数学 II 演習 (第 6 回) の略解

目 次

1　問 1 の解答

(1) 与えられた連立一次方程式を,

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

という形に書き直してみます. ここで, もし, $(\lambda I - A)$ という行列が逆行列を持つと仮定すると, (1) 式の両辺に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛け算することで,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることが分かります.[1] したがって, 一般に, 勝手にひとつ与えられた正方行列 B に対して,

$$\text{正方行列 } B \text{ が逆行列を持つ} \iff \det B \neq 0$$

となることに注意すると, (1) 式の連立一次方程式が自明でない解を持つためには,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2}$$

でなければならないことが分かります.

そこで, この行列式を計算してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (\text{ 1 列目} + \text{ 2 列目} \times \lambda \text{ }) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda^2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (\text{ 1 行目で展開 }) \\
&= \lambda^3 - 1
\end{aligned}$$

となることが分かります.[2] したがって, (2) 式の方程式は,

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

となることが分かりますから, 与えられた連立一次方程式が自明でない解を持つためには,

$$\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

[1] このような解を連立一次方程式の**自明な解**とか **trivial な解**とか呼んだりします.
[2] この行列式は, 第 5 回の問 1 の (3) と同じものです.

として,

$$\lambda = 1,\, \omega,\, \omega^2$$

でなければならないことが分かります.

(2) いま, (1) 式の連立一次方程式は,

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表わすことができます. そこで,

$$\lambda^3 = 1$$

となることに注意して, (3) 式の連立一次方程式に対して, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\,\text{行目}\times(-1)]{1\,\text{行目}+3\,\text{行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[1\,\text{行目}\times(-1)]{2\,\text{行目}+1\,\text{行目}\times\lambda}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2\,\text{行目}\leftrightarrow 3\,\text{行目}]{1\,\text{行目}\leftrightarrow 3\,\text{行目}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, (3) 式の連立一次方程式は,

$$\begin{cases} x - \lambda z = 0 \\ y - \lambda^2 z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

という「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に書き直せることが分かります. そこで, (4) 式の「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式を解いてみると, (3) 式の連立一次方程式の解は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かります.[3] よって, (5) 式における $(\lambda t) \in \mathbb{C}$ を, 改めて, $t \in \mathbb{C}$ と表わすことにすると, $\lambda = 1,\, \omega,\, \omega^2$ というそれぞれの λ に対して, (1) 式の連立一次方程式の解は,

[3] ここで, (4) 式を「z の値を勝手にひとつ決めたときに, x, y の値がどう決まるのか」ということを表わしている式であると解釈しました. また, 後で, より見やすい形になるように, (5) 式では, ベクトルの成分から λ という因子を括り出して表わすことにしました.

(i) $\lambda = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(ii) $\lambda = \omega$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(iii) $\lambda = \omega^2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

となることが分かります.

2 n 行 n 列のときにはどうなるのか

次に, 行列 A が,

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{ コ}}$$

という n 行 n 列の行列であるとして, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対する

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6}$$

という連立一次方程式について考えてみることにします. すると, 第 5 回の問 1 のところで見たように, この場合,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - 1$$

となることが分かりますから, 問 1 と同様に考えると, (6) 式という連立一次方程式が自明でない解を持つためには,

$$\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$$

として, λ は,

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$$

でなければならないことが分かります.

そこで,

$$\lambda^n = 1$$

となることに注意して, 問 1 と同様にして, (6) 式の連立一次方程式に対して, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[n\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}+\ n\text{ 行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & \cdots & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1\text{ 行目}\times(-1)]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \lambda^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}\times(-1)]{3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times\lambda} \cdots$$

$$\xrightarrow[(n-2)\text{ 行目}\times(-1)]{(n-1)\text{ 行目}+\ (n-2)\text{ 行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\lambda^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{適当に行を並べ替える}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, (6) 式の連立一次方程式は,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

として,

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_n = 0 \\ x_2 - \lambda^2 x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} - \lambda^{n-1} x_n = 0 \end{cases} \tag{7}$$

という「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に書き直せることが分かります.

そこで, (7) 式の「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式を解いてみると, (6) 式の連

立一次方程式の解は,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{C} \qquad (8)
\end{aligned}$$

となることが分かります.[4] よって, (8) 式における $(\lambda t) \in \mathbb{C}$ を, 改めて, $t \in \mathbb{C}$ と表わすことにすると, $\lambda = 1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$ というそれぞれの λ に対して, (6) 式の連立一次方程式の解は,

(1) $\lambda = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{C}$$

(2) $\lambda = \omega$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{C}$$

$$\vdots$$

(n) $\lambda = \omega^{n-1}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{n-1} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{C}$$

となることが分かります.

[4] ここで, (7) 式を「x_n の値を勝手にひとつ決めたときに, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ の値がどう決まるのか」ということを表わしている式であると解釈しました. また, 後で, より見やすい形になるように, (8) 式では, ベクトルの成分から λ という因子を括り出して表わすことにしました.

3 固有値と固有ベクトル

一般に, n 行 n 列の行列 A に対して, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ として,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{9}$$

という連立一次方程式を考えてみます.[5] このとき, (9) 式の連立一次方程式が, 自明でない解, すなわち, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つときに, 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を行列 A の**固有値**と呼びます. また, 固有値 λ に対して, (9) 式を満たすようなベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ を行列 A の **(固有値 λ に対する) 固有ベクトル**と呼び, (固有値 λ に対する) 固有ベクトル全体の集合

行列 A の (固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n |\ A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

を行列 A の **(固有値 λ に対する) 固有ベクトル空間**と呼びます. 固有値を定義するところでは, **(9) 式が $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つ**という条件を付けましたが, 固有値 λ に対して, **$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ も固有ベクトルである**と考えることに注意して下さい.

以上の定義は, 次のように言い表わすこともできます. いま, 勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathbb{C}^n$ の部分集合 $V(\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ を,

$$V(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n |\ A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\ \}$$

という式によって定めると, 第 5 回の問 2 と同様にして, $V(\lambda)$ は $\mathbb{C}^n$ の**線型部分空間**になることが分かります.[6] そこで, 線型部分空間 $V(\lambda)$ が自明でないとき, すなわち,

複素数 λ が行列 A の固有値であるための条件

$$V(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$$

となるときに, 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を行列 A の**固有値**と呼び, 固有値 λ に対して, $V(\lambda)$ の元を **(固有値 λ に対する) 固有ベクトル**と呼ぶということができます. 問 1 で見たように, (9) 式は,

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{10}$$

というように書き換えることができるので, 線型部分空間 $V(\lambda)$ は, 第 5 回の問 3 のところで触れた行列の**核** (<u>ker</u>nel) という概念を用いて,

$$V(\lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$$

というように表わすこともできます. したがって, 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 A の固有値であるための条件は,

複素数 λ が行列 A の固有値であるための条件 (言い換え)

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{0}\}$$

というように表わすこともできます.

[5] もちろん, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ という設定でも, 同様の考察をすることができます.

[6] 皆さん, 確かめてみて下さい.

さて, 一見したところでは, (9) 式という連立一次方程式は λ の値を取り替えても大した違いがあるようには見えませんが, **与えられた行列 A に対して, いくつか「特別な複素数」が存在している**ということを, 問 1 の結果は意味しています. すなわち, ほとんどすべての複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しては, (9) 式の解は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ しか存在しないにもかかわらず, **いくつかの「特別な複素数」λ に対しては, (9) 式の解として, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となるものが存在する**というわけです.

そこで, **どのような複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が, 行列 A にとって「特別な複素数」であるのか**ということをハッキリさせるために, 問 1 では, (9) 式を (10) 式の形に書き換えて,

$$\text{複素数 } \lambda \text{ が行列 } A \text{ の固有値である} \implies \text{行列 } (\lambda I - A) \text{ は逆行列を持たない} \tag{11}$$

というように考えました. すると, 4 節で見るように, 一般に, n 行 n 列の行列 B に対して,

正方行列 B が逆行列を持たないための条件

$$\text{行列 } B \text{ が逆行列を持たない} \iff \det B = 0$$

となることが分かりますから, (11) 式と合わせて,

$$\text{複素数 } \lambda \text{ が行列 } A \text{ の固有値である} \implies \det(\lambda I - A) = 0$$

となることが分かります. そこで, 問 1 では,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

という方程式の解であるそれぞれの複素数 $\lambda = 1, \omega, \omega^2$ に対して, (9) 式という連立一次方程式の解をすべて求めてみることで, 連立一次方程式に自明でない解が存在すること, すなわち, これらの複素数が行列 A の固有値であることを直接確かめてみました.

実は, 一般的に**線型写像の大まかな性質**を調べてみると,

$$\text{複素数 } \lambda \text{ が行列 } A \text{ の固有値である} \iff \text{行列 } (\lambda I - A) \text{ は逆行列を持たない}$$

というように, (11) 式において, 逆向きの「 $\Longleftarrow$ 」も成り立つことが分かります.[7] したがって, 問 1 のように連立一次方程式を直接解いてみなくとも, 一般的に,

$$\text{複素数 } \lambda \text{ が行列 } A \text{ の固有値である} \iff \det(\lambda I - A) = 0 \tag{12}$$

という関係が成り立つことが分かります. いま, t を変数として,

行列 A の特性多項式

$$\varphi_A(t) = \det(tI - A)$$

[7] このことに関しては, 取りあえず, ここでは事実として認めて, 後で「線型写像の大まかな性質」について触れたときに立ち返って考えてみたいと思います.

と定めると, $\varphi_A(t)$ は n 次の多項式になることが分かりますが,[8] この多項式 $\varphi_A(t)$ を行列 A の**特性多項式**と呼びます. 例えば, 問 1 の例では,

$$\varphi_A(t) = t^3 - 1$$

でした. この記号を用いると, (12) 式から, **行列 A にとって「特別な複素数」である固有値は,**

行列 A の固有値の特徴づけ

$$\textbf{複素数 } \boldsymbol{\lambda} \textbf{ が行列 } \boldsymbol{A} \textbf{ の固有値である} \iff \boldsymbol{\varphi_A(\lambda) = 0}$$

というように「特性多項式 $\varphi_A(t)$ の零点」として特徴づけられることが分かります. 特性多項式 $\varphi_A(t)$ は n 次の多項式ですから, 重複度も込めて, 複素数 $\mathbb{C}$ の範囲で, ちょうど n 個の零点を持ちます.[9] したがって, **n 行 n 列の行列 A に対して, 相異なる固有値は高々 n 個存在する**ということが分かります. すなわち, 数ある複素数の中で, 高々 n 個の複素数だけが, 行列 A にとって「特別な複素数」として選ばれることが分かりました.

固有値と**固有ベクトル**は, 行列の「数」としての性質, あるいは, より一般に, **線型写像**の「数」としての性質を理解するために, 最も重要な概念です. したがって, 将来, 皆さんがどのような分野に進まれるとしても, 行列, あるいは, より一般に, 線型写像という概念を用いて理解できるような事柄であれば, **固有値**と**固有ベクトル**が重要な概念とかかわって現われてくるはずです. ですから, 皆さんも, 今のうちに, 固有値や固有ベクトルといった概念に慣れておくと良いのではないかと思います. 皆さんは, これから, **線型空間**や**線型写像**といった概念を学んでゆくことになりますが, そこでは, **最初に与えられた座標系ではなく,「上手い座標系」に座標を取り替えて考察することによって, 与えられた行列や線型写像の性質がより良く理解できるようになる**というような考え方をします. **この「上手い座標系」を定めるときに,「固有ベクトル」という概念が活躍する**のですが, この演習の中でも, こうした事柄について, 追々, 触れてゆこうと思います.

4 余因子行列とは

第 5 回の問 1 のところで, 行列式について少し説明しましたが, 行列式を用いると, 与えられた正方行列 A が逆行列を持つかどうかということを判定したり, 実際に逆行列を書き下したりすることができます. そこで, ここでは, **「行列式を用いた逆行列の存在判定」**や, 行列 A に逆行列が存在するときに, 行列 A の行列成分を用いて逆行列 A^{-1} を具体的に表わす**「逆行列の公式」**などについて少し考えてみようと思います. 以下で見るように, ここでのアイデアは**「行や列に関する行列式の展開公式」と「二つの行列の積がどのように**

[8] 例えば, $B(t) = tI - A$ として, **$B(t)$ という行列の各行列成分 $b_{ij}(t)$ が t に関する一次式以下の多項式である**ことに注意して, 第 5 回と問 1 のところで見た

$$\det B(t) = \sum_{i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n \text{ は互いに異なる}} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} b_{i_1 1}(t) b_{i_2 2}(t) \cdots b_{i_n n}(t)$$

という「教科書に載っている行列式の定義式」を用いて考えると, このことを確かめることができます. 興味のある方は, 確かめてみて下さい.

[9] この事実を**代数学の基本定理**と呼びます.

計算できるのか」ということを見比べてみるということにあります. 考え方の本質は全く同じですから, 話を具体的にするために, ここでは, 行列 A が,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

というように 3 行 3 列の行列である場合に説明してみることにします.[10]

さて, 第 5 回の問 1 のところでは, 行列式が,

行列式を特徴付ける三つの性質

(イ) 多重線型性

(ロ) 歪対称性

(ハ) 規格化条件

という三つの性質で特徴づけられるということや, これらの性質を用いると, 行や列に関する行列式の展開公式を導くことができるということなどを説明しました. そのときには, 主に, 列に関する議論を行ないましたが, 全く同様にして, 行に関する議論を行なうこともできます. 例えば, 行列 A の一行目の行ベクトルを,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように分解して, 行に関する (イ) という性質を用いると,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\qquad = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

となることが分かります. ここで, 行に関する (イ), (ロ) という二つの性質を用いると, 例えば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{14}$$

などというように, 1 が現われている列の 1 以外の成分はすべて 0 に取り替えることがで

[10] 以下での議論のポイントが見やすいように, ここでは, 行列 A の i 行 j 列の行列成分を a_{ij} というように「 $_{ij}$ 」という添え字を付けて表わすことにしました.

