数学 II 演習 (第 4 回) の略解

目 次

1　問 1 の解答

(1) 与えられた行列 A_3 と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1 行目+3 行目×1}]{\text{1 行目+2 行目×1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3 行目×2}]{\text{2 行目+1 行目×1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{1 行目×4}]{\text{3 行目+2 行目×1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{2 行目×2}]{\text{1 行目+3 行目×(−1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, 各行を $\frac{1}{4}$ 倍してみると,

$$A_3^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(2) 同様にして, 与えられた行列 A_4 と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times 1]{\substack{1\text{ 行目}+(2\text{ 行目}+3\text{ 行目}+4\text{ 行目}) \\ 2\text{ 行目}+(3\text{ 行目}+4\text{ 行目})}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times 1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}\times 5]{\substack{1\text{ 行目}\times 5 \\ 2\text{ 行目}\times 5}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 5 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 5 & 10 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-3)]{\substack{1\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-1) \\ 2\text{ 行目}+4\text{ 行目}\times(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, 各行を $\frac{1}{5}$ 倍してみると,

$$A_4^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

2　n 行 n 列の場合にはどうなるのか

ここで, 興味のある方がいるかもしれませんから, $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として,

$$A_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{n\text{コ}}$$

という n 行 n 列の行列 A_n に対して, A_n の逆行列 A_n^{-1} の形がどうなりそうかということを考えてみることにします. このとき, 上の計算結果だけから, すぐに A_n^{-1} の形に予想が付くとは限りませんから, さらに, A_2^{-1}, A_5^{-1} などの行列にも挑戦してみると,

$$A_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_5^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

となることが分かります. そこで, これらの計算結果を並べてみると,

$$A_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_3^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_4^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_5^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

これらの行列の姿をじっと見比べてみると, 一般に, A_n^{-1} は,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{n+1}\underbrace{\begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & * & \cdots & * & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & * & \cdots & * & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}}_{n\text{コ}}$$

という形になりそうなことが分かります. そこで, さらに注意深く $A_2, A_3, \cdots, A_5$ という行列の姿を見比べてみると, $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して, A_n^{-1} の第 i 行目は, $\frac{1}{n+1}$ という因子を除いて,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i\,\text{列目} & & & \end{array} \\
i\,\text{行目} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1-i & 2(n+1-i) & \cdots & i(n+1-i) & \cdots & i \cdot 2 & i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}
\end{array}
$$

というように, i 行 1 列目の成分である $(n+1-i)$ から始まって, 順番に, $(n+1-i)$ ずつ増えてゆき, i 行 i 列目の対角成分である $i(n+1-i)$ に到達した後は, 順番に, i ずつ減ってゆき, 最後に, i 行 n 列目の成分である i に落ち着くというパターンになっていそうなことが分かります.[1] 以上から, A_n^{-1} は,

$$
A_n^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{1}
$$

という形になるのではないかと予想することができました.

こうして予想がついてしまえば, 後は,

$$
A_n \cdot A_n^{-1} = I \tag{2}
$$

となることを確かめてみることで, (1) 式で与えられる行列 A_n^{-1} が A_n の逆行列であることが分かります. ここで, A_n, A_n^{-1} という二つの行列を具体的に書き下して, 直接行列の積を計算するのは大変そうに見えますが, 第 3 回の問 1 のところで基本行列と基本変形を対応させて考えたときのように, A_n という行列の i 行目である

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & & & (i-1)\,\text{列目} & i\,\text{列目} & (i+1)\,\text{列目} & & & \end{array} \\
i\,\text{行目} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

という行列が「A_n^{-1} という行列の i 行目を 2 倍したものから $(i-1)$ 行目と $(i+1)$ 行目を引き算した行列を, $A_n \cdot A_n^{-1}$ という行列の i 行目として書きなさい」という命令に対応していることと, (1) 式で与えられる A_n^{-1} という行列の j 列目の行列が, $\frac{1}{n+1}$ という因子

[1] 列に関しても, 全く同じパターンになっていそうなことが分かります.

を除いて,

$$
\begin{array}{cc}
 & j\text{ 列目} \\
j\text{ 行目} & \begin{pmatrix} n+1-j \\ 2(n+1-j) \\ \vdots \\ j(n+1-j) \\ \vdots \\ j\cdot 2 \\ j \end{pmatrix}
\end{array}
$$

というように表わせることに注意して, $A_n \cdot A_n^{-1}$ という行列の i 行 j 列目の成分がどうなるかということを慎重に考えてみるという方針を取ると, $A_n \cdot A_n^{-1} = I$ となることが少し確かめやすくなるかもしれません.

