数学 II 演習 (第 5 回)

問 1. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}, \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

♣ 余裕があれば,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

などの行列式についても考えてみよ.

問 2. 次のような $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V_1, V_2, V_3 に対して, それが線型部分空間であるときには, そのことを証明し, そうでないときには, そうでない理由を示せ.

$$(1)\ V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$(2)\ V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 1 \right\}$$

$$(3)\ V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

♠ 裏に問 3 があります.

問 **3.** $k \in \mathbb{R}$ とする．このとき,

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = k \end{cases}$$

という連立一次方程式が解を持つためには, k はどんな値でなければならないか．また, そのときの連立一次方程式の解をすべて求めよ．