きますから,[11] (13) 式より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \tag{15}$$

となることが分かります. そこで, さらに,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

などとなることに注意すると,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{16}$$

というように, **(一行目に関する) 行列式の展開公式**が得られます. これが, 第 5 回の問 1 のところで行なった議論ですが, 以下で見るように, 我々の目的のためには, **(16) 式のように 2 行 2 列の行列式に直してしまわずに, (13) 式や (15) 式の形のままで考察する**という方が便利です.

そこで, いま, $i, j = 1, 2, 3$ として, (15) 式の右辺に現われる行列式のように, 行列 A の i 行目と j 列目だけを,

$$\begin{array}{cc} & j\text{ 列目} \\ i\text{ 行目} & \begin{pmatrix} * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

という形に取り替えることで得られる行列の行列式を, $\widetilde{A}_{ij}$ と表わすことにします. すなわち,

行列 A の余因子 (3 行 3 列の場合)

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \widetilde{A}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \cdots, \ \widetilde{A}_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[11] あるいは,「ある行に別な行の何倍かを足す」という基本変形を行なっても行列式の値は変わらないことに注意して,「二行目に一行目の $(-a_{21})$ 倍を足し, さらに, 三行目に一行目の $(-a_{31})$ 倍を足す」という基本変形を施して, (14) 式を得たと考えてもらっても構いません.

などと表わすことにします．一般に, 正方行列 A に対して, このような形で得られる行列式 $\widetilde{A}_{ij}$ を, 行列 A の第 (i,j) **余因子**と呼んだりします．

余因子を用いると, (15) 式という一行目に関する行列式の展開公式は,

余因子を用いた（一行目に関する）行列式の展開公式（ 3 行 3 列の場合 ）

$$\det A = a_{1\underline{1}}\widetilde{A}_{1\underline{1}} + a_{1\underline{2}}\widetilde{A}_{1\underline{2}} + a_{1\underline{3}}\widetilde{A}_{1\underline{3}} \tag{17}$$

というように簡明な形で表わすことができます．ただし, 式の意味が分かりやすいように, ここでは, $\{1,2,3\}$ という集合に関する和を考える添え字には「 _ 」というように下線を付けて表わしました．また, 議論を辿ると,「下線がすべて二番目の添え字に付いている」のは**「行」**に関する展開公式を考えているからであり,「下線が付いていない添え字がすべて 1 になっている」のは**「一行目」**に関する展開公式を考えているからであることが分かります．したがって, 全く同様に考えると, 例えば,**「二列目」**に関する展開公式は,

余因子を用いた（二列目に関する）行列式の展開公式（ 3 行 3 列の場合 ）

$$\det A = a_{\underline{1}2}\widetilde{A}_{\underline{1}2} + a_{\underline{2}2}\widetilde{A}_{\underline{2}2} + a_{\underline{3}2}\widetilde{A}_{\underline{3}2}$$

というように表わされることが分かります.[12]

以上の準備のもとで,「行列 A の逆行列を見つける問題」について考えてみることにします．そのために, 第 3 回の問 2 のときと同様に,**「行列 A の逆行列を見つける問題」を,「**

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \tag{18}$$

となるような 3 行 3 列の行列 B を見つける問題」であると解釈することにします．そこで, いま, 行列 A の**「行ベクトル」**を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

というように表わすことにします．また, 行列 B を,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

と表わして, 行列 B の**「列ベクトル」**を,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

[12]皆さん, 確かめてみて下さい．

というように表わすことにします. このとき, **二つの行列の積 AB の各行列成分がどのように計算されるのか**ということをじっくりと考えてみると,

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. すなわち, $i, j = 1, 2, 3$ に対して, **AB という行列の i 行 j 列成分は, $\mathbf{a}_i$ という行列 A の「行ベクトル」と $\mathbf{b}_j$ という行列 B の「列ベクトル」の積として得られる**ことが分かります.

この点に注意して, (17) 式を眺めてみると,

$$
\widetilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} \\ \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{13} \end{pmatrix}
$$

として,

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} \\ \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{13} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{a}_1 \widetilde{\mathbf{b}}_1 \qquad (20)
\end{aligned}
$$

というように, (17) 式の右辺は, $\mathbf{a}_1$ という行列 A の一行目の「行ベクトル」と, $\widetilde{\mathbf{b}}_1$ という行列 A の一行目に対応した余因子を縦に並べた「列ベクトル」との積の形に表わせることが分かります. そこで, **行列 A の一行目以外の「行ベクトル」と $\widetilde{\mathbf{b}}_1$ という「列ベクトル」の積がどうなるのか**ということも調べてみることにします.

そのために, より一般に, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ として, **勝手な「行ベクトル」**

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}
$$

と $\widetilde{\mathbf{b}}_1$ という「列ベクトル」の積がどうなるのかということを考えてみることにします. すると, 上で, (17) 式を導いた議論を逆に辿ると,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{b}}_1 &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} \\ \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{13} \end{pmatrix} \\
&= x_1\widetilde{A}_{11} + x_2\widetilde{A}_{12} + x_3\widetilde{A}_{13} \\
&= x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

となることが分かります．したがって,

列ベクトル $\widetilde{\mathbf{b}_1}$ を右から掛け算した結果

$$
\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \tag{21}
$$

となることが分かります．すなわち, $\mathbf{x}$ **という「行ベクトル」に $\widetilde{\mathbf{b}_1}$ という「列ベクトル」を右から掛け算するということは, 行列 A の一行目を $\mathbf{x}$ に置き換えて得られる行列の行列式を考えることと同じことである**ということが分かりました．特に, $\mathbf{x}$ として, 行列 A の「行ベクトル」$\mathbf{a}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ を考えてみると, (21) 式から,

$$
\mathbf{a}_i\widetilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}
$$

となることが分かりますが, 行列式の持つ (ロ) という性質を用いると, 結局,

$$
\mathbf{a}_i\widetilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{cases} \det A, & i = 1 \text{ のとき} \\ 0, & i = 2, 3 \text{ のとき} \end{cases} \tag{22}
$$

となることが分かります．

上では, 一行目に関する行列式の展開公式をもとにして考察を進めましたが, 例えば, 二行目に関する行列式の展開公式を用いると, 全く同様の議論によって,

$$
\widetilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{21} \\ \widetilde{A}_{22} \\ \widetilde{A}_{23} \end{pmatrix}
$$

として,

列ベクトル $\widetilde{\mathbf{b}_2}$ を右から掛け算した結果

$$
\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \tag{23}
$$

となることが分かります．すなわち, $\mathbf{x}$ **という「行ベクトル」に $\widetilde{\mathbf{b}_2}$ という「列ベクトル」**

を右から掛け算するということは, 行列 A の二行目を $\mathbf{x}$ に置き換えて得られる行列の行列式を考えることと同じことであるということが分かります. 特に, $\mathbf{x}$ として, 行列 A の行ベクトル $\mathbf{a}_i$, $(i=1,2,3)$ を考えてみると, (23) 式から,

$$\mathbf{a}_i\widetilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$$

となることが分かります. したがって, この場合には,

$$\mathbf{a}_i\widetilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{cases} \det A, & i=2 \text{ のとき} \\ 0, & i=1,3 \text{ のとき} \end{cases} \tag{24}$$

となることが分かります.

全く同様の議論を, 三行目に関する行列式の展開公式を用いて行ってみると, 結局,

$$\widetilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} \\ \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{13} \end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{21} \\ \widetilde{A}_{22} \\ \widetilde{A}_{23} \end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{b}}_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{31} \\ \widetilde{A}_{32} \\ \widetilde{A}_{33} \end{pmatrix}$$

として, $i,j=1,2,3$ に対して,

$$\mathbf{a}_i\widetilde{\mathbf{b}}_j = \begin{cases} \det A, & i=j \text{ のとき} \\ 0, & i\neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{25}$$

となることが分かります.[13] そこで, (19) 式と (25) 式を見比べてみると, (25) 式は,

行列 A の余因子行列 (3 行 3 列の場合)

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{31} \\ \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{32} \\ \widetilde{A}_{13} & \widetilde{A}_{23} & \widetilde{A}_{33} \end{pmatrix} \tag{26}$$

として,

余因子行列の重要な性質

$$A\widetilde{B} = \det A \cdot I \tag{27}$$

というように簡明な形で表わされることが分かります. 一般に, 正方行列 A に対して, A の余因子 $\widetilde{A}_{ij}$ を用いて, (26) 式のような形で定義される行列 $\widetilde{B}$ を行列 A の**余因子行列**と呼びます. ここで, **行列 A の余因子行列の i 行 j 列成分は, $\widetilde{A}_{ij}$ ではなく, $\widetilde{A}_{ji}$ である**ということに注意して下さい. 上の議論を見返すと, このように行と列の添え字が逆転してしまう原因は, (17) 式のような**「行」**に関する行列式の展開公式を, (20) 式のように, $\mathbf{a}_i$ という行列 A の「**行**ベクトル」と $\widetilde{\mathbf{b}}_j$ という「**列**ベクトル」の積の形に表わそうとしたことにあることが分かります.

[13]皆さん, 確かめてみて下さい.

さて, (27) 式を用いると, 行列 A が逆行列を持つための条件を, 次のように議論することができます. そこで, まず, 行列 A に逆行列が存在すると仮定してみることにします. このことは, 例えば,

$$AB = I \tag{28}$$

となるような 3 行 3 列の行列 B が存在するということを意味します. そこで, (28) 式の両辺の行列式を考えてみると, 第 5 回の問 1 のところで見たように,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

となりますから,

$$\det A \cdot \det B = 1$$

となることが分かります. したがって, 特に,

$$\det A \neq 0$$

となることが分かります. すなわち,

$$\text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} \implies \det A \neq 0 \tag{29}$$

となることが分かります.

逆に,

$$\det A \neq 0$$

であるとすると, (27) 式の両辺を, $\det A$ という数で割り算することができますから, (27) 式から,

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \widetilde{B} \right) = I \tag{30}$$

となることが分かります. よって, (30) 式から,

$$B = \frac{1}{\det A} \widetilde{B}$$

として,

$$AB = I$$

となることが分かります. すなわち,

$$\det A \neq 0 \implies \text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} \tag{31}$$

となることが分かります.

以上の議論を合わせると, (29) 式と (31) 式から,

逆行列が存在するための判定条件

$$\text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} \iff \det A \neq 0 \tag{32}$$

というように, **行列 A に逆行列が存在するかどうかということ**が, **行列 A の行列式 $\det A$**

が 0 にならないかどうかということで判定できることが分かりました. また, 上で見たように, $\det A \neq 0$ となる場合には, (27) 式の両辺を $\det A$ で割り算することで,

逆行列の公式（ 3 行 3 列の場合 ）

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{31} \\ \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{32} \\ \widetilde{A}_{13} & \widetilde{A}_{23} & \widetilde{A}_{33} \end{pmatrix} \tag{33}$$

というように, A の逆行列 A^{-1} が A の余因子行列を用いて具体的に与えられることが分かりました.

上では, 行に関する行列式の展開公式を用いて議論しましたが, 列に関する展開公式を用いても, 全く同様の議論をすることができます. すなわち, この場合には, 行列 A の**「列ベクトル」**を,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \mathbf{a}'_3 \end{pmatrix}$$

と表わして, 行列 A の余因子行列 $\widetilde{B}$ の**「行ベクトル」**を,

$$\widetilde{\mathbf{b}}'_i = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{1i} & \widetilde{A}_{2i} & \widetilde{A}_{3i} \end{pmatrix}, \ (i = 1, 2, 3)$$

と表わすことにすると, 勝手な「列ベクトル」

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

に, それぞれの「行ベクトル」$\widetilde{\mathbf{b}}'_i$, $(i = 1, 2, 3)$ を左から掛け算した結果が,

余因子行列の行ベクトル $\widetilde{\mathbf{b}}'_i$, $(i = 1, 2, 3)$ を左から掛け算した結果

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{b}}'_1 \mathbf{x}' = \begin{vmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{a}'_2 & \mathbf{a}'_3 \end{vmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{b}}'_2 \mathbf{x}' = \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{x}' & \mathbf{a}'_3 \end{vmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{b}}'_3 \mathbf{x}' = \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \mathbf{x}' \end{vmatrix} \end{cases} \tag{34}$$

という式で与えられることが分かります.[14] したがって, 特に, $\mathbf{x}'$ として, 行列 A の「列ベクトル」を考えてみると, (34) 式から, $i, j = 1, 2, 3$ に対して,

$$\widetilde{\mathbf{b}}'_i \mathbf{a}'_j = \begin{cases} \det A, & i = j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かりますから, 今度は,

[14] 皆さん, 確かめてみて下さい.

余因子行列の重要な性質

$$\widetilde{B}A = \det A \cdot I$$

という式が確かめられたということになります．また, $\mathbf{u}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ として,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{35}$$

という連立一次方程式を考えると, $\det A \neq 0$ のとき,

$$\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{36}$$

となることが分かりますが, (33) 式と (34) 式を用いると, (36) 式から, (35) 式の連立一次方程式の解 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ が,

連立一次方程式の解に対する Cramer の公式

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}_2' & \mathbf{a}_3' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1' & \mathbf{b} & \mathbf{a}_3' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1' & \mathbf{a}_2' & \mathbf{b} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{37}$$

というように具体的な形で与えられることが分かります.[15]

ここでは, 3 行 3 列の行列の場合に議論をしましたが, 一般に, n 行 n 列の行列 A に対しても, 全く同じ議論をすることができ, この場合にも, やはり,

逆行列が存在するための判定条件

$$\text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} \iff \det A \neq 0$$

という行列 A の逆行列が存在するための判定条件が成り立つことが分かります．また, $\det A \neq 0$ となる場合には,

逆行列の公式（ n 行 n 列の場合 ）

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{21} & \cdots & \widetilde{A}_{n1} \\ \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{22} & \cdots & \widetilde{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{A}_{1n} & \widetilde{A}_{2n} & \cdots & \widetilde{A}_{nn} \end{pmatrix}}_{n\text{ コ}} \tag{38}$$

というように, 行列 A の逆行列 A^{-1} が余因子行列を用いて具体的な形で与えられることが分かります．一般に, 逆行列に対する (38) 式の公式を **Cramer の公式**と呼びます.[16] 例えば, A が,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[15] 皆さん, 確かめてみて下さい.