3 問 2 の解答

(1) 仮定から, a_1, a_2, a_3, あるいは, b_1, b_2, b_3 の中には, 0 でない数が, それぞれ存在することになりますが, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ であると仮定しても一般性を失わないことに注意します.[2] そこで, 以下では,

$$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$$

と仮定することにします. すると, 例えば,

$$
\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{1\text{ 行目 }\times\frac{1}{a_1b_1}}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_2}{b_1} & \frac{b_3}{b_1} \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a_3b_1)]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a_2b_1)}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_2}{b_1} & \frac{b_3}{b_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times\left(-\frac{b_3}{b_1}\right)]{2\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times\left(-\frac{b_2}{b_1}\right)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

などと変形できることが分かります. したがって,

$$\operatorname{rank} A = 1$$

となることが分かります.

(2) (1) と同様にして,

$$\operatorname{rank} A = 1$$

[2] 例えば, もし, 0 でない数が, a_2 と b_3 であるとすると,

$$
\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \underline{a_2b_3} \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{1\text{ 行目}\leftrightarrow 2\text{ 行目}}
\begin{pmatrix} a_2b_1 & a_2b_2 & \underline{a_2b_3} \\ a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}
\xrightarrow{1\text{ 列目}\leftrightarrow 3\text{ 列目}}
\begin{pmatrix} \underline{a_2b_3} & a_2b_2 & a_2b_1 \\ a_1b_3 & a_1b_2 & a_1b_1 \\ a_3b_3 & a_3b_2 & a_3b_1 \end{pmatrix}
$$

というように基本変形することによって, このような形になりますから, そこからスタートすると思えば良いわけです.

となることが分かります.[3]

4　行列 A の形を良く眺めると

ここで,「行列 A の rank が, いつでも 1 になる」ということを不思議に思われて, このことと, 行列 A が問題に与えられたような「特別な形をしている」ということとが, 何か関係あるのではないかと思われた方は, 数学的に良い感覚の持ち主です. そこで, もう一度, 行列 A の形をじっと眺めてみます. すると, A は,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように, **m 行 1 列の行列と 1 行 n 列の行列の積の形に書き直せる**ことに気が付かれる方があるかもしれません.

このように書き直して見ると, A という行列は**ある特徴的な性質**を持っていることが分かります. すなわち, $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n
$$

を, 勝手にひとつ取ってきて, $A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ というベクトルを考えてみると,

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)
\end{aligned}
$$

[3] 基本変形に慣れていないと思われる方は, (1) のように,

$$
\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots \\ * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}
$$

という形にしてから始めると, 変形がしやすくなるのではないかと思います.

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_1(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \\ a_2(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \\ \vdots \\ a_m(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \end{pmatrix} \\
&= (b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となることが分かります．したがって, (3) 式から, **$A\mathbf{u}$ というベクトルは, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ の取り方に依らず, いつでも,**

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}
$$

という定まったベクトルのスカラー倍という形に書けてしまうことが分かります.

一般に, m 行 n 列の行列 A が与えられたときに, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を用いて, $A\mathbf{u}$ という形で書けるようなベクトル全体からなる $\mathbb{R}^m$ の部分集合を, 記号で,

行列 A の像

$$
\operatorname{Im} A = \{ A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \}
$$

と表わし, 行列 A の**像** (image) と呼びます.[4] この記号を用いると, 上で述べたことは, 象徴的に,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} A &= \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というように表わすことができます．すなわち, **行列 A は一見複雑そうな形をしているように見えますが, A を掛け算することで得られるようなベクトル全体の集合 $\operatorname{Im} A$ は一次元分の広がりしか持たない**ことが分かりました．このことが,

$$
\operatorname{rank} A = 1
$$

[4]あるいは, 行列 A を掛け算することにより定まる線型写像の**像**と呼びます.

であることと関係あると思われた方は, rank についての理解が正しい方向に向かっています.

実は, $\operatorname{Im} A$ は $\mathbb{R}^m$ の**線型部分空間**[5]になり, **rank とは,**

rank の意味

$$\mathbf{rank}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{A}$$

というように, 線型部分空間 $\mathbf{Im}\, \boldsymbol{A}$ の次元であるというように理解することができます. このことについては, 後で, **「線型空間」**や**「線型写像」**などの考え方を導入して,「線型写像の大まかな様子」ということに触れたときに, もう一度, 見返してみることにします.

5 問3の解答

(1) 与えられた行列 A に対して, 行と列に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります. したがって, $a^2 = 1$ のときには,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから, $\operatorname{rank} A = 1$ となることが分かります. 一方, $a^2 \neq 1$ のときには, さらに,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行目}\times\frac{1}{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かりますから, $\operatorname{rank} A = 2$ となることが分かります.

