

数学 II 演習 (第 3 回) の略解

目 次

1 問 1 の解答	1
2 基本変形とは	2
3 行列の rank とは	10
4 問 2 の解答	17
5 基本変形により逆行列を求めること	18
6 問 2 の (2) の結果を見直すと	23
7 逆行列に関する注意	25

1 問 1 の解答

- (1) 与えられた行列を A と表わすことにして, 行列 A に対して, 行や列に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1 \text{ 列目} + 2 \text{ 列目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times 1} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$\text{rank } A = 3$$

となることが分かります.

- (2) 同様にして、与えられた行列を A と表わすことにして、行列 A に対して、行や列に関する基本変形を施してみると、例えば、

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{3 \text{ 行目} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-1) \\ 2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-2) \\ 4 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-2)}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 行目} \leftrightarrow 4 \text{ 行目}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-2) \\ 4 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} \times (-\frac{1}{7})} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-4) \\ 4 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times 11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$\text{rank } A = 3$$

となることが分かります。

- (3) 同様にして、与えられた行列を A と表わすことにして、行列 A に対して、行や列に関する基本変形を施してみると、例えば、

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-2) \\ 4 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times 1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times 2} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{4 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 列目} \leftrightarrow 3 \text{ 列目}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$\text{rank } A = 2$$

となることが分かります。

2 基本変形とは

基本変形とは、与えられた行列の行や列を一定の手続きで変形していく操作のことです。具体的には、

行に関する基本変形

- (イ) ある二つの行を入れ替える.
- (ロ) ある行に別な行の何倍かを足す.
- (ハ) ある行を何倍かする. (ただし, 0 倍することは許さないものとする.)

という三種類の操作を「行に関する基本変形」と呼び、

列に関する基本変形

- (イ) ある二つの列を入れ替える.
- (ロ) ある列に別な列の何倍かを足す.
- (ハ) ある列を何倍かする. (ただし, 0 倍することは許さないものとする.)

という三種類の操作を「列に関する基本変形」と呼びます.

このとき大切なことは、単にこうした基本変形の手続きを覚えるのではなく、**基本変形とは「どういうことを行なっているのか」ということや、基本変形を用いて rank を求めたり、逆行列を求めたり、連立一次方程式を解いたりすることができるというのは「どういう仕組みなのか」ということを、原理的なところから「しみじみと」理解するということ**です. 最初のうちは、rank の計算や逆行列の計算や連立一次方程式を解くことなど、単なる計算練習にしか感じられないかも知れませんが、**そうした計算の背後にある「計算の原理」を理解しておくということと、こうした具体的な計算を通して「数が並んだもの」としての行列に対する感覚を養っておくということが、後で、「線型空間」や「線型写像」という抽象的な考え方を理解する上で、とても大切になります.**ですから、皆さんも、今のうちに「基本変形」という考え方をしっかりと身につけて下さい.

そこで、まず、「**基本変形**」とはどのようなことを考えているのかということについて少し説明してみることにします. 考え方の本質は、行列が 2 行 2 列の場合にすべて含まれていますから、話を具体的にするために、ここでは 2 行 2 列の行列の場合に説明してみることにします. 基本変形について、まだ良く理解できていないと思われる方は、まず、この場合に「じっくりと」理解してみてください.¹

さて、この節の最初に述べたように、基本変形とは、与えられた行列の行や列に対して、(イ), (ロ), (ハ) という三種類の操作を施すことなのですが、基本変形に関して最初に理解すべき大切な点は、「**これこれの基本変形を施しなさい**」という命令は「**行列語**」で出さなければいけないということです. すなわち、上の (イ), (ロ), (ハ) という三種類の命令は「日本語」で書かれているわけですが、**行列は「日本語」を理解しませんから、行列にもこれらの命令を理解してもらえるように「行列語」で命令を出す必要がある**ということです.

そこで、いま、2 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

¹2 行 2 列の場合に慣れてから、次に、3 行 3 列の場合もやってみると、一般に、 m 行 n 列の場合にどうすれば良いかということも「心で納得できる」ようになるのではないかと思います.