[16] あるいは, これを, (37) 式のように「連立一次方程式の解の公式」の形に書き直したものを **Cramer の**

という 2 行 2 列の行列の場合には, A の行列式は,

$$\det A = ad - bc$$

となり, A の余因子は, それぞれ,

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, \qquad \widetilde{A}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c,$$
$$\widetilde{A}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b, \qquad \widetilde{A}_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

となりますから, (38) 式は,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{39}$$

となることが分かります. すなわち, **(38) 式という Cramer の公式は, (39) 式という皆さん良くご存じの 2 行 2 列の行列に対する逆行列の公式を n 行 n 列の行列の場合に拡張したもの**であることが分かります.

ここで, ひとつ注意をしておくと, (38) 式という Cramer の公式は, どちらかというと理論的なものであり, 例えば,「整数を成分に持つ正方行列に逆行列が存在するときに, 逆行列の行列成分もすべて整数になるための条件は何か」というような理論的な問題を考察する上ではとても有効ですが, 行列のサイズが小さくない場合には, **実際に逆行列を求める上ではあまり実用的ではない**ということです. その理由は, **あまりにたくさん行列式を計算しなければならない**という点にあります. 例えば, A が 4 行 4 列の行列である場合でも, (38) 式の右辺には, 分母である $\det A$ を含めて, 合計十七個の行列式が登場していますから, これら十七個の行列式を順番に計算しなければならないことになります. 行列式を一度に十七個も計算するのは, 行列式の計算練習にはなりますが, とても効率が悪いことが分かります. 実際には, 第 3 回の問 2 のところで見たように, **基本変形を用いて逆行列を計算する方がずっと効率がよい**ことが分かります. この点をあまり理解せずに, Cramer の公式だけを丸暗記して意気揚揚と試験に臨んで「大変なこと」になるという「悲劇」がしばしば起こります. 皆さんもこうした「悲劇」を起こさないように, 同じひとつの行列に対して, Cramer の公式を用いる方法と, 基本変形を用いる方法を二通り試してみることで, 逆行列に対する理解を深めて下さい.

5　正方行列の正則性と rank の間の関係について

さて, 4 節の結果を用いると, 第 4 回の問 3 のところで引用した

公式と呼ぶこともあります. いま, (36) 式から,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

としたときには, (35) 式の連立一次方程式の解 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ は, 行列 A の逆行列 A^{-1} のそれぞれの列ベクトルになることが分かります. したがって, (37) 式から, 逆に, 行列 A の逆行列 A^{-1} に対する公式を導くこともできますから, (33) 式と (37) 式とは本質的に同じ内容を表わしていると考えることができます.

rank による正方行列の正則性の判定法

$$n \text{ 行 } n \text{ 列の行列 } A \text{ が逆行列を持つ.} \iff \operatorname{rank} A = n \tag{40}$$

という事実を簡単に確かめることができますので, ここでは, (40) 式を確かめてみることにします.

いま, 正方行列 A の rank を,

$$\operatorname{rank} A = r$$

とすると, 正方行列 A の行や列に何度か基本変形を施すことによって,

基本変形を用いて行列 A を「見やすい形」に変形する（「日本語」による表現）

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」に変形できることが分かるのでした.[17] この事実を「行列語」を用いて表わせば, 適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が見つかって,

基本変形を用いて行列 A を「見やすい形」に変形する（「行列語」による表現）

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{41}$$

という形に変形できるということになります. そこで, 第 4 回の問 2 のところと同様に,

$$\begin{cases} P = E_s \cdots E_2 E_1, \\ Q = F_1 F_2 \cdots F_t \end{cases} \tag{42}$$

と表わすことにして, (41) 式を,

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{43}$$

と表わすことにします. このとき, (43) 式の両辺の行列式を考えてみると,

$$\det P \cdot \det A \cdot \det Q = \begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O \end{vmatrix} \tag{44}$$

となることが分かりますが, P, Q は正則行列であることに注意すると,

$$\det P \neq 0,\ \det Q \neq 0 \tag{45}$$

となることが分かりますから, (44) 式, (45) 式から,

$$\det A \neq 0 \iff \begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O \end{vmatrix} \neq 0 \tag{46}$$

[17] ここで, r 行 r 列の単位行列を I_r という記号で表わし, 零行列を O という記号で表わしました.

となることが分かります. ここで, 一般に, 対角行列の行列式は,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}$$

という式で与えられることに注意すると,

$$\begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O \end{vmatrix} = \begin{cases} 1, & (\ r = n \text{ のとき }) \\ 0, & (\ r \neq n \text{ のとき }) \end{cases} \tag{47}$$

となることが分かりますから, (46) 式, (47) 式から,

$$\begin{aligned} \text{行列 } A \text{ に逆行列が存在する} &\iff \det A \neq 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (\ (46) \text{ 式より }) \\ &\iff r = n \qquad\qquad\qquad (\ (47) \text{ 式より }) \end{aligned}$$

となることが分かります. 以上から, 無事, (40) 式の主張を確かめることができました.

6 問 2 の解答

第 5 回の問 2 のところで見たように, V が**線型部分空間**であるとは,

V が線型部分空間であるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha\mathbf{a} \in V$ となる.

という二つの条件が成り立つことでした. そこで, 与えられた部分集合 V_1, V_2, V_3 について, これらの条件が成り立つかどうかをチェックしてみます.

(1) いま, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$ を, 勝手に二つ取ってきたとします. すると, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ ですから, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases} \tag{48}$$

となることが分かります. このとき,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

となりますが, (48) 式から, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= (2a_{n-1} - a_{n-2}) + (2b_{n-1} - b_{n-2}) \\ &= 2(a_{n-1} + b_{n-1}) - (a_{n-2} + b_{n-2}) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$$

となることが分かります. さらに, 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってくると,

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

となりますが, 再び, (48) 式から, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a_n &= \alpha \cdot (2a_{n-1} - a_{n-2}) && (\ \mathbf{a} \in V_1 \text{ より }) \\ &= 2(\alpha \cdot a_{n-1}) - (\alpha \cdot a_{n-2}) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\alpha\mathbf{a} \in V_1$$

となることが分かります. 以上より, V_1 は (イ), (ロ) という二つの条件を満たすことが分かります.

(2) 例えば,

$$\mathbf{a} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbf{b} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \in V_2$$

という二つの数列を考えると, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V_2$ となりますが,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \notin V_2$$

となることが分かりますから, (イ) という条件は成り立たないことが分かります.[18]

(3) 例えば,

$$\mathbf{a} = \{0, 1, 1, 0, \ldots\} \in V_3$$

という数列を考えると, $\mathbf{a} \in V_3$ となりますが,

$$2\mathbf{a} = \{0, 2, 2, 0, \ldots\} \notin V_3$$

となりますから, (ロ) という条件は成り立たないことが分かります.[19]

以上から, V_1 だけが線型部分空間であり, V_2, V_3 は線型部分空間ではないことが分かります.

そこで, V_1 という線型部分空間について考えてみることにします. いま,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad (n \geq 3)$$

[18] もちろん, (ロ) という条件が成り立たない例を挙げても構いません.

[19] もちろん, (イ) という条件が成り立たない例を挙げても構いません.

という漸化式を解いてみると, 一般項は,

$$a_n = (2-n)a_1 + (n-1)a_2 \tag{49}$$

となることが分かります.[20] そこで, 例えば,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる V_1 の元,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{2-n\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{1, 0, -1, \cdots\} \\ \mathbf{e}_2 &= \{n-1\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{0, 1, 2, \cdots\} \end{aligned}$$

を考えてみます. このとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底となることが, 次のようにして分かります. そのためには,

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V_1$ に対して,

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$$

となる数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が確かめられればよいということになります.[21]

そこで, まず, (イ) の条件について考えてみます. いま, $\mathbf{a} \in V_1$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. すると, (49) 式から,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{(2-n)a_1 + (n-1)a_2\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{a_1 \cdot (2-n) + a_2 \cdot (n-1)\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{a_1 \cdot (2-n)\}_{n=1,2,\cdots} + \{a_2 \cdot (n-1)\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= a_1 \cdot \{(2-n)\}_{n=1,2,\cdots} + a_2 \cdot \{(n-1)\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{50}$$

[20] 一般項の形がこのようになるということに関しては, 12 節を参照して下さい.
[21] 基底に対するこれらの条件の意味については, 9 節を参照して下さい.

となることが分かりますから,

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_2 = a_2 \end{cases}$$

として, (イ) の条件が成り立つことが分かります.

次に, (ロ) の条件について考えてみます. いま, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \tag{51}$$

となると仮定してみます. このとき, (51) 式の左辺は,

$$\mathbf{0} = \{0, 0, 0, \cdots\}$$

という「零数列」を表わしていることに注意します. 一方, (51) 式の右辺は,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 &= \alpha_1 \cdot \{1, 0, -1, \cdots\} + \alpha_2 \cdot \{0, 1, 2, \cdots\} \\ &= \{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1, \cdots\} \end{aligned}$$

という数列を表わしていますから, (51) 式は, 今の場合,

$$\{0, 0, 0, \cdots\} = \{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1, \cdots\} \tag{52}$$

という式を表わしていることが分かります. そこで, (52) 式の両辺に現われる数列の最初の二つの項を見比べてみると,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となることが分かります. よって, (ロ) の条件も成り立つことが分かります.

以上から,

$$\dim V_1 = 2$$

であり, V_1 の基底として, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が取れることが分かります.

7 線型代数学における基本的な考え方について

皆さんは, これまでに,「基本変形を用いた行列の rank の計算や逆行列の計算」, あるいは,「行列式」や「余因子行列」など, 行列に関する基本的な事柄を学ばれてきたわけですが, 行列に対するより良い理解を得るためには,「線型空間」や「線型写像」という概念を導入すると便利です. この演習でも, これらの事柄について順番に取り上げていこうと思いますが, こうした概念を導入して, どのように物事を理解しようとしているのかということを最初に説明しておくと, 皆さんにとっても理解の助けになることがあるのではないかと思いますので, ここでは, 線型代数学における基本的な考え方について少し説明してみることにします.

皆さん良くご存じのように, 例えば, 物理学において物体の運動を記述しようとする場合には, 座標軸を定めて運動方程式を書き下し, 実際にその運動方程式を解くことによって, 物体がどのように運動するのかということを求めるというようなことが行なわれます. こ

のように, 具体的な問題に対して具体的な計算を進めようと思った場合には, 適当に座標軸を定めて考察を進めるということが便利です. ところが, よくよく反省してみると, x 軸や y 軸などの座標軸をどの方向に選ぶのかということは, それぞれの人によって異なり得て, **この世の中に「万人に共通の座標軸」が存在するわけではない**ということに気が付きます. すなわち, 問題に応じて「上手い座標軸」を選んで計算を進めることによって計算の手間が省けるということはありえるわけですが, 原理的には, **どのような座標軸を選んで計算を進めたとしても, 計算間違いをしなければ, 同じ結果に辿り着く**わけです. このことは, **特定の座標軸に頼らずに問題の本質を理解することができる**ということを示唆しています.

そこで, 線型代数学においても, **特定の座標軸に頼らずに「行列の本質」を理解しよう**ということが考えられました. すなわち, それぞれの人によって取り方が異なり得るような座標軸は, 一旦, 外して考察を進めることにより,「行列の本質」がより良く理解できるようになるのではないかということが考えられました. こうして導入された概念が「線型空間」や「線型写像」という概念です. すなわち,

座標軸を外して考えてみる

$$
\begin{array}{ccc}
\text{数ベクトル空間} & & \text{線型空間} \\
\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots & \xrightarrow{\text{座標軸を外して考える}} & V \\
\circlearrowright & & \circlearrowright \\
\text{行列：} A & & \text{線型写像：} f
\end{array}
$$

というように, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」が持つ性質のうち, 座標軸が無くとも理解できるような性質を抽象化して定義を与えた概念が**「線型空間」**であり, 行列を掛け算することによって定まる「数ベクトル空間」の間の写像が持つ性質のうち,「数ベクトル空間」の座標軸が無くとも理解できるような性質を抽象化して定義を与えた概念が**「線型写像」**ということになります.[22]

このように「線型空間」や「線型写像」といった概念を導入することによって,「行列の本質」がより良く理解できたり, 線型代数学で扱える対象が大幅に増えることになるのですが, 実際に, 具体的な計算を進めるに当たっては,「座標」を定めて計算を進める方が便利なことも多いです. そこで, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」の場合をヒントにして, 抽象的に定義される一般の「線型空間」に対しても,「原点のある真っ直ぐな空間」であるという特徴を生かして「座標付け」するということが考えられました. 9 節で見るように, この「座標付け」に当たって基本的な役割を果たすのが**「基底」**という概念です. こうして「線型空間」に「基底」を定めて「座標付け」をしてみると, 一見, とても抽象的に定義されたように思われる「線型空間」や「線型写像」も,

---

[22]いま, 例えば, A を 2 行 2 列の行列とすると, 行列 A を掛け算することにより, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ というように, ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ にベクトル $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を対応させることができます. このような状況を象徴的に, $\mathbb{R}^2 \circlearrowright A$ という記号を用いて表わしました. 全く同様に, V を線型空間として, $f : V \to V$ を線型写像とすると, 線型写像 f を施すことにより, $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u})$ というように, 線型空間の点 $\mathbf{u} \in V$ に線型空間の点 $f(\mathbf{u}) \in V$ を対応させることができます. このような状況を象徴的に, $V \circlearrowright f$ という記号を用いて表わしました.

