}}^2 = I \tag{166}$$

という式の両辺を, ベクトル $\mathbf{x}$ に施してみると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) && \text{((166) 式から)} \\ &= T_{\mathbf{v}}(\lambda \mathbf{x}) && \text{((165) 式から)} \\ &= \lambda \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \\ &= \lambda^2 \mathbf{x} && \text{((165) 式から)} \end{aligned} \tag{167}$$

となることが分かります. よって, (167) 式から,

$$(\lambda^2 - 1)\mathbf{x} = 0$$

となることが分かりますが, $\mathbf{x} \neq 0$ なので,

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

でなければならないことが分かります. したがって, $T_{\mathbf{v}}$ の固有値 λ は,

$$\lambda = \pm 1$$

でなければならないことが分かります.

(5) 固有値 ± 1 に対応する固有ベクトル空間を $V(\pm 1)$ と表わすことにします．すなわち，

$$V(+1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 |\ T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\ \}$$
$$V(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 |\ T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\ \}$$

と表わすことにします．このとき，写像 $T_{\mathbf{v}}$ の定義に戻って，$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ という条件を書き直してみると，

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} &\iff \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} = \mathbf{x} \\ &\iff \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} = 0 \\ &\iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = 0 \end{aligned}$$

となることが分かります．よって，$V(+1)$ という固有ベクトル空間は，

$$V(+1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 |\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = 0\ \right\}$$

となることが分かります．すなわち，$V(+1)$ は「ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ と直交するベクトル全体の集合」であることが分かります．[45]

同様に，$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ という条件を書き直してみると，

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} &\iff \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} = -\mathbf{x} \\ &\iff \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} = \mathbf{x} \end{aligned} \tag{168}$$

となることが分かります．よって，

$$c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$$

と書くことにすれば，(168) 式から，

$$\mathbf{x} \in V(-1) \implies \mathbf{x} = c\mathbf{v} \text{ となるような実数 } c \in \mathbb{R} \text{ が存在する．}$$

となることが分かります．逆に，$c \in \mathbb{R}$ として，

$$\mathbf{x} = c\mathbf{v}$$

であるとすると，

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{v}) &= c \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) \\ &= c \cdot \left(\mathbf{v} - \frac{2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}\right) \\ &= c \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) \end{aligned}$$

[45] このような集合をベクトル $\mathbf{v}$ の**直交補空間**と呼んだりします．

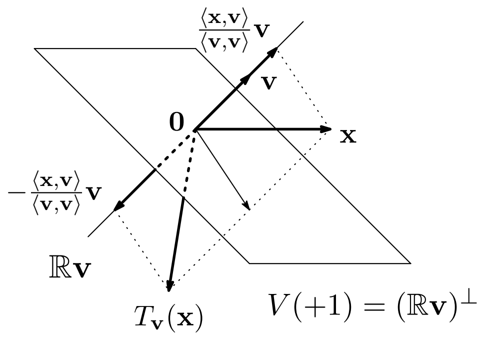

図 1: 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ は, $\mathbf{v}$ の直交補空間である $V(+1) = (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ という平面に関する「折り返し」を表わしている.

$$= -c\mathbf{v}$$

となることが分かりますから,

$$c\mathbf{v} \in V(-1)$$

となることが分かります. 以上から, $V(-1)$ という固有ベクトル空間は,

$$\begin{aligned} V(-1) &= \left\{ c\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R}\mathbf{v} \end{aligned}$$

となることが分かります.

(6) (5) の結果から, 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ とは, $\mathbf{v}$ の直交補空間 $V(+1) = (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ の元は動かさず, $\mathbf{v}$ を $-\mathbf{v}$ に写すような写像であることが分かります. したがって, $T_{\mathbf{v}}$ は, ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathbf{x}$ を平面 $V(+1) = (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関して「折り返す」ことによって得られるベクトルを対応させる写像であることが分かります (図 1 を参照).[46]

7　問 2 を見直すと

さて, 第 6 回の問 3 では, $\mathbb{R}^2$ **内の原点を通る直線に関する折り返し**という操作を取り上げて, こうした操作が線型写像となることを見ました. そこで, 今回は, 次元をひとつ上げて, $\mathbb{R}^3$ **内の原点を通る平面に関する折り返し**について, 皆さんに考えてもらうことにしました.

いま, $\mathbb{R}^3$ の 0 でないベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 原点を通り $\mathbf{v}$ と直交する平面を,

$$(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0 \right\}$$

と表わすことにします. このとき, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, ベクトル $\mathbf{x}$ を平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関して折り返すことによって得られるベクトル $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像

$$T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

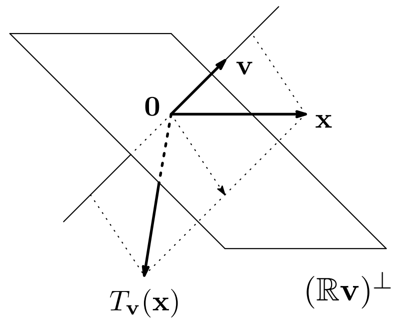

図 2: 原点を通る平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返し.