に,

$$E_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

という行列を左から掛けてみます. すると,

$$\begin{aligned} E_{(1)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

となることが分かりますが, このことは「 $E_{(1)}$ という行列を左から掛け算する」ということは「行列 A の一行目と二行目をひっくり返す」ことであるというように読み取ることができます. 実際, (2) 式の右辺の行列の掛け算がどのように実行されるのかということを反省してみると, $E_{(1)}$ という行列の一行目である

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列が,

$$0 \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

というように, 「 A という行列の一行目の 0 倍と二行目の 1 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

を, $E_{(1)}A$ という行列の一行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります. 全く同様に, $E_{(1)}$ という行列の二行目である

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という行列が,

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

というように, 「 A という行列の一行目の 1 倍と二行目の 0 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

を, $E_{(1)}A$ という行列の二行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります.

次に,

$$E_{(\square)} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

という行列を左から掛けてみます. すると,

$$E_{(\square)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} a+mc & b+md \\ c & d \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、このことは「 $E_{(\square)}$ という行列を左から掛け算する」ということは「**行列 A の一行目に二行目の m 倍を足す**」ことであるというように読み取ることができます。実際、前と同様に、(4) 式の右辺の行列の掛け算がどのように実行されるのかということを反省してみると、 $E_{(\square)}$ という行列の一行目である

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix}$$

という行列が、

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+mc & b+md \end{pmatrix}$$

というように、「 A という行列の一行目の 1 倍と二行目の m 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} a+mc & b+md \end{pmatrix}$$

を、 $E_{(\square)}A$ という行列の一行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります。また、 $E_{(\square)}$ という行列の二行目である

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列が、

$$0 \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

というように、「 A という行列の一行目の 0 倍と二行目の 1 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

を、 $E_{(\square)}A$ という行列の二行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります。

さらに、 $n \neq 0$ として、

$$E_{(\wedge)} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

という行列を左から掛けてみます。すると、

$$\begin{aligned} E_{(\wedge)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} na & nb \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

となることが分かりますから、このことは「 $E_{(\wedge)}$ という行列を左から掛け算する」ということは「**行列 A の一行目を n 倍する**」ことであるというように読み取ることができま

す.² 実際、これまでと同様に、(6) 式の右辺の行列の掛け算がどのように実行されるのかということを反省してみると、 $E_{(\wedge)}$ という行列の一行目である

$$\begin{pmatrix} n & 0 \end{pmatrix}$$

という行列が、

$$n \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na & nb \end{pmatrix}$$

というように、「 A という行列の一行目の n 倍と二行目の 0 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} na & nb \end{pmatrix}$$

を、 $E_{(\wedge)}A$ という行列の一行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります。また、 $E_{(\wedge)}$ という行列の二行目である

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列が、

$$0 \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

というように、「 A という行列の一行目の 0 倍と二行目の 1 倍を足した行列

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

を、 $E_{(\wedge)}A$ という行列の二行目として書きなさい」という命令に対応していることが分かります。

以上から、「行」に関する (イ), (ロ), (ハ) という三種類の基本変形は、それぞれ、(1) 式, (3) 式, (5) 式で与えられる三種類の行列 $E_{(\text{イ})}$, $E_{(\text{ロ})}$, $E_{(\text{ハ})}$ を「左から掛け算する」ことによって実現されているということが分かりました。また、それぞれの行列 $E_{(\cdot)}$ の「一行目」が「 $E_{(\cdot)}A$ という行列の一行目に何を書くのか」という命令に、 $E_{(\cdot)}$ の「二行目」が「 $E_{(\cdot)}A$ という行列の二行目に何を書くのか」という命令に対応していることも分かりました。

全く同様にして、これらの行列を A の「右から掛け算」してみると、それぞれ、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{(\text{イ})} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{(\text{ロ})} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & ma+b \\ c & mc+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

²ここで、 $n \neq 0$ と仮定したのは、後で見ると、変形の命令を間違えて出してしまったときに、その命令を取り消すことができるようにするためです。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{(\wedge)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} na & b \\ nc & d \end{pmatrix}$$