「基底」を定めて「座標付け」をして考えてみる

数ベクトル空間		線型空間
$\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots$	$\xleftarrow{\hspace{6em}}$	V
$\circlearrowleft$	基底を定めて「座標付け」して考える	$\circlearrowleft$
行列：A		線型写像：f

というように, 具体的な「数ベクトル空間」や「行列」の姿に見えてくることになります.

以上のことをまとめると, 線型代数学において, 具体的な「数ベクトル空間」や「行列」と, 抽象的な「線型空間」や「線型写像」の間の関係は,

線型代数学における基本的な考え方

数ベクトル空間		線型空間
	座標軸を外して考える	
$\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \cdots$	$\xrightarrow{\hspace{6em}}$ $\xleftarrow{\hspace{6em}}$	V
$\circlearrowleft$	基底を定めて「座標付け」して考える	$\circlearrowleft$
行列：A		線型写像：f

というように, **同一の数学的な対象を,「座標軸」を外して眺めるのか, あるいは,「座標付け」して眺めるのかという違いとして理解することができる**ということになります. この演習でも, 追々, 見ていくように, **こうした二通りの見方を行ったり来たりすることによって,「行列の本質」をより良く理解することができる**ようになりますし, **行列を用いて理解することのできる対象も大幅に広がる**ことになります. このような理由で, 線型代数学の教科書でも「線型空間」や「線型写像」に関する議論がひとつの中心を占めることになるわけですが,「線型空間」の章に入った途端に抽象的な議論が続いてしまい,「何がやりたいのかサッパリ分からない」というような印象を与えてしまうことも少なくないように思われます. 皆さんも, これから, こうした事柄について学んでいくことになるわけですが, ここで述べたような基本的な考え方を念頭において,「何がしたいのか」ということを常に意識して学ばれていくと, 抽象的な議論に足をすくわれずに, しっかりとした理解を得るための助けになるのではないかと思います.

8　線型空間とは

7 節で触れたように, **「線型空間」**とは, $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{C}^3$ のような「数ベクトル空間」が持つ性質のうち, 座標軸が無くとも理解できるような性質を抽象化して定義を与えた概念です. そこで, 線型空間に対する数学的な定義を与える前に, 例えば,「数ベクトル空間」$\mathbb{R}^2$ から座標軸を取り除いてみると何が残るのかということを考えてみます. すると, 何やら「原点のある真っ直ぐな平面」が残るように思われます. 同様にして, 一般に, 与えられた「数ベクトル空間」から座標軸を取り除いてみると, やはり,「原点のある真っ直ぐな空間」が残るように思われます.

そこで,「数ベクトル空間」が持つ性質のうち, 座標軸が無くとも理解できるような性質とは, **「原点のある真っ直ぐな空間である」**ということではないかと考えられました. ただし,「真っ直ぐである」というのは極めて感覚的な定義であり, 数学的に意味のある議論が

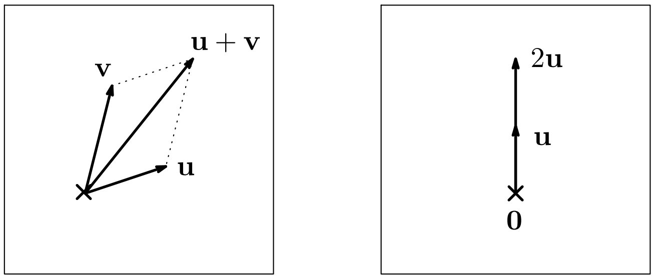

図 1: 「数ベクトル空間」において, ベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」は座標軸が無くとも考えることができる.

できるためには, 誰にとっても誤解の生じる可能性のない形で定義を与える必要があるということに注意して下さい. その目的のために注目したのが, **「数ベクトル空間」において, ベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」は座標軸が無くとも考えることができる**という点です (図 1 を参照). すなわち, このようなベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」を考えることができるのは,「数ベクトル空間」が「原点のある真っ直ぐな空間」であるからですが, 逆に,

「原点のある真っ直ぐな空間」の数学的な特徴づけ

(イ) 足し算ができる.

(ロ) スカラー倍ができる.

という二つの性質が,「真っ直ぐ」であり, かつ,「原点がある」ということの特徴だと考えてしまおうというのが基本的なアイデアです.[23] 皆さんの中には, (イ), (ロ) という二つの性質を持つということが, どうして「真っ直ぐであり, かつ, 原点がある」ということの言い換えなのか, にわかには納得できないという方も多いのではないかと思いますが,「真っ直ぐだ」という感覚的な定義に比べて, (イ), (ロ) という二つの性質は, **誰にとっても明確で, 誤解の生じる恐れのない方法で述べることのできる性質である**ということに注意して下さい.

数学では, このように, 誰にとっても明確で, 誤解の生じる恐れのない形で概念を抽出することがとても大切です.[24] このような明確な定義を与えることにより, いつの時代でも, 誰がやっても, 論理的に正しく推論すれば同じ結論にたどり着くことが保証され, 数学の世界の**普遍的な法則**が理解できることになります. 数学以外の学問の世界では, 概念の定義が, 人によってまちまちだったり, 曖昧だったりするために, お互いの議論が噛み合わないということや, 共通の理解が得られないということがしばしば起こりますが, 数学者は, 長い間の経験から, 誰にとっても誤解の生じる恐れのない明確な定義を与えることが, 物事をより良く理解する上で, とても大切なことであるということを認識してきました. といっても, **明確な定義**であれば何でもよいというわけではなく, 物事の本質を抽出したよ

[23] 第 5 回の問 2 のところでも注意しましたが, ここで,「原点がある」と考えるのは,「足し算に関する零元」という「特別な点」が存在するからです.

[24] これを, 数学では, **定義を与える**と言います.

うな**「良い定義」**を与えるということが最も大切です.

そこで, 我々の場合にも, **「真っ直ぐであり, かつ, 原点がある」という性質を「足し算やスカラー倍ができる」という性質として抽出する**ことにより, **線型空間**という概念の定義を与えてみようというわけです. このような形で線型空間という概念を導入することにより, 一見したところ何の関係もなさそうに見える実に様々な物事を共通の概念[25]で理解することができるようになることが分かっているので, 数学者は, **(イ), (ロ) という二つの性質で「原点のある真っ直ぐな空間」を定義することが「良い定義」である**と考えています. 実際, 第 5 回の問 2 のところでは, $\mathbb{R}^3$ の中の部分集合に対して,「原点を通る真っ直ぐな部分集合」であるということと,「足し算やスカラー倍をする操作で閉じた部分集合」であるということが上手く対応していることを見ました. また, 9 節で見るように, (イ), (ロ) という二つの性質を持つような集合は,「基底」という概念を用いて「座標付け」することにより,「原点のある真っ直ぐな空間」である「数ベクトル空間」と同一視できることが分かります. こうした議論を行なってみることで, (イ), (ロ) という性質によって「原点のある真っ直ぐな空間」を定義するということが正当化されることになります.

このように,「良い定義」とは, 一見してすぐに納得できるものであるとは限りません. むしろ, 数学では, 始めて聞いたときには「どうしてこれが？」と思うような言い換えが, それぞれ全く別個に理解されていた事柄に対して, 共通の理解をもたらすような「良い定義」であることがしばしばあります. これから線型空間という概念を学んでゆく中で, 線型空間とは「原点のある真っ直ぐな空間」をイメージしたものであり, 線型空間という概念を通して, 実に様々な事柄が理解できるものだと感じてもらうことができたとすれば, 皆さんにも「なるほど良い定義だ！」と思ってもらえるかもしれません.

そこで, 以下では, 「足し算やスカラー倍のできる集合」のことを**線型空間**と呼ぶことにします.[26]

9 線型空間に「座標付け」するとは

いま, 線型空間 V が, 勝手にひとつ与えられているとして, V の様子を調べることを考えてみます.[27] そこで, まず, V の元として, どのような人達がいるのかということをハッキリさせるために, それぞれの元に名前を付けて表わすことを考えてみます. 数学では, これを**「座標付けする」**と言います. それぞれの元に, 実際に「太郎」,「花子」,「大輔」などと普通の名前をつけてゆくのは大変ですから, 普通は, その代わりに, $(1, 2)$ や $(5, 7, 2)$ のような**「数の組み」を割り振る**ことを考えます. 以下では, 集合 V を空間のように思っ

---

[25] あるいは, イメージと言ってもよいかもしれません.

[26] 実際には,「足し算」や「スカラー倍」に関して「常識的な計算ができる」ということを保証するために,「結合法則」や「分配法則」などのいくつかの性質を要請するわけですが, **線型空間**のきちんとした定義については, 線型代数学の教科書を参照して下さい. これらの「線型空間の公理」は平面 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」が持つ性質を抽象化したものですが,「足し算」や「スカラー倍」が「線型空間の公理」を満たすことを確かめることにより, **与えられた線型空間の元同士の「足し算」や「スカラー倍」を, 平面上のベクトル同士の「足し算」や「スカラー倍」のように幾何学的にイメージして式の運算を行なっても間違いが起こらない**ということが保証されることになります.

[27] これでは抽象的で考えにくいと思われる方は, V とは, 問 2 で考えたような**数列全体の集合**や, 問 2 の V_1 のような**適当な線型漸化式を満たす数列の集合**であると思ってもらっても構いません.

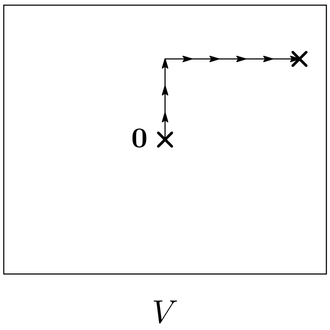

図 2: 線型空間 V では,「原点から, 縦に 3 歩, 横に 5 歩」というように, 原点を出発点として, それぞれの方向にどれだけ進めば良いのかを指定すれば, V の勝手な点の位置が指定できる.

て,[28] これから以降は, V の元のことを**「V の点」**などとも言うことにします. このとき, V に座標を決めるということは, **V の各点に $(1, 9, 4)$ などの「数の組み」を割り振って, V の点を割り振られた数の組みで表わそう**ということを意味します. いわば, **V の各点に「番地」を割り振って, V の点を, どこにいるのかという「番地」の番号で表わそう**というわけです. こういう考え方は, 国民総背番号制のようで, V の各元の個性を尊重しないけしからんものだと思われる方もいるかもしれませんが, 目的によっては便利だったりもします.

そこで, **「原点のある真っ直ぐな空間」であるという特徴を生かして, V のような線型空間に対して「番地割り」をする**ということを考えてみます. いま, 線型空間 V は「真っ直ぐ」であり, かつ,「原点がある」ので, 縦, 横, 高さなどの「基準となる方向」を決めてしまうと, 後は,「原点から, 縦に 3 歩, 横に 5 歩, $\cdots$ 」というように, **原点を出発点として, それぞれの方向にどれだけ進めば良いのかを指定すれば, V の勝手な点の位置が指定できる**ことになります (図 2 を参照). これは正に**「番地割り」**ということに他なりません.[29] もう少し注意すると, ある人は「縦, 横」だけでは物足りないというので,「斜め 45 度」という方向もつけ加えたいと強く思うかも知れません. このようにさらに方向をつけ加えても,「原点から, 縦に 3 歩, 横に 5 歩, 斜め 45 度に 1 歩, $\cdots$ 」などというように, V の点の位置を表わすことができます. ただし, このとき, 前と大きく違う点は,「原点から, 縦に 1 歩, 横に 1 歩, 斜め 45 度に 1 歩, $\cdots$ 」でもよいし,「原点から, 縦に 2 歩, 横に 2 歩, 斜め 45 度に 0 歩, $\cdots$ 」でもよいというように, **同じ点の位置を表わすのにも幾通りも表わし方が出てきてしまう**ということです (図 3 を参照). 世の中でも, 一人の人が本名

[28]数学では, 実数の集合 $\mathbb{R}$ や実数二つの組の集合 $\mathbb{R}^2$ など, 集合 S が, 単に,「ものの集まり」であるというだけでなく, **「何らかの形」を持っているとイメージできる**場合に, 集合 S のことを**「空間」**と呼んだりします. すなわち, **「何らかの幾何学的なイメージ」をもとにして, 考察している数学的な対象の理解を進めることができる**場合に,「空間」という言葉が使われます. ただし,「何らかの幾何学的なイメージ」というのは, 時代によっても変わりますし, 個々の数学者によっても異なりますから, どのような集合を「空間」と呼ぶのかということに関してハッキリとした定義があるわけではありません. 我々の場合,「原点のある真っ直ぐな空間」というイメージを用いて,「足し算やスカラー倍のできる集合」に対する理解を進めることができるので, 線型代数学では, このような集合を**「線型空間」**と呼ぶわけです.

[29]実際の「番地割り」が, このような形で整然と行なわれていることは稀ですが, 例えば, 京都の街のように, 碁盤の目の形に整然と「番地割り」が行なわれているところを思い浮かべてみると, 少し理解の助けになるかもしれません.

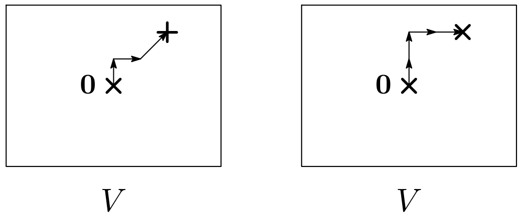

図 3: 「縦, 横」の他に「斜め 45 度」という方向もつけ加えてしまうと, 同じ点を表わすのにも,「原点から, 縦に 1 歩, 横に 1 歩, 斜め 45 度に 1 歩」でもよいし,「原点から, 縦に 2 歩, 横に 2 歩, 斜め 45 度に 0 歩」でもよいというように, 幾通りも表わし方が出てきてしまう.