を考えてみます (図 2 を参照). すると, 第 6 回の問 3 で, $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線 l_θ に関する折り返し写像

$$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

を調べたときと同様に, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ として, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}$ という三つのベクトルを折り返したときの様子や, $\mathbf{x}, c\mathbf{x}$ という二つのベクトルを折り返したときの様子を考えてみることで,

$$\begin{cases} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \\ T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{x}) = c \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

となることが分かりますから, $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は線型写像になることが分かります.[47] 後で見るように, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathbf{x}$ を平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関して折り返した行き先 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ は,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \tag{169}$$

という式で与えられることが分かるのですが, ここでは, 逆に, 写像 $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を (169) 式を用いて定義することで, この写像 $T_{\mathbf{v}}$ が平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返しであることを突き止めてもらうという形で出題してみました.

そこで,「$T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返しである」ということを念頭に置きながら, 問 2 の内容を見返してみることにします. 上で注意したように, 一旦,「$T_{\mathbf{v}}$ は平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返しである」ということが分かってしまえば, 第 6 回の問 3 のときと同様に, 図を描いて $T_{\mathbf{v}}$ が線型写像となることを確かめることもできるわけですが, (169) 式を用いて, $T_{\mathbf{v}}$ が線型写像となることを直接確かめてみて下さいというのが, 問 2 の (1) の問題の意味です.

さて, **原点を通る平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返しによって, ベクトルの長さや二つのベクトルの間の角度は変わらない**ということは, 直感的には明らかなことです. これを数学的に表現すると,

[46]数学では, このような折り返しの操作を**「鏡映」**と呼んだりします. また, (6) の結論を導くためのもう少し詳しい議論については 7 節を参照して下さい.

[47]皆さん, 第 6 回の問 3 で, $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を調べたときの議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

折り返し写像 T_{v} は $\mathbb{R}^3$ 上の内積を保つような線型写像となる

$$\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad {}^{\forall}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \tag{170}$$

ということになりますが,[48] (169) 式を用いて, (170) 式が成り立つことを直接確かめて下さいというのが, 問 2 の (2) の問題の意味です. 一般に, $\mathbb{R}^n$ 上の内積を保つような線型写像を**直交変換**と呼びますが, 第 1 回の問 3 のところで考えた「$\mathbb{R}^2$ の原点を中心とした回転」や, 第 6 回の問 3 で考えた「$\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線に関する折り返し」, あるいは, 今回の問 2 で考えた「$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る平面に関する折り返し」, さらには,「$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線を軸にした回転」などが, こうした直交変換の代表例と言えます.

いま, $T_{\mathbf{v}}$ は「平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返し」であるということを考えると, 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathbf{x}$ **自身を「$T_{\mathrm{v}}(\mathrm{x})$ というベクトルの折り返し先」である**と考えることもできます (再び, 図 2 を参照). すなわち,

$$T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad ({}^{\forall}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \tag{171}$$

となることが分かります. そこで, (169) 式を用いて, (171) 式が成り立つことを直接確かめて下さいというのが, 問 2 の (3) の問題の意味です.

さて, (171) 式を線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ だけを用いて表わすと,

$$T_{\mathbf{v}}^2 = I \tag{172}$$

ということになりますが, このとき, $T_{\mathbf{v}}$ の固有値 λ も

$$\lambda^2 = 1$$

という同じ関係式を満たさなければならないということを確かめて下さいというのが, 問 2 の (4) の問題の意味です. また, このことから, $T_{\mathbf{v}}$ の固有値 λ は, $\lambda = \pm 1$ でなければならないことが分かりますが, それぞれの固有値に対応する固有ベクトル空間を具体的に求めて下さいというのが, 問 2 の (5) の問題の意味です. もし, $T_{\mathbf{v}}$ が「平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ に関する折り返し」であることが分かっているとすれば, **$T_{\mathbf{v}}$ という折り返しの操作のもとで, 平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ 上のベクトルは動かない**はずですし, **この平面に直交するベクトルは (-1) 倍される**はずです. そこで, そのことを直接確かめてみて下さいというわけです. 実際, 問 2 の解答で見たように, それぞれの固有値に対応する固有ベクトル空間を求めてみると, 確かに,

$$V(+1) = (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}, \quad V(-1) = \mathbb{R}\mathbf{v}$$

となることが分かります.

