数学 II 演習 (第 7 回)

問 1. 次のような条件を満たす実数列の集合 V_1, V_2 を考える.

$$V_1 = \{\, \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \mid a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0,\ (n = 2,3,4\cdots)\ \}$$
$$V_2 = \{\, \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots} \mid a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0,\ (n = 2,3,4\cdots)\ \}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) V_1, V_2 は線型空間となることを示せ. また, V_1, V_2 のそれぞれに対して, 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ をひと組ずつ求めよ.

(2) 実数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対して,

$$b_n = a_{n+1}$$

という式により定まる実数列を $T\mathbf{a} = \{b_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ と表わすことにする. すなわち,

$$\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \longmapsto T\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

と定める. このとき, $i = 1, 2$ として,

$$\mathbf{a} \in V_i \implies T\mathbf{a} \in V_i,$$

となることを示せ.

(3) 実数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対して, 関数 $f_{\mathbf{a}}(x)$ を,

$$f_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots$$

という式により定める. (取りあえず, 級数が収束するかどうかということ, すなわち, $f_{\mathbf{a}}(x)$ という値がきちんと定まっているかどうかということは気にせずに, 形式的に考える.) このとき, (1) で求めた V_1, V_2 のそれぞれの基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ について, 関数 $f_{\mathbf{e}_1}(x), f_{\mathbf{e}_2}(x)$ を求めよ.

(4) 次のような条件を満たす一変数実数値関数の集合 W_1, W_2 を考える.

$$W_1 = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0\ \}$$
$$W_2 = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0\ \}$$

このとき, $i = 1, 2$ として,

$$\mathbf{a} \in V_i \implies f_{\mathbf{a}} \in W_i$$

となることを示せ.

(5) 実数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ に対して, 関数 $f_{T\mathbf{a}}(x)$ と $f_{\mathbf{a}}(x)$ の関係を求めよ.

♠ 裏に問 2 があります.

問 **2.** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の間の内積を,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

と表わす. また, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ なるベクトル $\mathbf{v}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

を対応させる写像を,

$$T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

と表わす. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は線型写像であることを示せ.

(2) 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ は内積 $\langle \quad , \quad \rangle$ を保つことを示せ. すなわち, 勝手なベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\langle T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

という式が成り立つことを示せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の恒等写像を $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と表わすことにする. すなわち, I は, 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ となる写像である. このとき,

$$T_{\mathbf{v}}^2 = I$$

という式が成り立つことを示せ. すなわち, 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

という式が成り立つことを示せ.

(4) (3) の結果を用いて, 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の固有値は ± 1 でなければならないことを示せ. すなわち,

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x},\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \implies \lambda \in \{\pm 1\}$$

となることを示せ.

(5) 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ の固有値 ± 1 のそれぞれに対して, 対応する固有ベクトル空間を求めよ.

(6) 線型写像 $T_{\mathbf{v}}$ は, 幾何学的にはどのような操作を与える写像であるかを考えてみよ.