となることが分かります。したがって、「列」に関する (イ), (ロ), (ハ) という三種類の基本変形は、それぞれ、 $E_{(\text{イ})}$, $E_{(\text{ロ})}$, $E_{(\text{ハ})}$ という三種類の行列を「右から掛け算する」ことによって実現されているということが分かります。また、「行」のときと同様に、行列の掛け算がどのように実行されるのかということを反省してみると、それぞれの行列 $E_{(\cdot)}$ の「一列目」が「 $AE_{(\cdot)}$ という行列の一列目に何を書くのか」という命令に、 $E_{(\cdot)}$ の「二列目」が「 $AE_{(\cdot)}$ という行列の二列目に何を書くのか」という命令に対応していることも分かります。³

このように、基本変形を実現するような行列 $E_{(\text{イ})}$, $E_{(\text{ロ})}$, $E_{(\text{ハ})}$ のことを、一般に、**基本行列**と呼びます。この節の最初でも注意しましたが、皆さんにとって大切なことは、「行列 A を基本変形する」ということは、こうした特別な形をした「基本行列を A の右や左から掛け算する」ことであるということを最初にしっかりと理解することです。

さて、基本変形に関して次に理解すべき大切な点は、(イ), (ロ), (ハ) という三種類の命令は「取り消しのきく命令」であり、また、命令の意味を考えると「取り消しの命令」も簡単に出来るようなものであるということです。すなわち、行列に対して間違っただけの命令を出してしまったときに、その間違いを取り消すような命令を「行列語」で即座に出せるということです。

例えば、いま、

$$E_{(\text{イ})} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

というように、「行列 A の一行目と二行目をひっくり返す」という命令を間違っただけを出してしまったとします。このとき命令の意味を考えてみると、もう一度、「一行目と二行目をひっくり返す」という命令を出すことによって、間違っただけの命令を取り消すことができるはずであることが分かります。実際、

$$\begin{aligned} E_{(\text{イ})} E_{(\text{イ})} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} E_{(\text{イ})} (E_{(\text{イ})} A) &= (E_{(\text{イ})} E_{(\text{イ})}) A \\ &= I \cdot A \\ &= A \end{aligned}$$

³皆さん、確かめてみて下さい。

というように、 $E_{(1)}$ を左から掛け算することにより、この間違った命令は取り消せることが分かります。

全く同様に、

$$E_{(2)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix}$$

というように、「行列 A の一行目に二行目の m 倍を足す」という命令を間違えて出してしまったとします。このとき命令の意味を考えてみると、今度は、「一行目に二行目の $(-m)$ 倍を足す」という命令を出すことで、一行目に間違えて足されてしまった「二行目の m 倍」を打ち消すことにすれば、この間違った命令を取り消すことができるはずであることが分かります。実際、

$$E'_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} E'_{(2)} E_{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned} E'_{(2)} (E_{(2)} A) &= (E'_{(2)} E_{(2)}) A \\ &= I \cdot A \\ &= A \end{aligned}$$

というように、 $E'_{(2)}$ を左から掛け算することにより、この間違った命令は取り消せることが分かります。

さらに、 $n \neq 0$ として、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{(1)} = \begin{pmatrix} na & b \\ nc & d \end{pmatrix}$$

というように、「行列 A の一列目を n 倍する」という命令を間違えて出してしまったとします。このとき命令の意味を考えてみると、この場合には、さらに「一列目を $\frac{1}{n}$ 倍する」という命令を出すことによって、間違った命令を取り消すことができるはずであることが分かります。実際、

$$E'_{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$E_{(1)} E'_{(1)} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = I$$

となることが分かりますから,

$$(AE_{(\wedge)}) E'_{(\wedge)} = A(E_{(\wedge)} E'_{(\wedge)}) \\ = A \cdot I \\ = A$$

というように, $E'_{(\wedge)}$ を右から掛け算することにより, この間違った命令は取り消せることが分かります.⁴

以上から, $E_{(\mathbf{I})}, E_{(\mathbf{O})}, E_{(\mathbf{A})}$ という基本行列は, それぞれ, 逆行列を持ち, 対応する基本変形の意味を考えることにより,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように簡単に逆行列を求めることが分かりました. また, それぞれのタイプの基本行列の逆行列は同じタイプの基本行列で与えられるということも分かりました.

以上の議論をまとめると, 「基本変形」と「基本行列」の間には,

「基本変形」と「基本行列」の間の対応

「日本語」での表現		「行列語」での表現
基本変形	$\longleftrightarrow$	基本行列
基本変形を続けて行なうこと	$\longleftrightarrow$	基本行列の積
変形しないこと	$\longleftrightarrow$	単位行列
基本変形の逆変形	$\longleftrightarrow$	基本行列の逆行列

というような対応があることが分かります.