や芸名やあだ名など色んな呼ばれ方を持っていると, 時として混乱を生じてしまうように, **V の同じ点を表わすのに幾通りも表わし方があると, いらない混乱を生じてしまう**ので, 普通,**「座標付けする」**というときには, **V の各点には「唯一つだけ数の組みが対応する」**ようにします.

そこで, 以上のことを数学的に考えてみることにします.「番地割り」ということがイメージしやすいように, ここでは,

「スカラー倍」=「実数を掛け算すること」

となっている場合, すなわち, V が**実数上の線型空間**である場合に説明することにします.[30]

まず, 線型空間 V に対して, **いくつか基準となる方向を決める**ということは, **V の元をいくつか持ってくることである**と理解することができます. ここでは, 仮に, V の元を三つ取ってきたとして, これを,

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3 \in V$$

と表わして, 議論を進めることにします. このとき, 上で述べたようなやり方で, **V の勝手な点に「番地」が割り振れる**ということは, **$\mathbf{u} \in V$ という元を, 勝手にひとつ取ってきたときに,**

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{53}$$

と表わせるような数 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ が見つかるということであると解釈できます. すなわち, この場合,

(53) 式をもとにして, $\mathbf{u} \in V$ に「番地」を割り振る

$$V \ni \mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

というように「番地」が割り振れることになります. このような「番地割り」を試みたときに, **どのような V の元を取ってきても「番地」を割り振ることができて, しかも, 二重に「番地」を割り振られるなどの混乱が生じない**ときに, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は V の**基底**であると言います.

[30] **複素数上の線型空間**の場合にも, 全く同様に考えることができます.

そこで, 上のように, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V$ という三つの元をもとにして「番地割り」を試みたときに, 二番目の**混乱が生じない**という条件が, どのように言い換えられるのかということを考えてみます. いま, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という「番地」を指定すれば,

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \ \in V$$

という元が定まるというように, 勝手にひとつ

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という「番地」を指定すれば,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \ \in V$$

という元が, きちんと唯ひとつ定まりますから, 混乱が生じないようにするためには, 後は, **ひとつの元に二つ以上の「番地」が割り振られることがない**ように注意すれば良いことになります.

そこで, いま, $\mathbf{u} \in V$ という元に,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という二つの「番地」が割り振られたと仮定してみます. これは, 数学的には,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{54}$$

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \tag{55}$$

というように, $\mathbf{u}$ が $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の一次結合として二通りに表わせるということを意味しています. ここで, (54) 式から (55) 式を引き算してみると,

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 - b_3)\mathbf{e}_3$$

となりますが, これは, 原点 $\mathbf{0} \in V$ に,

$$V \ni \mathbf{0} \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{56}$$

という「番地」が割り振られたことを意味しています. いま, 明らかに

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3$$

となりますから, 原点 $\mathbf{0} \in V$ には, 常に, 少なくともひとつ,

$$V \ni \mathbf{0} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という「番地」が割り振られることが分かります. したがって, **もし, 最初に, $\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}$ という点に,**

$$\boldsymbol{V} \ni \mathbf{u} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

というように, 二つの異なる「番地」が割り振られたとすると, 原点 $\mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$ に対しても,

$$\boldsymbol{V} \ni \mathbf{0} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_3} - \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

というように, 二つの異なる「番地」が割り振られることになることが分かります. 逆に, **「原点に割り振られる「番地」が**

$$\boldsymbol{V} \ni \mathbf{0} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

だけである」と仮定すると, (56) 式から,

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることが分かります. よって, **原点以外の点に対しても, 割り振られる「番地」は高々ひとつである**ことが分かります. すなわち, **「二重の番地割り」のような混乱が生じないことを確かめるには, 原点 $\mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$ に対して, 割り振られる「番地」が,**

$$\boldsymbol{V} \ni \mathbf{0} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

だけであることを確かめれば十分であることが分かりました.

以上の考察をまとめると, 次のようになります. 一般に,

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m \in V$$

というように, V の元をいくつか取ってくるときに, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ が V の**基底**であるとは, 上のような「番地割り」によって,

基底の条件

(イ) V のすべての元に対して,「番地」が割り振られる.

(ロ) 「番地割り」に「二重番地」のような混乱が生じない.

という二つの条件が満たされることです. これらの条件を数学的に表現すると,

基底の条件 (数学的な定義)

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \tag{57}$$

となるような数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

となる.

ということになります. また, (ロ) という条件を満たすときに, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ は**線型独立**であるとか, **一次独立**であるとか言ったりします. この条件は, すべての点に「番地」が割り振られるかどうかは分からないけれども, **少なくとも「番地」を割り振られた場所**[31]**では混乱は生じない**ということです. 上で見たように, **「真っ直ぐな空間」の特殊性から, 原点 $\mathbf{0} \in V$ を表わすのに混乱がなければ, 他の場所でも混乱がないということが言える**わけです. 実際に, 与えられた線型空間に対して「番地割り」を行なうにあたっては, すべての点で「番地割り」に混乱がないということをチェックするより, 原点で「番地割り」に混乱がないということをチェックする方が簡単なので,「番地割り」に混乱がないことを保証する条件としては, 普通, (ロ) のように線型独立の条件が「番地割り」のマニュアルとして採用されているわけです.

以上から, **このような V の基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を, 勝手にひとつ定めると, それぞれの元 $\mathbf{u} \in V$ を, (57) 式のように表わすことで,**

[31] これを, 数学では, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m$ **が生成する V の線型部分空間**とか, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m$ **が張る V の線型部分空間**などと呼びます. これを記号を用いて表わせば, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m$ たちの**一次結合**で表わされるような V の元全体を集めた

$$\{a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \in V \mid a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}\} \subset V$$

という V の部分集合であるということになります.

基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を用いて, $\mathbf{u} \in V$ に「番地」を割り振る

$$\boldsymbol{V \ni \mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m}$$

というように「番地割り」をすることができ, これにより, V の元と「番地全体の集合」である $\mathbb{R}^m$ の点がぴったり一対一に対応して,

線型空間 V に「座標付け」する

$$\boldsymbol{V \;\cong\; \mathbb{R}^m}$$

というように同一視できることになります. このとき, **基底として, いくつの元が必要か**ということは, **座標としていくつ数が必要か**ということに対応していますから, **この数は V という線型空間にいくつ「独立な方向」があるのかということを表わしている**と考えられます. この基底を構成する元の数[32]を, 線型空間の**次元**と呼び, 記号で,

$$\dim_{\mathbb{R}} V$$

というように表わしたりします.[33]

さて, 基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を用いて, 線型空間 V に「番地割り」をしたときに, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ という二つの元に対して, それぞれ,

$$V \ni \mathbf{u} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad V \ni \mathbf{v} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

という「番地」が割り振られたとします. すると,「番地割り」の定め方から, このことは, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ が,

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \tag{58}$$

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_m\mathbf{e}_m \tag{59}$$

というように表わせるということを意味します. そこで, (58) 式, (59) 式の両辺を足し算してみると,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_m + b_m)\mathbf{e}_m$$

となることが分かりますから, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ には,

$$V \ni \mathbf{u} + \mathbf{v} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

[32] すなわち, 基底を $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ と書いたとき, m のことです.

[33] V が複素数上の線型空間のときには, $\dim_{\mathbb{C}} V$ と表わしたりします.

という「番地」が割り振られることが分かります．また, 実数 $c \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, (58) 式の両辺に c を掛け算してみると,

$$c\mathbf{u} = ca_1\mathbf{e}_1 + ca_2\mathbf{e}_2 + \cdots + ca_m\mathbf{e}_m$$

となることが分かりますから, $c\mathbf{u}$ には,

$$V \ni c\mathbf{u} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_m \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

という「番地」が割り振られることが分かります．以上から, 基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\cdots,m}$ を用いて,

$$V \cong \mathbb{R}^m$$

というように線型空間 V に「番地割り」をするときに,

線型空間 V と「番地の集合」$\mathbb{R}^m$ 上の「足し算」や「スカラー倍」の対応

線型空間：V		「番地の集合」：$\mathbb{R}^m$
V 上の「足し算」	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R}^m$ 上の「足し算」
V 上の「スカラー倍」	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R}^m$ 上の「スカラー倍」

というように, 線型空間 V 上の「足し算」や「スカラー倍」が「番地の集合」である「数ベクトル空間」$\mathbb{R}^m$ 上の「足し算」や「スカラー倍」に対応することが分かります．これより,「足し算」や「スカラー倍」ができる集合として抽象的に定義された「線型空間」も,「数ベクトル空間」から座標軸を取り除いて得られる「原点のある真っ直ぐな空間」というイメージで調べることができることが分かります.

皆さんの中にも, 教科書などを読んで,**「基底」**や**「線型独立」**というような概念は抽象的で分かりにくいと感じられた方も多いのではないかと思いますが,**「線型空間に座標付けしたい」**という目的をしっかりと頭に置いて見直してみると, これらの概念の意味がより良く理解できるのではないかと思います.

10　V_1 の構造を漸化式を解かずに調べると

問 2 の解答は, 上で挙げたようなもので, もちろん構わないのですが, **基底**や**次元**などの概念をより良く理解するためと, 例えば,

$$V_4 = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} |\ a_n = 5a_{n-1} + 9a_{n-2} + 3a_{n-3} + 2a_{n-4},\ (n \geq 5)\ \}$$

のように, にわかには一般項の形を具体的に求めることができないような場合でも考察できるように, ここでは, V_1 の元の一般項の形を具体的に求めることなしに, V_1 の**線型空間としての構造**を議論してみることにします.

いま, V_1 の元 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$ は,

$$a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$$

という数を決めると, 後は,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \ (n \geq 3)$$

という漸化式から, すべての項 a_n が帰納的に定まりますから, 一般項の形が具体的に分からなくとも, **(a_1, a_2) が, それぞれ $(1, 0)$, $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ となるような V_1 の元**が定まります. そこで, これらの数列を, それぞれ,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \{1, 0, -1, -2, \cdots\} \\ &= \{b_n\}_{n=1,2,\cdots} \\ \mathbf{e}_2 &= \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \\ &= \{c_n\}_{n=1,2,\cdots}\end{aligned}$$

というように表わすことにします.[34] このとき, **$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底になる**ことを, V_1 の元の一般項の形を具体的に求めることなしに確かめてみることにします. 上で見たように, そのためには,

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底となるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V_1$ に対して,

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$$

となる数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となる.

という二つの条件がチェックできれば良いことになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみることにします. いま, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$ という元を, 勝手にひとつ取ってきたとします. このとき,

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \tag{60}$$

となるような数 α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ が見つかるかどうかということを考えてみます.[35] いま, (60) 式を, 数列の成分を用いて表わせば,

$$\begin{aligned}\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} &= \alpha_1 \cdot \{1, 0, -1, \cdots\} + \alpha_2 \cdot \{0, 1, 2, \cdots\} \\ &= \{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1, \cdots\} \end{aligned} \tag{61}$$

[34] 実際には, $b_n = 2 - n$, $c_n = n - 1$ となるのでした.

[35] これでは抽象的だと思われる方は, $\mathbf{a} = \{3, 5, 7, 9, \cdots\} \in V_1$ など, 具体的な数列を取ってきて考えてみて下さい.

ということになりますから, もし, このような数 α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ が見つかったと仮定すると, (61) 式の両辺に現われる数列の最初の二つの成分を比べることで,

$$\alpha_1 = a_1,\ \alpha_2 = a_2$$

でなければならないことが分かります. したがって, 後は, $\alpha_1 = a_1,\ \alpha_2 = a_2$ としたときに,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

という等式が成り立っていること, すなわち, 数列の成分を用いて表わせば, すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_n = a_1 b_n + a_2 c_n \tag{62}$$

が成り立っていることを示せば良いということになります.[36] いま, $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \in V_1$ ですから, $n \geq 3$ に対して, それぞれ,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \tag{63}$$

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} \tag{64}$$

$$c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2} \tag{65}$$

という式が成り立っていることが分かります. そこで, (63) 式から, (64) 式の a_1 倍と, (65) 式の a_2 倍を引いてやると, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned}&\{a_n - (a_1 b_n + a_2 c_n)\}\\ &\qquad = 2\{a_{n-1} - (a_1 b_{n-1} + a_2 c_{n-1})\} - \{a_{n-2} - (a_1 b_{n-2} + a_2 c_{n-2})\}\end{aligned} \tag{66}$$

となることが分かります.[37] いま, $n = 1, 2$ に対しては, (62) 式は成り立っていますから, 数学的帰納法を用いると, (66) 式から, すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, (62) 式が成り立つことが分かります.[38] したがって,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

と表わされることが分かりますから, (イ) という条件が成り立つことが分かりました.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. いま, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \tag{67}$$

[36] 例えば, $\mathbf{a} = \{3, 5, 7, \cdots\} \in V_1$ という数列に対して, (60) 式を成分で表わせば,

$$\{3, 5, 7, \cdots\} = \{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1, \cdots\}$$

となるので, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ でなければならないことが分かります. このとき確かに,

$$\begin{aligned}2\alpha_2 - \alpha_1 &= 2 \cdot 5 - 3\\ &= 7\end{aligned}$$

となるので, 数列の三項目までは等しくなりますが, さらに, 四項目以降の「 $\cdots$ 」という部分もすべて等しくなることを確かめたいというわけです.

[37] これは, $\mathbf{a} - (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \in V_1$ ということです.

[38] 皆さん, 確かめてみて下さい.