以上より,

$$\begin{cases} \operatorname{rank} A = 1, & (\ a^2 = 1\text{ のとき }) \\ \operatorname{rank} A = 2, & (\ a^2 \neq 1\text{ のとき }) \end{cases}$$

となることが分かります.

さらに, $a^2 \neq 1$ のとき, 与えられた行列 A と単位行列 I を横に並べて, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(A \,\middle|\, I \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & -a & 1 \end{array}\right)$$

[5]すなわち, その部分集合内のベクトルを取ってきて,「足し算」や「スカラー倍」をしたときに, 得られたベクトルもまた同じ部分集合の中にとどまるために, それ自身が**線型空間**になっているような部分集合のことです.

$$\xrightarrow{1\text{ 行目}\times(1-a^2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1-a^2 & a(1-a^2) & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-a)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1-a^2 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & -a & 1 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります．したがって，すべての行を $\frac{1}{1-a^2}$ 倍することで，

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります．

(2) 全く同様に，与えられた行列 A に対して，行と列に関する基本変形を施してみると，例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times a^2]{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-a)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列目}+2\text{ 列目}\times(-a)]{3\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります．したがって，$a^3 = -1$ のときには，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから，$\operatorname{rank} A = 2$ となることが分かります．一方，$a^3 \neq -1$ のときには，さらに，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行目}\times\frac{1}{1+a^3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かりますから，$\operatorname{rank} A = 3$ となることが分かります．

以上より，

$$\begin{cases} \operatorname{rank} A = 2, & (\ a^3 = -1 \text{ のとき }) \\ \operatorname{rank} A = 3, & (\ a^3 \neq -1 \text{ のとき }) \end{cases}$$

となることが分かります．

さらに，$a^3 \neq -1$ のとき，与えられた行列 A と単位行列 I を横に並べて，行に関する基本変形を施してみると，例えば，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & -a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times a^2]{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times(-a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -a^2 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 & -a & a^2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}\times(1+a^3)]{1\text{ 行目}\times(1+a^3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+a^3 & 0 & -a^2(1+a^3) & 1+a^3 & -a(1+a^3) & 0 \\ 0 & 1+a^3 & a(1+a^3) & 0 & 1+a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 & -a & a^2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times(-a)]{1\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times a^2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+a^3 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1+a^3 & 0 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1+a^3 & -a & a^2 & 1 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, すべての行を $\frac{1}{1+a^3}$ 倍することで,

$$A^{-1} = \frac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

6　問 3 の結果を見直すと

さて, 行列 A の各成分は a に関する多項式ですから, 第 1 回の問 2 や第 3 回の問 2 のときのように,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$A = I + aT \tag{4}$$

というように, a に関して零次式の部分と一次式の部分に分けてみることは自然なことのように思われます. すると, (4) 式から,

$$A^{-1} = (I + aT)^{-1}$$

というように表わすことができますから, 第 3 回の問 2 のときと同様に,

$$\boldsymbol{f(x) = (1+x)^{-1}}$$

という関数を Taylor 展開した式に,

$$\boldsymbol{X = aT}$$

という行列を代入することで, A^{-1} が求まるのではないかと期待されます. そこで, そのときに行なった議論を少し見返してみることにします.

いま, $n \in \mathbb{N}$ を, 勝手にひとつ取ってきた自然数として,

$$(1+x)\left\{1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n \cdot x^n\right\} = 1 + (-1)^n \cdot x^{n+1} \tag{5}$$

という恒等式に注目して, (5) 式の変数 x のところに正方行列 X を代入することで,

$$(I+X)\left\{I - X + X^2 - \cdots + (-1)^n \cdot X^n\right\} = I + (-1)^n \cdot X^{n+1} \tag{6}$$

という恒等式が得られますが, この (6) 式が議論の出発点でした. 第 3 回の問 2 のところでは, X として,

$$\begin{aligned} X &= \alpha^{-1} N \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という**ベキ零行列**を考えたので,

$$X^3 = O$$

となり, $n \geq 2$ のとき, (6) 式から,

$$(I+X)(I - X + X^2) = I \tag{7}$$

という式が得られるのでした. したがって, (7) 式から,

$$(I+X)^{-1} = I - X + X^2$$

となることが分かるのでした.

