数学 II 演習（第 6 回）のヒント

問 1.

(1) 与えられた連立一次方程式を,

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

という形に書き直して考えてみよ．このとき, $(\lambda I - A)$ という行列が逆行列を持つと仮定すると, (1) 式の両辺に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛け算することで,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となってしまうことに注意せよ．また,

$$\text{正方行列 } B \text{ が逆行列を持たない} \iff \det B = 0$$

となることにも注意せよ.

(2) 与えられた連立一次方程式を $(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ と表わすとき, 行列 $\lambda I - A$ とベクトル $\mathbf{0}$ を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すことで,

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I - A & \mathbf{0} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} A' & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

というように, 行列 A が「精一杯の見やすい形」になるように変形してみよ．（このとき, $(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ という最初の連立一次方程式が $A'\mathbf{u} = \mathbf{0}$ という連立一次方程式に書き直されたことになる．）ただし,「精一杯の見やすい形」とは, 例えば,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列のように, 対応する連立一次方程式 $A'\mathbf{u} = \mathbf{b}'$ が方程式を書き下しただけですぐに解けてしまうような行列のことである.

問 2. 与えられたそれぞれの部分集合 V_1, V_2, V_3 が,

V が線型部分空間となる条件

(イ) ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ を, 勝手に二つ取ってきたときに,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

となる.

(ロ) ベクトル $\mathbf{u} \in V$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ を, それぞれ勝手に取ってきたときに,

$$c\mathbf{u} \in V$$

となる.

という二つの条件を満たすかどうか確かめてみよ. また, 線型空間になる場合には, 基底を求める前に, 漸化式を満たす数列をすべて求めてみよ.

問 3.

(1) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ の図や, それぞれのベクトルを T_θ で写したベクトルの図などを描いてみることで,

$\mathbf{T}_\theta$ が線型写像となるための条件

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と, 勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_\theta(c\mathbf{u}) = c \cdot T_\theta(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が成り立つことを確かめてみよ.

(2) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように分解して, (イ), (ロ) という二つの性質を用いると, $T_\theta(\mathbf{u})$ がどのように表わせるかを考えてみよ. また, 図を描いてみることで,

$$T_\theta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ T_\theta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$$

を具体的に求めてみよ.