となると仮定してみます．このとき，$\mathbf{0} \in V_1$ とは，

$$\mathbf{0} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$$

という「零数列」を表わしていることに注意して，前と同様に，(67) 式の両辺を数列の成分を用いて表わすと，

$$\begin{aligned} \{0, 0, 0, \cdots\} &= \alpha_1 \cdot \{1, 0, -1, \cdots\} + \alpha_2 \cdot \{0, 1, 2, \cdots\} \\ &= \{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1, \cdots\} \end{aligned} \tag{68}$$

となることが分かります．そこで，(68) 式の両辺に現われる数列の最初の二つの項を見比べてみると，

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

となることが分かりますから，(ロ) という条件も成り立つことが分かりました．

以上より，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底となることが確かめられました．この基底を用いると，それぞれの元 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$ は，

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

というように表わせるのでしたから，

基底 $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ を用いて $\mathbf{a} \in V_1$ に「番地割り」をする

$$V_1 \ni \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

という「番地割り」によって，

基底 $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ を用いて V_1 に「座標付け」をする

$$V_1 \ \cong \ \mathbb{R}^2$$

というように同一視されるということになります．

ここで行った議論では，$\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V_1$ の一般項が，具体的には，

$$a_n = (2 - n)a_1 + (n - 1)a_2$$

という式で与えられるということや，$\mathbf{e}_1 = \{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\mathbf{e}_2 = \{c_n\}_{n=1,2,\cdots}$ という数列の一般項が，具体的には，

$$\begin{aligned} b_n &= 2 - n \\ c_n &= n - 1 \end{aligned}$$

という式で与えられるというような事実は全く使っていないということに注意して下さい．このように，**方程式などが具体的に解けなくとも「解の次元」や「基底」といったことが議論できる**ということが**「抽象的な議論」の強み**です．このような抽象的な議論は，慣れないうちは「しっくりこない」と思われる方も多いのではないかと思いますが，このように「方程式が具体的に解けなくとも，抽象的に考えることで一般的な性質を議論できることがある」ということは，皆さんも頭に置いておかれたら良いのではないかと思います．

11　V_2 の構造について

ここで, V_2 の構造についても一言触れておくことにします. 問 2 で見たように, V_2 は**線型空間**ではないのですが, 実は, 第 5 回の問 2 や問 3 のところで触れた**アファイン空間**というものになっています. そこで, このことを確かめてみることにします.

いま, V_2 の元 $\mathbf{a}_0 \in V_2$ を, 何でもよいから勝手にひとつ取ってきます.[39] 例えば, $\mathbf{a}_0$ として,

$$\mathbf{a}_0 = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \in V_2$$

という元を選んでみることにします. また, 勝手な元 $\mathbf{a} \in V_2$ に対して,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{a}_0$$

という式により, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ という数列を定めてみます.[40] 例えば,

$$\mathbf{a} = \{8, 9, 10, 11, \dots\} \in V_2$$

であるとすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \\ &= \{8, 9, 10, 11, \dots\} - \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ &= \{7, 7, 7, 7, \cdots\}\end{aligned}$$

ということになります. このとき, W_2 を,

$$W_2 = \{\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=1,2,\dots} |\ b_n = b_{n-1},\ (n \geq 2)\ \}$$

というように定めると, W_2 は一次元の線型空間になり,

$$\mathbf{a} \in V_2 \iff \mathbf{b} \in W_2$$

となることが分かります.[41] そこで, このことを, 象徴的に記号で,

V_2 は線型部分空間 W_2 を $\mathbf{a}_0$ だけ平行移動したようなアファイン空間になる

$$V_2 = W_2 + \mathbf{a}_0$$

というように表わすと, **アファイン空間 V_2 とは, 一次元の線型空間 W_2 を $\mathbf{a}_0$ だけ平行移動したものである**という感じが出ます (図 4 を参照).

さて, この状況は, 第 5 回の問 3 のところで考察したように, A を m 行 n 列の行列として, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ としたときに, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対する

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

[39] 気持ち的には, これにより, V_2 の「基点」を勝手にひとつ定めたということです.
[40] すなわち, $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}_0$ からの「ずれ」を表わす「ベクトル」です.
[41] 皆さん, 10 節の議論を参照するなどして確かめてみて下さい.

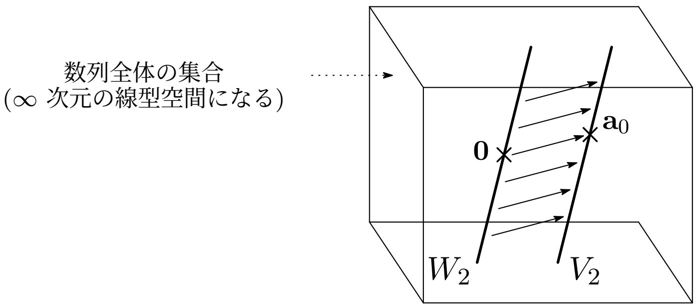

図 4: V_2 は, 一次元の線型空間 W_2 を $\mathbf{a}_0$ だけ平行移動したアファイン空間になる.

という連立一次方程式の解全体の集合

$$\mathscr{S} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n |\ A\mathbf{u} = \mathbf{b}\ \}$$

が, 特殊解 $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{S}$ を, 勝手にひとつ取ってくることで,

$$\mathscr{S} = \mathrm{Ker}\, A + \mathbf{u}_0$$

というように, 線型空間 $\mathrm{Ker}\, A$ を $\mathbf{u}_0$ だけ平行移動させたものとして表わされるということに似ています. そこで, この類似について, もう少しよく考えてみることにします.

いま, 数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が, V_2 の元であるということは, $n \geq 2$ に対して,

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

という式が成り立っているということでした. この式を, 例えば,

$$a_{n-1} - a_n = -1$$

というように書き換えて, $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して順番に書き下してみると,

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= -1 \\ a_2 - a_3 &= -1 \\ a_3 - a_4 &= -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが分かります. すると, これは, ∞ **個の成分を持つベクトル**

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

に対する, ∞ 個の方程式からなる連立一次方程式であると解釈できそうです. すなわち,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

として, V_2 は,

$$V_2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^\infty | \ A\mathbf{u} = \mathbf{b} \ \}$$

というように表わすことができることが分かります. このように, **一次式で表わされる漸化式で定義された数列の集合は, $m = n = \infty$ としたときの連立一次方程式の解の集合である**と見なすこともできることが分かりました. このように考えると, V_2 が,

$$V_2 = W_2 + \mathbf{a}_0$$

というように表わされるということと, 第 5 回の問 3 のところで見たように, 連立一次方程式の解全体の集合 $\mathscr{S}$ が,

$$\mathscr{S} = \operatorname{Ker} A + \mathbf{u}_0$$

というように表わされるということとは, 本質的に同じ状況であることが分かりました.

12　V_1 の一般項を求めること

さて, 問 2 の解答では, V_1 の一般項が,

$$a_n = (2-n)a_1 + (n-1)a_2$$

という式で与えられるということを述べましたが, ここでは, このことを行列の立場から見直してみることにします. このとき, アイデアは,

$$\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}} \tag{69}$$

という漸化式を「 (a_{n-1}, a_{n-2}) から a_n が決まる 」と読まないで, わざわざ a_{n-1} をつけ加えて,「 (a_{n-1}, a_{n-2}) から (a_n, a_{n-1}) が決まる 」というように読み替えてみるということです. すなわち,「(a_{n-1}, a_{n-2}) という**二つの数**から a_n という**ひとつの数**が決まる」と考えるのは「バランスが悪い」感じがするので, **わざわざ,**

$$\boldsymbol{a_{n-1} = a_{n-1}}$$

という「当たり前の式」を付け加えて, (69) 式を,

$$\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \iff \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}} \tag{70}$$

というように読み替えてみるということです．すると, (70) 式の右辺は,

(69) 式の漸化式を行列の言葉で読み替える

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{71}$$

というように表わすことができます．ここで,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書くことにすれば, (71) 式は,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{72}$$

というように表わせますから, (72) 式を繰り返し用いることで,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \cdots \\ &= A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{73}$$

となることが分かります．したがって, **「数列の一般項 a_n を求める問題」は「行列 A の n 乗を求める問題」に帰着する**ことが分かります．

そこで, A^n を求めることを考えてみます．いま, 行列 A の**特性多項式** $\varphi_A(t)$ を求めてみると,

$$\begin{aligned} \varphi_A(t) &= \det(tI - A) \\ &= \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} \\ &= t(t-2) + 1 \\ &= t^2 - 2t + 1 \\ &= (t-1)^2 \end{aligned}$$

となることが分かりますが, この特性多項式 $\varphi_A(t)$ に行列 A 自身を代入して得られる $\varphi_A(A)$ という行列を考えてみると,

$$\varphi_A(A) = (A - I)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように, $\boldsymbol{\varphi_A(A)}$ **という行列は零行列になってしまう**ことが分かります.[42] すなわち, 今の場合, $\boldsymbol{(A-I)}$ **という行列は,**

$$
\boldsymbol{(A-I)^2 = O}
$$

となるようなベキ零行列になっていることが分かります. このことに注意して, 第 1 回の問 2 のときと同様に, 二項展開を用いると,

$$
\begin{aligned}
A^n &= \{I + (A-I)\}^n \\
&= I + n(A-I) \\
&= \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{74}
$$

となることが分かります. したがって, (73) 式, (74) 式から,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n-1 & 2-n \\ n-2 & 3-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
a_n = (2-n)a_1 + (n-1)a_2
$$

となることが分かりました.

このように, 行列を「数」であると考えて, **行列の「数」としての性質をより良く理解する**ことで, 上のような見通しの良い計算もできることになります. 皆さんも**線型代数学**を単なる計算手段であると勝手に決めてしまわずに, **行列の「数」としての性質をより良く理解することを目的とした学問である**ということを意識して, さらに理解を深めていかれたらよいのではないかと思います.

---

[42] 実は, **勝手な** $\boldsymbol{n}$ **行** $\boldsymbol{n}$ **列の行列** $\boldsymbol{A}$ **に対して,** $\boldsymbol{A}$ **の特性多項式** $\varphi_A(t)$ **に行列** $\boldsymbol{A}$ **自身を代入すると, いつでも,**

$$
\boldsymbol{\varphi_A(A) = O}
$$

というように零行列になってしまうということが知られていて, この事実を **「Cayley-Hamilton の定理」** と言います. 興味のある方は, 2 行 2 列の行列

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

に対して, $\varphi_A(t)$ を具体的に求めて, $\varphi_A(A) = O$ となることを直接確かめてみて下さい.

さて, 上で求めた a_n という一般項を,

$$a_n = (a_2 - a_1)n + (2a_1 - a_2)$$

というように, n に関して「一次式の部分」と「零次式の部分」に分解した形に書き直してみると, V_1 の勝手な元 $\mathbf{a} \in V_1$ は,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{(a_2 - a_1)n + (2a_1 - a_2)\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{(a_2 - a_1)\cdot n\}_{n=1,2,\cdots} + \{(2a_1 - a_2)\cdot 1\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= (a_2 - a_1)\cdot \{n\}_{n=1,2,\cdots} + (2a_1 - a_2)\cdot \{1\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= (a_2 - a_1)\cdot \{1, 2, 3, \cdots\} + (2a_1 - a_2)\cdot \{1, 1, 1, \cdots\} \end{aligned} \tag{75}$$

というように表わすこともできることが分かります. すなわち,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \{n\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{1, 2, 3, \cdots\} \\ \mathbf{f}_2 &= \{1\}_{n=1,2,\cdots} \\ &= \{1, 1, 1, \cdots\}\end{aligned}$$

とすると, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ も V_1 の基底になることが分かります.[43] いま, (75) 式から,

$$\mathbf{a} = (a_2 - a_1)\mathbf{f}_1 + (2a_1 - a_2)\mathbf{f}_2$$

と表わせることが分かりますから, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ という基底を用いると, 今度は,

基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いて $\mathbf{a} \in V_1$ に「番地割り」をする

$$V_1 \ni \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ 2a_1 - a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

という「番地割り」によって,

基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いて V_1 に「座標付け」する

$$V_1 \;\cong\; \mathbb{R}^2$$

というように同一視できることになります. このように, **基底を取り替えると,**

$$\boldsymbol{V_1 \;\cong\; \mathbb{R}^2}$$

という同一視[44]の仕方は変わってしまうということに注意します. したがって, 線型空間に「座標付け」して考察をしているときには, **どのような基底を用いて「座標付け」をしているのかということをハッキリとさせて議論を進める**ことが大切です.

[43] 興味のある方は, 問 2 の解答の中で, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が V_1 の基底であることを示したときの議論をまねて, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ も V_1 の基底になることを確かめてみて下さい.

[44] この同一視を与えるということが「 V_1 に座標付けする」ということでした.

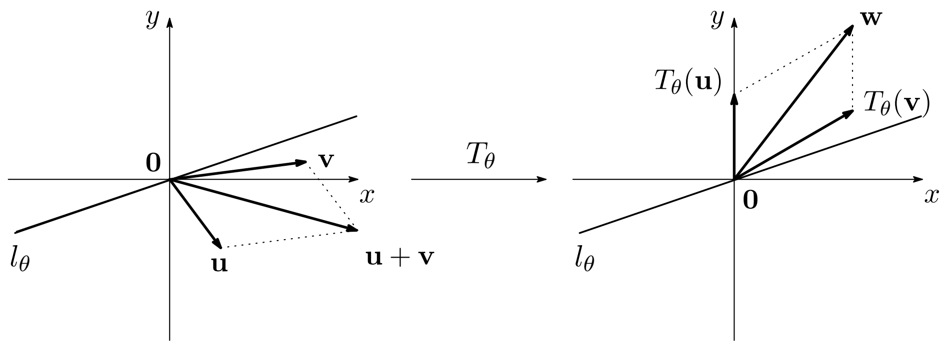

図 5: 直線 l_θ に関する折り返しの様子 (その１).