今回の場合は, 行列 T のベキを計算してみると,

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

となることが分かりますから,

$$T^3 = I \tag{9}$$

となることが分かります. よって, 残念ながら, 行列 T は N のようなベキ零行列とはならないことが分かります. しかしながら, (9) 式を用いることで, X^n は簡単に計算することができて, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} X^{3m} = a^{3m} \cdot I \\ X^{3m+1} = a^{3m+1} \cdot T \\ X^{3m+2} = a^{3m+2} \cdot T^2 \end{cases} \tag{10}$$

となることが分かります. したがって, $|a| < 1$ であると仮定すると, $m \to \infty$ のとき,

$$X^{3m} = \begin{pmatrix} a^{3m} & 0 & 0 \\ 0 & a^{3m} & 0 \\ 0 & 0 & a^{3m} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$X^{3m+1} = \begin{pmatrix} 0 & a^{3m+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{3m+1} \\ a^{3m+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$X^{3m+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{3m+2} \\ a^{3m+2} & 0 & 0 \\ 0 & a^{3m+2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

となることが分かりますから, $n \to \infty$ のとき,

$$X^n \to O$$

となることが分かります.

そこで, $|a| < 1$ であるとして, (6) 式の両辺で, $n \to \infty$ としてみると,

$$(I + X)(I - X + X^2 - \cdots) = I \tag{11}$$

という式が得られます. よって, このとき,

$$I - X + X^2 - \cdots$$

という無限和が収束して, きちんとひとつの行列を定めることが確かめられれば, (11) 式から, この行列が,

$$A^{-1} = (I + X)^{-1}$$

となっていることが分かります.

そこで, (10) 式を用いて, この無限和を計算してみることにします. すると,

$$\begin{aligned} I - X + X^2 - X^3 + X^4 - \cdots \\ &= (I - X^3 + X^6 - X^9 + \cdots) + (-X + X^4 - X^7 + X^{10} - \cdots) \\ &\qquad + (X^2 - X^5 + X^8 - X^{11} + \cdots) \\ &= (1 - a^3 + a^6 - a^9 + \cdots)\, I + (-a + a^4 - a^7 + a^{10} - \cdots)\, T \\ &\qquad + (a^2 - a^5 + a^8 - a^{11} + \cdots)\, T^2 \\ &= (1 - a^3 + a^6 - a^9 + \cdots)\, I - a(1 - a^3 + a^6 - a^9 + \cdots)\, T \\ &\qquad + a^2(1 - a^3 + a^6 - a^9 + \cdots)\, T^2 \\ &= (1 - a^3 + a^6 - a^9 + \cdots)(I - aT + a^2T^2) \\ &= \frac{1}{1 + a^3}\,(I - aT + a^2T^2) \end{aligned} \tag{12}$$

となることが分かります. いま, (8) 式より,

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

でしたから, (12) 式から,

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{1+a^3}\,(I - aT + a^2T^2) \\
&= \frac{1}{1+a^3} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となることが分かりました. ここまでたどり着くと, **A^{-1} に対する (13) 式の表示は $|a| < 1$ でなくとも意味を持つ**ということに注意して, 後は,

$$A^{-1} \cdot A = I \qquad (14)$$

となることを直接チェックすることで, 一般に, $a^3 \neq -1$ となる実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, A の逆行列が (13) 式で与えられることが分かります.

ここで, **最初は $|a| < 1$ という条件を付けて議論していたはずなのに, どうしてこの条件がいらなくなったのか**と不思議に思われた方も多いのではないかと思います. そこで, 上の議論を注意深く見返してみることにします. すると, この条件を外して考えることができるようになった議論のポイントは,

$$\boldsymbol{I - X + X^2 - \cdots}$$

という無限和を,

$$\boldsymbol{I - X + X^2 - \cdots = \frac{1}{1+a^3}\,(I - aT + a^2T^2)} \qquad (15)$$

という形にまとめることができたということにあることが分かります. すなわち, (15) 式の左辺の表示は, $|a| < 1$ となる実数 $a \in \mathbb{R}$ に対してのみ意味がある表示であるのに対して, (15) 式の右辺の表示は,

$$a^3 \neq -1$$

でありさえすれば, どんな実数 $a \in \mathbb{R}$ に対してでも意味のある表示ですから, 後は,

$$T^3 = I$$

となることを用いて, 例えば,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+a^3}\,(I - aT + a^2T^2) \cdot A &= \frac{1}{1+a^3}\,(I - aT + a^2T^2)(I + aT) \\
&= \frac{1}{1+a^3}\,\left\{(I - aT + a^2T^2) + (aT - a^2T^2 + a^3T^3)\right\} \\
&= \frac{1}{1+a^3}\,(I + a^3T^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+a^3}\,(I + a^3 I) \\
&= \frac{1}{1+a^3} \cdot (1+a^3) I \\
&= I
\end{aligned}
$$

というように, (14) 式を直接チェックしてみることで, $a^3 \neq -1$ のときに,

$$
A^{-1} = \frac{1}{1+a^3}\,(I - aT + a^2 T^2)
$$

となることが確かめられることになります.

