数学 II 演習 (第 7 回) のヒント

問 1.

(1) V_1, V_2 は, それぞれ, 数列全体の集合の中で,「足し算」や「スカラー倍」に関して閉じた集合であることを確かめてみよ. すなわち, $i = 1, 2$ として,

V_i が数列全体の集合の線型部分空間になるための条件

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_i$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_i$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V_i$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha\mathbf{a} \in V_i$ となる.

という二つの条件が満たされることを確かめてみよ.

また, V_i, $(i = 1, 2)$ の基底を求めるためには, まず, それぞれの漸化式を満たす数列の一般項を求めて, その数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を,

$$\{a_n\}_{n=1,2,\cdots} = \alpha \cdot \{c_n\}_{n=1,2,\cdots} + \beta \cdot \{d_n\}_{n=1,2,\cdots} \tag{1}$$

という形に表わしてみよ. ここで, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は $n \in \mathbb{N}$ によらない定数で, $\{c_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\{d_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_i$ は,

$$\{n-1\}_{n=1,2,\cdots} = \{0, 1, 2, \cdots\} \in V_i$$

のように具体的に与えられる V_i の元を表わすものとする. さらに, (1) 式で求めた数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\{d_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V$ を,

$$\mathbf{e}_1 = \{c_n\}_{n=1,2,\cdots}, \ \mathbf{e}_2 = \{d_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

と定めるとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_i の基底となることを確かめてみよ. すなわち,

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_i の基底となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V_i$ に対して,

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$$

となるような実数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめてみよ.

(2) $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V_i$, $(i = 1, 2)$ のとき, すなわち, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ が対応する漸化式を満たすとき, $T\mathbf{a} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ も同じ漸化式を満たすことを確かめてみよ.

(3) (1) で各自が求めた V_i, $(i = 1, 2)$ の基底の元 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V_i$ に対して, 対応する関数 $f_{\mathbf{e}_1}(x), f_{\mathbf{e}_2}(x)$ を無限和の形に書き下してみよ. また, そうして得られたベキ級数が, よく知られている関数の Taylor 展開になっているかどうかを考えてみよ.

(4) 例えば, $i = 1$ の場合には,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

という微分方程式の左辺に,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}}(x) &= a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n \end{aligned}$$

を代入して,

$$f''_{\mathbf{a}}(x) - 3f'_{\mathbf{a}}(x) + 2f_{\mathbf{a}}(x)$$

という式を x のベキの形に整理したときに, x^n の係数が何になるかを考えてみよ.

(5) $f_{\mathbf{a}}(x)$ と $f_{T\mathbf{a}}(x)$ をベキ級数の形で書き下して, $f_{\mathbf{a}}(x)$ という関数に, どのような操作を加えると, $f_{T\mathbf{a}}(x)$ という関数が得られるのかを考えてみよ.

問 2.

(1) $T_{\mathbf{v}}$ の定義式を用いて,

$T_{\mathbf{v}}$ が線型写像であるための条件

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})$$

が成り立つ.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{x}) = c \cdot T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$$

が成り立つ.

という二つの条件が満たされることを確かめてみよ.

(2) $T_{\mathbf{v}}$ の定義式を用いて,

$$\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

となることを確かめてみよ.

(3) $T_{\mathbf{v}}$ の定義式を用いて,

$$T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

となることを確かめてみよ.（最初に, $\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle$ を求めてから, $T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$ の計算を進めることにすると, 少し計算が見やすくなるかもしれません.）

(4) $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ であるとしたときに, $T_{\mathbf{v}}^2 = I$ という式の両辺を $\mathbf{x}$ に施すと, どのような式が得られるのかを考えてみよ.

(5) $T_{\mathbf{v}}$ の定義式を用いて, それぞれ,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$$

という式を $\mathbf{x}$ に対する条件の式として書き直してみよ.

(6) $T_{\mathbf{v}}$ の固有値 ± 1 に対応する固有ベクトル空間を, それぞれ,

$$V(+1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\ \}$$
$$V(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\ \}$$

と表わすことにする. このとき, (5) の結果を用いて, 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を, $\mathbf{x}_1 \in V(+1)$, $\mathbf{x}_2 \in V(-1)$ として,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

という形に分解して考えてみよ. すなわち, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_1) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

というベクトルを対応させる操作がどのような操作なのかを考えてみよ.