13　問３の解答

(1) T_θ が線型写像であることを示すためには,

T_θ が線型写像となるための条件

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と, 勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_\theta(c\mathbf{u}) = c \cdot T_\theta(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が成り立つことを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. そのために, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ という二つのベクトルが, 勝手に与えられているとして, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}$ という三つのベクトルを直線 l_θ に関して折り返したときの様子を考えてみます (図 5 を参照). このとき, 図 5 の右の図に現われる $\mathbf{w}$ というベクトルについて考えてみると,「$\mathbf{w}$ は $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ を直線 l_θ に関して折り返すことによって得られる」と考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \tag{76}$$

と表わせることが分かります. 一方, 図 5 の右の図だけに注目すると,「$\mathbf{w}$ は $T_\theta(\mathbf{u})$ と $T_\theta(\mathbf{v})$ の和である」とも考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v}) \tag{77}$$

とも表わせることが分かります. よって, (76) 式, (77) 式から,

$$T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$$

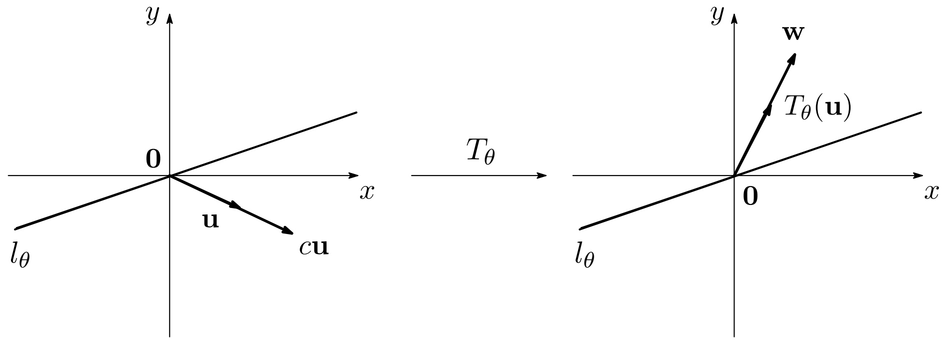

図 6: 直線 l_θ に関する折り返しの様子 (その 2).

となることが分かりますから, (イ) という条件が成り立つことが分かります.

全く同様に, ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ が, 勝手にひとつずつ与えられているとして, $\mathbf{u}$ と $c\mathbf{u}$ というベクトルを直線 l_θ に関して折り返したときの様子を考えてみます (図 6 を参照). このとき, 前と同様に, 図 6 の右の図に現われる $\mathbf{w}$ というベクトルについて考えてみると,「$\mathbf{w}$ は $c\mathbf{u}$ を直線 l_θ に関して折り返すことによって得られる」と考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(c\mathbf{u}) \tag{78}$$

と表わせることが分かります. 一方, 図 6 の右の図だけに注目すると,「$\mathbf{w}$ は $T_\theta(\mathbf{u})$ を c 倍したものである」とも考えることができますから,

$$\mathbf{w} = c \cdot T_\theta(\mathbf{u}) \tag{79}$$

とも表わせることが分かります. よって, (78) 式, (79) 式から,

$$T_\theta(c\mathbf{u}) = c \cdot T_\theta(\mathbf{u})$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件も成り立つことが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が成り立つことが分かりましたから, $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線型写像であることが分かりました.

(2) いま, ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

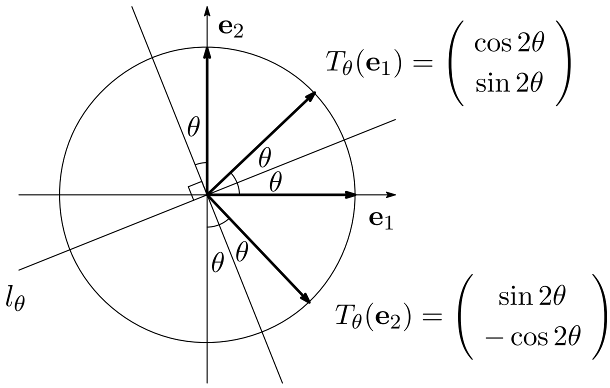

図 7: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を直線 l_θ に関して折り返したときの様子.

というように分解してみます. このとき, (イ),(ロ) という二つの性質を用いると, $T_\theta(\mathbf{u})$ は,

$$\begin{aligned} T_\theta(\mathbf{u}) &= T_\theta\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= T_\theta\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + T_\theta\left(y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && (\text{(イ) より}) \\ &= x \cdot T_\theta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot T_\theta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && (\text{(ロ) より}) \end{aligned} \tag{80}$$

というように表わせることが分かります. よって, (80) 式から, $\mathbb{R}^2$ **の勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を直線 l_θ に関して折り返した行き先 $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ の「番地」を求めるためには,**

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

として, $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{R}^2$ という特別なベクトルを折り返した行き先 $T_\theta(\mathbf{e_1}), T_\theta(\mathbf{e_2}) \in \mathbb{R}^2$ の「番地」を求めればよいということが分かります. そこで, 図を描いて, これら二つのベクトルの行き先 $T_\theta(\mathbf{e}_1), T_\theta(\mathbf{e}_2)$ の「番地」を求めてみると,

$$T_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \ T_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{81}$$

となることが分かります (図 7 参照). よって, (80) 式, (81) 式から,

$$\begin{aligned} T_\theta(\mathbf{u}) &= x \cdot T_\theta(\mathbf{e}_1) + y \cdot T_\theta(\mathbf{e}_2) \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y \\ (\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かります. したがって, 線型写像 T_θ は,

$$\hat{T}_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

として,

$$T_\theta(\mathbf{u}) = \hat{T}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かります.

14 線型写像とは

さて, 7 節で触れたように, 行列の性質をより良く理解するためには,「数が並んだもの」という行列の「もともとの姿」を離れて, **座標軸の取り方に依らない形で「行列」を見直す**という視点を導入すると便利です. その目的のために導入された概念が**「線型写像」**という概念なのですが, このときのアイデアは,**「数が並んだもの」という行列の姿に注目するのではなく, 行列を掛け算することによって定まる写像に注目する**ということにあります.

そこで, いま, $m, n \in \mathbb{N}$ として, m 行 n 列の行列 A が, 勝手にひとつ与えられているとします.[45] このとき, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 行列 A を掛け算することで, $A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ という $\mathbb{R}^m$ のベクトルが得られますが, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ を対応させる写像を $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と表わすことにします. すなわち,

$$f_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \tag{82}$$

と定めることにします.

さて, 皆さんよくご存じのように,「行列 A を掛け算するという操作」は, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ として,

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \tag{83}$$

という「分配法則」を満たすことが分かります. また, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ として,

$$A(c\mathbf{u}) = c \cdot A\mathbf{u} \tag{84}$$

という式を満たすことも分かります. そこで, (82) 式を用いて, (83) 式, (84) 式という二つの性質を写像 f_A を用いて表わすと,

[45] 幾何学的なイメージがしやすいように, ここでは, 実数行列をもとにして説明することにしましたが, 複素行列に対しても全く同様に考えることができます.

行列 A を掛け算する写像 f_A が持つ重要な性質

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f_A(c\mathbf{u}) = c \cdot f_A(\mathbf{u})$$

となる.

というように表わせることが分かります. すなわち, **「行列 A を掛け算する操作」は,**

「行列 A を掛け算する操作」の重要な性質

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^n \text{ の「足し算」} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \text{ の「足し算」} \\ \mathbb{R}^n \text{ の「スカラー倍」} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \text{ の「スカラー倍」} \end{array}$$

というように, $\mathbb{R}^n$ の「足し算」を $\mathbb{R}^m$ の「足し算」に写し, $\mathbb{R}^n$ の「スカラー倍」を $\mathbb{R}^m$ の「スカラー倍」に写すような操作になっていることが分かります.

ここで, 写像 f_A は, (82) 式を用いて, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ という「番地」が $A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ という「番地」に写るという形で定義しましたが, それぞれの「数ベクトル空間」$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ を「原点のある真っ直ぐな空間」と考えて, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ という「番地」を持った「点」が $A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ という「番地」を持った「点」に写るという形で解釈することにすると, **写像 f_A 自体は「数ベクトル空間」$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ から座標軸を消し去っても意味のある概念である**ことに注意して下さい.[46] また, 8 節で注意したように,「数ベクトル空間」$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ 上の「足し算」や「スカラー倍」は座標軸が無くとも考えることができますから, **上の (イ), (ロ) という二つの性質は特定の座標軸に依らずに述べることができる性質である**ことに注意して下さい. こうして,「数が並んだもの」としての行列から, 特定の座標軸に依らずに表現できるような性質を抽出できることが分かりましたが, こうした性質を抽象化して定義を与えたものが**「線型写像」**という概念です.

そこで, 一般に, 線型空間 V, W に対して, V から W への写像

$$f : V \to W$$

が,[47]

[46]すなわち, 写像 f_A は「$\mathbb{R}^n$ のどの点が $\mathbb{R}^m$ のどの点に写る」という形で座標軸が無くとも幾何学的にイメージすることができるわけです.

[47]第 2 回の問 3 のところで触れたように, 一般に, 集合 V から 集合 W への写像 $f : V \to W$ とは, V のそれぞれの元 $\mathbf{u} \in V$ に対して, W の元 $f(\mathbf{u}) \in W$ を対応させるようなものでした.

線型写像の条件

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ V\text{ の「足し算」} & \longrightarrow & W\text{ の「足し算」} \\ V\text{ の「スカラー倍」} & \longrightarrow & W\text{ の「スカラー倍」} \end{array}$$

というように, **V の「足し算」を W の「足し算」に写し, V の「スカラー倍」を W の「スカラー倍」に写す**ときに, 写像 f を**線型写像**と呼びます. このことを数学的にきちんと述べると, 例えば, V, W が実数上の線型空間[48]であるとして,「線型空間 V, W の間の写像 $f : V \to W$ が**線型写像**であるとは,

線型写像の条件 (数学的な表現)

(イ) 勝手な二つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\mathbf{u}) = c \cdot f(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が満たされることである」ということになります.

例えば, 第 1 回の問 3 のところで見たように, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上で原点を中心とした θ 回転を施す操作 R_θ は線型写像になりますし, 問 3 で見たように, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上で原点を通る直線 l_θ に関する折り返しを施す操作 T_θ も線型写像になります. そのときの議論を見返すと, **これらの写像が線型写像であることを確かめる上では, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の座標は何ら役割を果たしていない**ことに注意して下さい. 例えば, R_θ が「足し算」を「足し算」に写すということを確かめるためには, 図 8 のような図を描いてみればよいわけですが, その際に $\mathbb{R}^2$ の座標軸を描いてみる必要はないわけです. その意味で, **原点を中心とした回転 R_θ や原点を通る直線 l_θ に関する折り返し T_θ などは,「数が並んだ行列である」と理解するよりは「線型写像である」と理解する方が遥かに容易なことである**ことが分かります. 第 1 回の問 3 のところや問 3 のところで見たように, あるいは, より一般に, 15 節や 16 節で見るように, 実は, こうした線型写像を「番地」の言葉で記述しようとすると, **「線型写像」が「行列の姿」に「化ける」**ことが分かるのですが, こうした論理的な考察を通して初めて, R_θ や T_θ が,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

という「行列の姿」で表わせるということが納得できることになります.

[48] すなわち,「スカラー倍」=「実数倍」ということです. V や W が複素数上の線型空間の場合, すなわち,「スカラー倍」=「複素数倍」である場合にも, (ロ) において, $c \in \mathbb{R} \rightsquigarrow c \in \mathbb{C}$ と置き換えることで, 全く同様に線型写像の概念が定義できます.

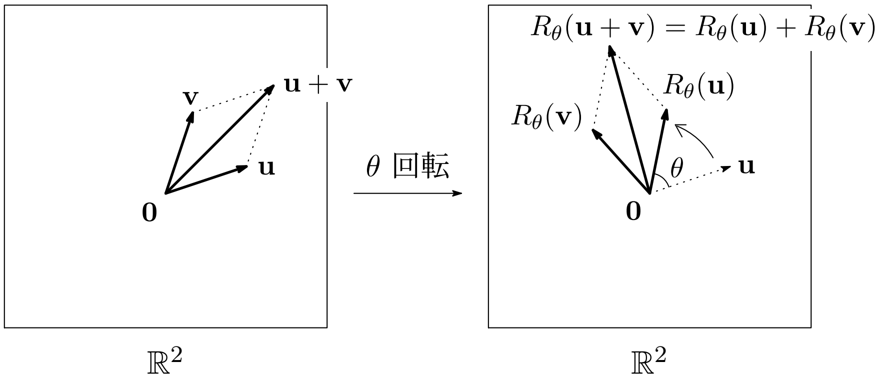

図 8: R_θ という写像を定義したり, R_θ が「足し算」を「足し算」に写すということを確かめたりする上では, $\mathbb{R}^2$ 上の座標は何の役割も果たさない.

さて, 8 節で見たように, **線型空間**は**「足し算」や「スカラー倍」ができるという代数的な構造を持った集合**として定義され, 上で見たように, **線型写像**はこうした**線型空間の構造を保つような写像**[49]として定義されます. 数学では, 線型写像の例のように, **集合上に入っている何らかの構造を保つような写像**のことを, 一般に, **準同型写像**と呼びます. その意味で, 線型写像とは**線型空間という構造に対する準同型写像**であると言うことができます. ここで,「準」という言葉がついているのは,

$$f : V \to W$$

という写像が線型写像であるというだけでは, 写像 f によって, 必ずしも, V の元と W の元がピッタリ一対一に対応しているとは限らないからです. 例えば, V のすべての元に対して, W の原点 $\mathbf{0} \in W$ を対応させるような**零写像**も立派な線型写像です.[50] これに対して, 写像

$$f : V \to W$$

が準同型写像であって, さらに, V の元と W の元をピッタリ一対一に対応させているということを強調したい場合には,「準」という言葉を取り除いて, **同型写像**と呼びます. 英語で, 準同型写像のことを <u>homo</u>morphism と言うので, 線型空間 V, W に対して, V から W への線型写像全体の集合を,

線型空間 V から線型空間 W への線型写像全体の集合

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ は線型写像 } \}$$

という記号を用いて表わす習慣があります.

[49]すなわち,「足し算」を「足し算」に写し,「スカラー倍」を「スカラー倍」に写すような写像ということです.

[50]皆さん, この零写像に対して, 上の (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることを確かめてみて下さい.