このことは,

$$
f(x) = \frac{1}{1+x}
$$

という関数を,

$$
\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{16}
$$

というように「多項式の姿」に「化かし」て表わしたときに, **(16) 式の右辺は, $|x| < 1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対してしか意味がない表示であるのに対して, (16) 式の左辺は, $x \neq -1$ でありさえすれば, どんな実数 $x \in \mathbb{R}$ に対してでも意味がある表示である**ということに対応しています. そうすると,

$$
\frac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots
$$

などという式も真面目に考えてみようかという気もしてきます. このように, **関数とは「色んな姿」[6]を持っているもので, 与えられた関数の性質をより良く理解するためには, 目的に応じて「都合のよい姿」で考察することが大切です**. その意味で, あるひとつの表示を用いて定義されている関数に対して, 関数の定義域を最初の表示のままでは意味をなさない領域にまで拡張して考えることを許すような「より良い表示」を発見することが, 数学や物理学の色々な場面で重要な問題として現われてきます.

興味のある方は, 問 3 の例で, A が n 行 n 列の行列のときに, A の rank や A^{-1} がどうなるかということも考えてみて下さい.

7 基本変形により逆行列を求めること (再論)

さて, 第 3 回の問 2 のところでは,「基本変形を用いた逆行列の計算法」ということに触れ, 与えられた正則行列[7] A に対して, 行列 A の逆行列を求めるためには, 行と列の両方に関する基本変形が許されるわけではなく, **行なら行, 列なら列というように, どちらか一方に関する基本変形だけを施すことに決めなければならない**ということを強調しました. その上で, もし, **行に関する基本変形**を用いて逆行列を求めたいのだとすれば, 与えられた行列 A と単位行列 I を**横**に並べて書いて,

[6] あるいは, **表示**と言った方が分かりやすいかもしれません.
[7] すなわち, 逆行列を持つ行列のことです.

行に関する基本変形を用いて逆行列を求める

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

という計算をすれば良いことを, **列に関する基本変形**を用いて逆行列を求めたいのだとすれば, 与えられた行列 A と単位行列 I を**縦**に並べて書いて,

列に関する基本変形を用いて逆行列を求める

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{列に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c} I \\ \hline A^{-1} \end{array}\right)$$

というような計算をすれば良いことを説明しました. しかしながら, 皆さんの中には, 第 3 回の問 2 のところで挙げた説明には納得できたものの,「逆行列を求めるためには, 絶対に行変形, あるいは, 列変形のうちの一方に決めなければならないのか？」と疑問に思われた方がいるかもしれません. また, そのときの説明では, **「与えられた正則行列 A が行に関する基本変形を何度か施すことにより, 単位行列に基本変形できた」**と仮定して話を進めましたが,「いつでもこの仮定が満たされるのだろうか？」と疑問に思われた方もいるかもしれません. そこで, ここでは, こうした点について少し考えてみることにします. そのためには, 第 3 回の問 1 のところで説明した「行列の rank の計算」に立ち返って考えてみるのが便利です.

さて, 第 3 回の問 1 のところで見たように, $m, n \in \mathbb{N}$ として, 与えられた m 行 n 列の行列 A に対して, A の行や列に何度か基本変形を施すことによって,

基本変形を用いて行列 A を「見やすい形」に変形する (「日本語」による表現)

$$A \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」に変形できることが分かるのでした.[8] この事実を「行列語」を用いて表わせば, 与えられた行列 A に対して, 適当な基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が見つかって,

基本変形を用いて行列 A を「見やすい形」に変形する (「行列語」による表現)

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{17}$$

という形に変形できるということになります. このとき,「見やすい形」の対角線上に残った 1 の数 r のことを, 行列 A の rank と呼び, $r = \operatorname{rank} A$ と表わすのでした.

さて, ここで問題としたいことは, 行列 A の逆行列の計算法についてですが, 第 3 回の問 2 のところで注意したように, 行列 A に逆行列が存在し得るのは, A が正方行列のときだけですから, 以下では, $m = n$ として, 行列 A は n 行 n 列の正方行列であるとして, 話を進めることにします. このとき,「見やすい形」の対角線上に残る 1 の数は行列のサイ

[8] ここで, r 行 r 列の単位行列を I_r という記号で表わし, 零行列を O という記号で表わしました.