そこで, $\mathbb{R}^3$ の勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \tag{173}$$

というように, $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ 方向の成分 $\mathbf{x}_1 \in (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ と $\mathbb{R}\mathbf{v}$ 方向の成分 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}\mathbf{v}$ に分解してみます (図 3 を参照). このとき,

[48] すなわち, **内積の値を不変にする写像である**ということで, **ベクトルの長さや二つのベクトルの間の角度を変えない写像である**ということを表現しているわけです.

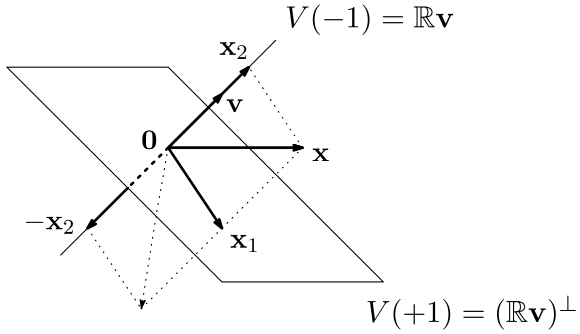

図 3: ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を, $(\mathbb{R}\mathbf{v})^\perp$ 方向の成分 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbb{R}\mathbf{v}$ 方向の成分 $\mathbf{x}_2$ に分解してみる.

$$\begin{cases} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \\ T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_2) = -\mathbf{x}_2 \end{cases} \tag{174}$$

となることに注意すると, (173) 式, (174) 式から,

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) && (\text{ (173) 式から }) \\ &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 && (\text{ (174) 式から }) \end{aligned} \tag{175}$$

となることが分かります. よって, (175) 式から, $T_{\mathbf{v}}$ は, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$$

を対応させる写像であることが分かりますから,「平面 $(\mathbb{R}\mathbf{v})^\perp$ に関する折り返し」であることが分かるというわけです.

さて, 以上の議論は, **一般に, 線型写像が与えられたときに, それがどのような写像であるのかということを理解するためのひとつの指針を与えている**ことが分かります. 上の議論を見返してみると, $T_{\mathbf{v}}$ という写像の様子を理解する上で, (173) 式のように, **勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を, $(\mathbb{R}\mathbf{v})^\perp$ 方向の成分 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbb{R}\mathbf{v}$ 方向の成分 $\mathbf{x}_2$ に分解して考える**ということと, (174) 式のように, **それぞれの成分に対する線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の作用がとても簡単な形をしている**という二つの点がポイントになっていることが分かります. ここで, (174) 式は, **$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ が, それぞれ, 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の固有ベクトルになっている**ということを表わしていますから, 結局, **「勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の固有ベクトルの和の形に表わして考える」ということが, 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の様子をより良く理解できるポイントになっている**ことが分かります. この演習でも, 追々, 見てゆくように, 一般の線型写像 $f : V \to V$ に対しても, **線型空間 V の元 $\mathbf{u} \in V$ を線型写像 f の固有ベクトルの和の形に表わすことを考えてみるということにより, 線型写像 f の様子をより良く理解できるようになる**ということが分かります. そこで, 一般の線型写像の様子を調べるという問題に入っていく前に, 具体例をもとにして, **どのような形で線型写像の様子を理解しようとしているのか**ということを, 皆さんに紹介してみようと思い, 問 2 のような形で問題を出題してみました.

さて, 与えられたベクトル $\mathbb{R}^3$ に対して, (173) 式の分解を具体的に求めることができれば, (175) 式を用いて, $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ を具体的に書き下すことができます. そこで, 最後に

この問題について考えてみることにします. いま, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}\mathbf{v}$ ですから, $\mathbf{x}_2$ は, 適当な実数 $c \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\mathbf{x}_2 = c\mathbf{v}$$

という形に表わせることが分かります. そこで, ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ が, 勝手にひとつ与えられているとして,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + c\mathbf{v} \tag{176}$$

となるベクトル $\mathbf{x}_1 \in (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ を求めてみることにします.

いま, 仮に, (176) 式のような成分分解ができたと仮定してみます. このとき,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0 \tag{177}$$

となることに注意して, (176) 式の両辺と $\mathbf{v}$ の間の内積を考えてみると,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 + c\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle + c \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= c \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle && \text{((177) 式から)}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$c = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \tag{178}$$

でなければならないことが分かります.

逆に, (178) 式のように実数 c を定めると, (176) 式から, $\mathbf{x}_1$ は,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x} - c\mathbf{v} \\
&= \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \qquad (179)
\end{aligned}$$

というように定めなければならないことが分かりますが, (179) 式から,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{x}_1 \in (\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp}$$

となることが分かります.

以上から, (173) 式の分解は,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \tag{180}$$

という式で与えられることが分かります. よって, (175) 式, (180) 式から,

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\
&= \left(\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}\right) - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \\
&= \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.