15　数ベクトル空間の間の線型写像とは

さて, 線型空間の最も分かりやすい例として, $\mathbb{R}^m$ や $\mathbb{C}^n$ のような**数ベクトル空間**を考えることができます. そこで, ここでは,

$$V = \mathbb{R}^2,\, W = \mathbb{R}^3$$

として, **$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像とはどのようなものであるのか**ということを考えてみることにします.

そこで, いま,

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

という線型写像が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように分解して, 線型写像に対する (イ), (ロ) という二つの条件を用いると, $f(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$ は,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && (\text{(イ) から}) \\ &= x \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && (\text{(ロ) から}) \end{aligned} \tag{85}$$

というように表わせることが分かります. いま,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と表わすことにすると, (85) 式から,

$$f(\mathbf{u}) = x \cdot f(\mathbf{e}_1) + y \cdot f(\mathbf{e}_2) \tag{86}$$

となることが分かります. すなわち, **$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{R}^2$ という特定の二つのベクトルの線型写像 f による行き先 $f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}) \in \mathbb{R}^3$ を決めると, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ の行き先 $f(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$ も決まってしまう**ことが分かります.

そこで, いま, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ の行き先を, それぞれ,

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}, \ f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{87}$$

というように表わすことにします. すると, (86) 式, (87) 式から, $f(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$ は,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= x \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa + yb \\ xc + yd \\ xe + yf \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります. すなわち,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

という 3 行 2 列の行列 A を用いて, 線型写像 f は,

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

というように, **行列 A を掛け算することにより定まる写像**として表わされることが分かりました.[51]

逆に, 3 行 2 列の行列 A が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, 14 節と同様に, **行列 A を掛け算することにより定まる写像**を,

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

というように表わすことにします. すなわち, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

[51] ここで行なった議論は, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とした θ 回転という線型写像 R_θ や原点を通る直線 l_θ に関する折り返しという線型写像 T_θ が「行列の姿」に「化ける」という議論と全く同じものです. 唯一の違いは, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ の行き先 $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in \mathbb{R}^3$ が抽象的にしか分からないので, (87) 式のように抽象的に表わしたという点だけです.

と定めることにします．すると, 14 節でも注意したように, 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$
$$A(c\mathbf{u}) = c \cdot A\mathbf{u}$$

となることが分かりますから, 写像 f_A は線型写像となることが分かります．さらに, 二つの 3 行 2 列の行列 A, B に対して,

$$A \neq B$$

であるとすると, 行列 A と行列 B とでは, 一列目の列ベクトル, あるいは, 二列目の列ベクトルのうち, 少なくとも一方は異なることになりますから,

$$f_A(\mathbf{e}_1) \neq f_B(\mathbf{e}_1)$$
$$f_A(\mathbf{e}_2) \neq f_B(\mathbf{e}_2)$$

のうち, 少なくとも一方の式が成り立つことが分かります.[52] したがって, $A \neq B$ であれば, 線型写像 f_A と線型写像 f_B とでは, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトルを $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルに対応させる仕方が異なることになりますから,

$$f_A \neq f_B$$

となることが分かります.

いま, m 行 n 列の実数行列全体の集合を,

m 行 n 列の実数行列全体の集合

$$M(m, n\,; \mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

という記号を用いて表わすことにすると,[53] 以上の議論から,

3 行 2 列の実数行列と $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像の対応

$$M(3, 2\,; \mathbb{R}) \ni A \;\longleftrightarrow\; f_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$

と対応させることにより,

3 行 2 列の実数行列全体の集合と $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像全体の集合の対応

$$M(3, 2\,; \mathbb{R}) \;\cong\; \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$

というように, **3 行 2 列の実数行列全体の集合 $M(3, 2\,; \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ が同一視できる**ことが分かりました.

[52] 3 行 2 列の行列 A に対して,

$$f_A(\mathbf{e}_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_A(\mathbf{e}_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

は, それぞれ, 行列 A の一列目の列ベクトル, 二列目の列ベクトルになるということに注意して下さい.

[53] 行列のことを, 英語で「matrix」と言います.

同様の議論を, $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ に対して行なえば, m 行 n 列の行列 A に対して, **行列 A を掛け算することで定まる写像**を,

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

というように表わすとき,

m 行 n 列の実数行列と $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像の対応

$$M(m, n\,; \mathbb{R}) \ni A \;\longleftrightarrow\; f_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

と対応させることにより,

m 行 n 列の実数行列全体の集合と $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像全体の集合の対応

$$M(m, n\,; \mathbb{R}) \;\cong\; \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

というように, **m 行 n 列の実数行列全体の集合 $M(m, n\,; \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ が同一視できる**ことが分かります. すなわち, **V, W が数ベクトル空間である場合には, V から W への線型写像とは「行列を掛け算すること」に他ならない**ということが分かります.

また, m 行 n 列の行列 A の他に, もうひとつ l 行 m 列の行列 B を考えてみると,

$$\mathbf{u} \overset{f_A}{\longmapsto} A\mathbf{u} \overset{f_B}{\longmapsto} B(A\mathbf{u})$$

というように, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 行列 A を掛け算してから, さらに行列 B を掛け算するということを考えることができます. すなわち, 二つの線型写像 f_A, f_B の合成写像

$$f_B \circ f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$$

を考えることができます. このとき, 一般に, **線型写像どうしの合成写像は, やはり線型写像になる**ということが分かりますから,[54] $f_B \circ f_A$ も線型写像になることが分かります. すると, 上で見てきたことから, こうした線型写像は「行列を掛け算する」ということで実現されているのですから,

$$f_B \circ f_A = f_C$$

と表わせるような l 行 n 列の行列 C が唯ひとつ存在することが分かります. いま, 写像の世界で合成写像を考えるということは**写像どうしの「自然な積」を考えることである**と解釈できますから, **こうして定まる l 行 n 列の行列 C も l 行 m 列の行列 B と m 行 n 列の行列 A の間の「自然な積」である**と解釈することができます.

皆さんの中にも, 行列について最初に学び始めた頃に,「どうしてこんな風に行列の積を定めるのだろう？」と不審に思われた方が多いのではないかと思いますが, 実際, あのような形で行列の積を定めてやると,

$$B(A\mathbf{u}) = (BA)\mathbf{u}$$

となることが確かめられますから, 正しく,

[54] 皆さん, 確かめてみて下さい.

線型写像の合成と行列の積の間の対応

$$f_B \circ f_A = f_{BA} \tag{88}$$

となることが分かります．すなわち，**行列の積とは，(88) 式が成り立つように，写像の世界の自然な「積」を行列の世界に移し変えたものである**ことが分かります．

このように，線型写像という概念を導入することにより，「数を並べたもの」であるとか，「連立一次方程式を表わすのに便利なもの」であるとかいうような理解を越えて，**線型写像**というより一般的な枠組みから**行列**を捉え直せることが分かりました．

16　線型写像の表現行列とは

さて，9 節では，基底という概念を用いて，線型空間に「番地割り」をすることができるということを見ました．そこで，ここでは，二つの線型空間 V, W の間の線型写像

$$f : V \to W$$

が，勝手にひとつ与えられているとして，**それぞれの線型空間 V, W に「番地割り」をして，写像 f を「番地」の言葉で表わしてみるときに，線型写像 f がどのような「姿」に「化ける」のか**ということを考えてみることにします．考え方の本質は一般の場合でも全く同じですから，話を具体的にするために，ここでは，15 節に合わせて，

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2,\ \dim_{\mathbb{R}} W = 3$$

と仮定して話を進めることにします．

そこで，まず，線型空間 V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を，勝手にひとつ取ってきて，

$$V \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように「番地割り」をすることで，

$$V \ \cong\ \mathbb{R}^2 \tag{89}$$

というように同一視して考えるとどういうことが分かるのかということを考えてみることにします．すると，15 節と同様にして，線型写像に対する (イ), (ロ) という二つの条件を用いると，勝手な元 $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \in V$ に対して，$f(\mathbf{u}) \in W$ は，

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \\ &= f(x_1\mathbf{e}_1) + f(x_2\mathbf{e}_2) && (\ (\text{イ})\ から\ ) \\ &= x_1 \cdot f(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot f(\mathbf{e}_2) && (\ (\text{ロ})\ から\ ) \end{aligned} \tag{90}$$

というように表わせることが分かります．したがって，(90) 式から，**$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in V$ という線型空間 V の基底ベクトルの線型写像 f による行き先 $f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}) \in W$ を決めると，勝手なベクトル $\mathbf{u} \in V$ の行き先 $f(\mathbf{u}) \in W$ も決まってしまう**ことが分かります．

そこで, さらに, 線型空間 W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$W \ni \mathbf{v} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3 \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{91}$$

というように「番地割り」をすることで, W の方も,

$$W \cong \mathbb{R}^3 \tag{92}$$

というように同一視して考えてみます. このとき, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ を,

V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ の行き先を W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を用いて表わす

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + a_{31}\mathbf{f}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + a_{32}\mathbf{f}_3 \end{cases} \quad , \quad a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{32} \in \mathbb{R}$$

というように表わすことにします. すなわち, (91) 式のような「番地割り」のもとで, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ に割り振られる「番地」を,

V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ の行き先の「番地」に注目する

$$W \ni f(\mathbf{e}_1) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{93}$$

$$W \ni f(\mathbf{e}_2) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{94}$$

というように表わすことにします. すると, 9 節で注意したように, (91) 式のような「番地割り」のもとで, 線型空間 W 上の「足し算」や「スカラー倍」は「番地の集合」$\mathbb{R}^3$ 上の「足し算」や「スカラー倍」と対応することが分かりますから, (90) 式, (93) 式, (94) 式から, $f(\mathbf{u}) \in W$ に対応した「番地」は,

$$W \ni f(\mathbf{u}) = x_1 \cdot f(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot f(\mathbf{e}_2) \;\longleftrightarrow\; x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{95}$$

となることが分かります. ここで,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{96}
$$

というように書き直せることに注意すると, (95) 式, (96) 式から, 結局, $f(\mathbf{u}) \in W$ に対応する「番地」は,

線型写像 f の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する表現行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{97}
$$

として,

$$
W \ni f(\mathbf{u}) \ \longleftrightarrow \ A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

となることが分かります.

以上から, (89) 式, (92) 式のような「座標付け」のもとで,

V や W の「座標付け」のもとで線型写像 f は行列 A のように見える

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, sloped, "\in"] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dl, phantom, sloped, "\ni"] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & W \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{R}^3 & \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ur, phantom, sloped, "\in"] & & & A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \arrow[ul, phantom, sloped, "\ni"]
\end{tikzcd} \tag{98}
$$

というように, 線型写像 f は, (97) 式で与えられる行列 A を掛け算することによって定まる写像 f_A のように見えることが分かりました. すなわち, **「線型空間 V のどの点が線型空間 W のどの点に写る」という形で写像 f を記述するのではなく, それぞれの線型空間 V, W に「番地割り」をして,「線型空間 V のどの「番地」が線型空間 W のどの「番地」に写る」という形で写像 f を記述しようとすると, 線型写像 f は行列の「姿」に「化ける」**ことが分かりました.

このようにして得られる行列 A を線型写像 f の (V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する) **表現行列**と呼びます. 上の議論を見返すと, (93) 式, (94) 式, (97) 式から, **線型写像 f の表現行列 A とは, 線型空間 V の基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ の行き先 $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ の「番地」を横に並べてできるような行列である**ことが分かります. したがって, 与えられた線型写像

$$
f : V \to W
$$

の (V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する) 表現行列を具体的に求めるためには,

線型写像 $f : V \to W$ の表現行列を求める方法 (その１)

(i) V の基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in V$ の行き先である $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ という元の「番地」を求める. すなわち, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in W$ を,

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + a_{31}\mathbf{f}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + a_{32}\mathbf{f}_3 \end{cases}$$

というように W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ を用いて表わす.

ということができればよいということになります. あるいは, (98) 式に注目して,

線型写像 $f : V \to W$ の表現行列を求める方法 (その２)

(ii) $\mathbf{u} \in V$ の「番地」が,

$$V \ni \mathbf{u} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように与えられているとして, $f(\mathbf{u}) \in W$ の「番地」を求めて,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という形に書き直してみる.

ということでも求めることができます.

ここでは,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2, \ \dim_{\mathbb{R}} W = 3$$

という場合に説明しましたが, 一般に, 二つの線型空間 V, W の間の線型写像

$$f : V \to W$$

に対しても全く同様の議論をすることができます. すなわち, この場合には,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, \ \dim_{\mathbb{R}} W = m$$

として, V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきて,

$$V \ni \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$
W \ni \mathbf{v} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + \cdots + y_m\mathbf{f}_m \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m
$$

という「番地割り」によって,

$$
\begin{aligned}
V &\cong \mathbb{R}^n \qquad (99) \\
W &\cong \mathbb{R}^m \qquad (100)
\end{aligned}
$$

というように「座標付け」してみると,

V や W の「座標付け」のもとで線型写像 f は行列 A のように見える

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, sloped, "\in"] & & & f(\mathbf{u}) \arrow[ddd, leftrightarrow] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & W \arrow[ur, phantom, sloped, "\ni"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"'] \arrow[dl, phantom, sloped, "\ni"] & \mathbb{R}^m \arrow[dr, phantom, sloped, "\ni"] & \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[rrr, mapsto] & & & A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

というように, 線型写像 f は, 適当な m 行 n 列の行列 A を掛け算するような写像 f_A のように見えることが分かります. このようにして得られる行列 A を線型写像 f の (V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ と W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_m\}$ に関する) **表現行列**と呼びます. 具体的には, 線型写像 f の表現行列とは, (99) 式, (100) 式のような「座標付け」のもとで, V の基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \in V$ の線型写像 f による行き先 $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \cdots, f(\mathbf{e}_n) \in W$ の「番地」を並べてできる行列であることも分かります. 興味のある方は, 上で行なった議論を繰り返して, これらのことを確かめてみて下さい.