# 数学 II 演習 ( 第 4 回 )

**問 1.** 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1)\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

♣ 余裕があれば,

$$A_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}, \ (n = 5, 6, \cdots)$$

に対して, $A_n^{-1}$ の形を予想して, $A_n \cdot A_n^{-1} = I$ となることを確かめてみよ.

**問 2.** $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ で,

$$\begin{cases} a_1, \cdots, a_m \text{ のうち, 少なくともひとつは } 0 \text{ でない.} \\ b_1, \cdots, b_n \text{ のうち, 少なくともひとつは } 0 \text{ でない.} \end{cases}$$

とする. このとき,

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

という形の行列を考える.

(1) $m = n = 3$ のとき, $\operatorname{rank} A$ ( $= A$ の階数 ) を求めよ.
(2) $m, n$ : 一般のとき, $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

♣ 裏もあります.

問 **3.** $a \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $\operatorname{rank} A$ を求めよ. また, $\operatorname{rank} A = 2$ のとき, $A^{-1}$ を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $\operatorname{rank} A$ を求めよ. また, $\operatorname{rank} A = 3$ のとき, $A^{-1}$ を求めよ.

♣ 余裕があれば,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & a \\ a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n\ \text{コ}}$$

のとき, どうなるかを考えてみよ.