ズを上回ることはできませんから,

$$\operatorname{rank} A \leq n$$

となることが分かりますが, 実は,

rank による正方行列の正則性の判定法

$$\text{行列 } A \text{ が逆行列を持つ.} \iff \operatorname{rank} A = n \tag{18}$$

となることが分かります. この事実は, rank の性質だけを用いて確かめることもできるのですが,「行列式」を用いて議論した方がより良く理解できるのではないかと思いますので, ここでは,

$$\text{行列 } A \text{ が逆行列を持つ.} \implies \operatorname{rank} A = n \tag{19}$$

ということは, 取りあえず, 事実として認めることにして,

$$\operatorname{rank} A = n \implies \text{行列 } A \text{ が逆行列を持つ.} \tag{20}$$

という方向についてだけ, 独立した議論を与えることにしようと思います.[9]

そこで, いま, n 行 n 列の正方行列 A の rank が n であると仮定してみます. すると, このことは, 行や列に関する基本変形を施すことにより, 行列 A を単位行列 I に変形することができるということを意味していますから, (17) 式から,

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = I \tag{21}$$

となるような基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が存在することが分かります. そこで,

$$\begin{cases} P = E_s \cdots E_2 E_1, \\ Q = F_1 F_2 \cdots F_t \end{cases} \tag{22}$$

と表わすことにして, (21) 式を,

$$PAQ = I \tag{23}$$

と表わすことにします. このとき, Q は正則行列であることに注意して,[10] (23) 式の両辺に, 左から Q を掛け算し, 右から Q^{-1} を掛け算してみると,

$$Q(PAQ)Q^{-1} = QIQ^{-1} \tag{24}$$

となりますが,

$$Q(PAQ)Q^{-1} = QPA(QQ^{-1})$$

[9] (18) 式における「$\iff$」という両方向の主張を確かめることについては,「行列式」に関する必要な事柄を説明した後で, 改めて考えてみることにしようと思います.

[10] 基本行列は正則行列であることに注意すると, 行列 Q の逆行列は,

$$Q^{-1} = (F_1 F_2 \cdots F_t)^{-1} = F_t^{-1} \cdots F_2^{-1} F_1^{-1}$$

という式で与えられることが分かります.

$$
\begin{aligned}
&= QPAI \\
&= QPA \qquad (25) \\
QIQ^{-1} &= QQ^{-1} \\
&= I \qquad (26)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, (24) 式, (25) 式, (26) 式から,

$$QPA = I \tag{27}$$

となることが分かります. 全く同様にして, P は正則行列であることに注意して,[11] (23) 式の両辺に, 左から P^{-1} を掛け算し, 右から P を掛け算してみると,

$$AQP = I \tag{28}$$

となることが分かります.[12] よって, (27) 式, (28) 式から, A は正則行列であり, その逆行列は,

$$A^{-1} = QP \tag{29}$$

という式で与えられることが分かります. 以上から, (20) 式の主張を確かめることができました.

さて, 上で注意したように, 実際には, (19) 式の主張も成り立つことが分かるので, 勝手な正則行列 A は, 行や列に基本変形を施すことにより, 単位行列 I に変形できることが分かります. すなわち, 勝手な正則行列 A に対して, (21) 式が成り立つような基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ が見つかることが分かります. そこで, 上の議論を繰り返すと, (22) 式, (27) 式から,

$$F_1 F_2 \cdots F_t E_s \cdots E_2 E_1 A = I \tag{30}$$

となることが分かりますが, (30) 式の「行列語」を「日本語」に翻訳してみると, **勝手な正則行列 A は, 行に関する基本変形だけを施すことにより, 単位行列 I に変形できる**ことが分かります. 全く同様に, (22) 式, (28) 式から,

$$AF_1 F_2 \cdots F_t E_s \cdots E_2 E_1 = I \tag{31}$$

となることが分かりますが, (31) 式の「行列語」を「日本語」に翻訳してみると, **勝手な正則行列 A は, 列に関する基本変形だけを施すことによっても, 単位行列 I に変形できる**ことが分かります. また, (22) 式, (29) 式から, 行列 A の逆行列は,

$$A^{-1} = F_1 F_2 \cdots F_t E_s \cdots E_2 E_1 \tag{32}$$

という式によって与えられることも分かります. したがって, **行列 A の rank を求めるために, どのような基本変形を行なったのかということを丹念に追っていくことにすれば, (32) 式から, 行列 A の逆行列を求めることもできる**ことが分かります.

[11] 基本行列は正則行列であることに注意すると, 行列 P の逆行列は,

$$P^{-1} = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

という式で与えられることが分かります.

