数学 II 演習 (第 6 回)

問 **1.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ という連立一次方程式が $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ となる解を持つためには, $\lambda \in \mathbb{C}$ はどんな値でなければならないか.

(2) このとき, それぞれの λ に対して, 上の連立一次方程式の解をすべて求めよ.

♣ 余裕があれば,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{ コ}}$$

ではどうなるか考えてみよ.

● 勝手な二つの数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 足し算とスカラー倍を,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots}$$
$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

により定める. これにより, 数列全体の集合は「線型空間」になる.

問 **2.** 次のような条件を満たす数列全体の集合 V_1, V_2, V_3 に対して, それが線型部分空間であるときには, その次元と基底を求めよ. また, そうでないときには, そうでない理由を示せ.

(1) $V_1 = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ (n \geq 3)\ \}$

(2) $V_2 = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n = a_{n-1} + 1,\ (n \geq 2)\ \}$

(3) $V_3 = \left\{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-2},\ (n \geq 3)\ \right\}$

♠ 裏に問 3 があります.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

問 **3.** $\theta \in \mathbb{R}$ として, $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通り, 傾きが $\tan\theta$ の直線を l_θ とする. すなわち, l_θ は, 原点を中心として, x 軸を反時計回りに θ だけ回転させることによって得られる直線である. また, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に対して, ベクトル $\mathbf{u}$ を直線 l_θ に関して折り返すことにより得られるベクトルを $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ と表わす. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ を対応させることによって得られる写像 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線型写像になることを示せ.

(2) 線型写像 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を表わす行列を求めよ. すなわち, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$T_\theta(\mathbf{u}) = \hat{T}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わせるような 2 行 2 列の行列 $\hat{T}_\theta$ を求めよ.