[12] 皆さん, 確かめてみて下さい.

こうして,「行列の rank の計算」を見返すことでも, 正則行列 A の逆行列を求めることができることが分かりました. ただし, 変形の過程で, どのような基本変形を行なったのかということを一々覚えておくというのは少し面倒なことですし, 書き抜き出した基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ たちの積を計算するのも面倒なことです. そこで, **もう少し効率よく逆行列 A^{-1} を求めることができないものだろうか**と期待したくなりますが, 実は, そのような工夫をすることができます。 そのためのアイデアは, **わざわざ, 単位行列 I を付け加えて, (22) 式を,**

$$\boldsymbol{P = E_s \cdots E_2 E_1 I,} \tag{33}$$
$$\boldsymbol{Q = I F_1 F_2 \cdots F_t} \tag{34}$$

と表わすことにして, これらの式と (21) 式を見比べることで, **(33) 式を「正則行列 P は, 単位行列 I に対して, 行列 A に施したのと全く同じ「行変形」を施すことにより得られる」と解釈し, (34) 式を「正則行列 Q は, 単位行列 I に対して, 行列 A に施したのと全く同じ「列変形」を施すことにより得られる」と解釈してみる**ということです.

そこで, これらの変形を一度に実現するために, 行列 A と同じサイズの単位行列 I を, A の縦と横に並べて,

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & O \end{array}\right)$$

というサイズが 2 倍の正方行列 $\widetilde{A}$ を考えてみます. すると, **「A と I に対して, 全く同じ行変形を行なう」ということが,「$\widetilde{A}$ という「ひとつの行列」に対して, 行変形を行なう」ということにより実現できる**ことになります. このことを「行列語」を用いて表わせば, E を A と同じサイズの基本行列として,

$$\widetilde{E} = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

とするときに,

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\widetilde{A} &= \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & O \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} EA & EI \\ \hline I & O \end{array}\right)\end{aligned} \tag{35}$$

ということになりますが, (35) 式は, **$\widetilde{A}$ という「ひとつの行列」に対して, $\widetilde{E}$ に対応した行変形を施すことにより, A, I という「二つの行列」に対して,「E に対応した全く同じ行変形をそれぞれの行列に施す」ということが実現できる**ということを表わしています.[13]

同様にして, **「A と I に対して, 全く同じ列変形を行なう」ということが,「$\widetilde{A}$ という「ひとつの行列」に対して, 列変形を行なう」ということにより実現できる**ことにもなりま

[13] 慣れないうちは少しゴタゴタして見えるかもしれませんが, $\widetilde{E}$ とは,「$\widetilde{A}$ という行列の $\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right)$ という部分に E に対応した行変形を施しなさい」という命令を「行列語」で表わしたものです.

す. 前と同様に, このことを「行列語」を用いて表わせば, F を A と同じサイズの基本行列として,

$$\widetilde{F} = \left(\begin{array}{c|c} F & O \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

とするときに,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\widetilde{F} &= \left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} F & O \\ \hline O & I \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} AF & I \\ \hline IF & O \end{array}\right) \end{aligned} \tag{36}$$

ということになりますが, (36) 式は, $\widetilde{A}$ **という「ひとつの行列」に対して,** $\widetilde{F}$ **に対応した列変形を施すことにより,** A, I **という「二つの行列」に対して,「** F **に対応した全く同じ列変形をそれぞれの行列に施す」ということが実現できる**ということを表わしています.[14]

そこで, **行列** $\widetilde{A}$ **に対して, 行や列に関する基本変形を施すことで, 行列** A **に対応する部分が単位行列になるように変形する**ことを考えてみます. このことを,「行列語」を用いて表わせば, A と同じサイズの基本行列 $E_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t$ を用いて,

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_s \cdots \widetilde{E}_2\widetilde{E}_1\widetilde{A}\widetilde{F}_1\widetilde{F}_2 \cdots \widetilde{F}_t &= \left(\begin{array}{c|c} E_s \cdots E_2E_1AF_1F_2 \cdots F_t & E_s \cdots E_2E_1I \\ \hline IF_1F_2 \cdots F_t & O \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I & E_s \cdots E_2E_1I \\ \hline IF_1F_2 \cdots F_t & O \end{array}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

という計算を行なったということになりますが, (37) 式を (33) 式, (34) 式と見比べると, (37) 式の右辺は,

$$\left(\begin{array}{c|c} I & E_s \cdots E_2E_1I \\ \hline IF_1F_2 \cdots F_t & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline Q & O \end{array}\right)$$

という行列に変形されているということが分かります. したがって, 行列 A の代わりに, 行列 $\widetilde{A}$ を用いて, $\operatorname{rank} A$ の計算を行なうことにすれば,

基本変形を用いて正則行列 A を「見やすい形」に変形する(「記録係」付き)

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & O \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行や列に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline Q & O \end{array}\right)$$

というように, 正則行列 P, Q も同時に求めることができることが分かります. すなわち, 行列 A に対して, どのような行変形を行なったのかということを覚えている「記録係」と, どのような列変形を行なったのかということを覚えている「記録係」として, 二人の単位行列を行列 A の右横と真下に置いておくことにすると, 最終的な変形が済んだときに, こ

[14] 前と同様に, $\widetilde{F}$ とは,「$\widetilde{A}$ という行列の $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right)$ という部分に F に対応した列変形を施しなさい」という命令を「行列語」で表わしたものです.

れらの「記録係」が正則行列 P, Q を教えてくれるというわけです. こうして, P と Q が求まってしまえば, 後は, (29) 式から,

$$A^{-1} = QP$$

というように, Q と P の積を計算することで, A の逆行列が求まるということになります.
　例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となりますが, 行列 $\widetilde{A}$ に対して, 行や列に関する基本変形を施すと, 例えば,

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{2\text{ 列目}+1\text{ 列目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. よって, 今の場合,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= QP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かるというわけです.
　ただし, 正方行列 A のサイズが大きくなると, $\widetilde{A}$ のサイズも大きくなってしまい, 実際に, $\widetilde{A}$ に対する基本変形を書き下そうとしたときに, たくさん数を書かなければならなく

なり, 少し大変なことになってしまいます. そこで, 少しでも手間が省けるように, **行変形だけを用いて, 行列 A を単位行列に変形する**ことを考えてみます. すると, この場合,

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_s \cdots \widetilde{E}_2 \widetilde{E}_1 \widetilde{A} &= \left(\begin{array}{c|c} E_s \cdots E_2 E_1 A & E_s \cdots E_2 E_1 I \\ \hline I & O \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline I & O \end{array}\right)\end{aligned}$$

という計算を行なったということになりますが, このような変形の下では, 行列 $\widetilde{A}$ の下半分の部分は「姿」が変わりませんから, 実際の計算では,「姿」の変わる上半分の部分のみを書き留めて,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I & P \end{array}\right)$$

という計算をすれば十分であるということになります. また, この場合には,

$$Q = I$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}A^{-1} &= QP \\ &= IP \\ &= P\end{aligned}$$

となり, わざわざ, 行列の掛け算を実行しなくとも,

$$A^{-1} = P$$

となることが分かることになります.

全く同様に, **列変形だけを用いて, 行列 A を単位行列に変形する**ことを考えてみると, 今度は,

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \widetilde{F}_1 \widetilde{F}_2 \cdots \widetilde{F}_t &= \left(\begin{array}{c|c} A F_1 F_2 \cdots F_t & I \\ \hline I F_1 F_2 \cdots F_t & O \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I & I \\ \hline Q & O \end{array}\right)\end{aligned}$$

という計算を行なったということになりますが, このような変形の下では, 行列 $\widetilde{A}$ の右半分の部分は「姿」が変わりませんから, 実際の計算では,「姿」の変わる左半分の部分のみを書き留めて,

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{列に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c} I \\ \hline Q \end{array}\right)$$

という計算をすれば十分であるということになります. また, 前と同様, この場合には,

$$P = I$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= QP \\ &= QI \\ &= Q \end{aligned}$$

となり, わざわざ, 行列の掛け算を実行しなくとも,

$$A^{-1} = Q$$

となることが分かることになります.

皆さん, すでにお気づきのように, これらの方法は, 第3回の問2のところで説明した「基本変形を用いた逆行列の計算法」に他なりません. このように, 少し広い立場から見直してみると, 第3回の問2のところで述べた方法とは, 与えられた正則行列 A を単位行列 I に変形するに当たり, **行なら行, 列なら列というように, どちらか一方に関する基本変形だけを施すことに決める**ことにより, 行列 $\widetilde{A}$ のうち, 変形を受けない下半分, あるいは, 右半分の部分を書くことをサボって, **実際に変形を受ける上半分, あるいは, 左半分の部分のみを書き下して計算を進める**という方法であるとも解釈できることが分かりました. また, このような仕方で変形することに決めれば, $Q = I$, あるいは, $P = I$ となることが分かりますから, 最後の QP という掛け算もサボることができて, **$\boldsymbol{A^{-1} = P}$, あるいは, $\boldsymbol{A^{-1} = Q}$ として, $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めることができる**というわけです.