さて, 皆さんの中には, 線型代数学の教科書を見て, 「どのようなタイプの変形が基本変形として許されるのか」ということについて, 何だかはっきりしないという印象を持た

⁴これとは逆に, $n = 0$ のときには,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{(\wedge)} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a & b \\ 0 \cdot c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

となり, a, c という数が持っていた情報が失われてしまいますから, 間違った命令は取り消すことができなくなってしまう.

れた方がいるかもしれません。上で見てきたように、「基本変形」の大前提として、「**行列語**」で**命令が出せる**ということ、すなわち、**対応する「基本行列」が書ける**ということがあ
るわけですが、その上で、

基本変形の特徴

- (i) 間違っ**た命令**が取り消せる。
- (ii) **変形の意味**を考えることで、**取り消しの命令**が簡単に**出せる**。

という二つの性質を持つような変形を「基本変形」と呼んでいるわけです。これら二つの特徴を「**行列語**」で表わせば、

基本行列の特徴

- (i) **逆行列**を持つ。
- (ii) **対応する変形の意味**を考えることで、**逆行列**が簡単に**書き下せる**。

ということになります。その意味で、対応する変形の意味を考えることで、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

となることが分かるという方は、例えば、「一行目を 3 倍してから二行目を足し、さらに、二行目に一行目の 2 倍を足す」という操作を「ひとつの基本変形」と呼んでも全く構わないわけです。しかしながら、余り複雑な命令を考えてもかえって頭がこんがらがるだけですし、複雑な命令も簡単な命令を繰り返し出すことによって実現することができますから、線型代数学の教科書では、(i), (ii) という二つの特徴を満たす基本変形として、この節の最初に挙げた (イ), (ロ), (ハ) という三つのタイプの変形だけを採用していることが多いわけ
です。

3 行列の rank とは

さて、数ある行列の中で、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \quad (7)$$

などの行列のように、「**対角線上にいくつか 1 が並び、他の成分がすべて 0 になっているような行列**」は、とても「見やすい形」をした行列であると考えられます。そこで、行列 A が、勝手にひとつ与えられたときに、**行列 A の行や列に何度か基本変形を施すことによって、 A を (7) 式に現われる行列のような「見やすい形」に変形することができるかどうか**ということを考えてみることにします。話を具体的にするために、ここでは、 A が 3 行 3 列の行列である場合に説明してみることにします。

そこで、いま、3 行 3 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

が、勝手にひとつ与えられているとします。⁵ このとき、問題は、「行列 A に対して、

行に関する基本変形

- (イ) ある二つの行を入れ替える.
- (ロ) ある行に別な行の何倍かを足す.
- (ハ) ある行を何倍かする. (ただし、0 倍することは許さないものとする.)

という「行に関する基本変形」や、

列に関する基本変形

- (イ) ある二つの列を入れ替える.
- (ロ) ある列に別な列の何倍かを足す.
- (ハ) ある列を何倍かする. (ただし、0 倍することは許さないものとする.)

という「列に関する基本変形」を何度か施すことによって、 A を (7) 式に現われる行列のような「見やすい形」に変形することができるか」ということになります. いま、 A が零行列であるとする、 A は最初から「見やすい形」をしていることになりますから、以下では、 A は零行列ではないと仮定して話を進めることにします.

いま、仮定により、 A は零行列ではありませんから、行列 A の成分の中には 0 と異なる成分が存在することになります. そこで、その成分の現われる行と列に対して、(イ) という操作を施すと、行列 A は、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad a_{11} \neq 0$$

というように、1 行 1 列目の成分 a_{11} が 0 でないような行列に変形することができることが分かりますから、さらに、一行目を $(a_{11})^{-1}$ 倍してみると、

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \tag{8}$$

⁵以下の議論が見やすくなるように、議論の本質に関わってこないような行列の成分は、すべて「*」という記号を用いて少しぼかして表わすことにしました. また、これでは抽象的で考えにくいと思われる方は、 A として、問 1 で取り上げたような具体的な行列を考えてもらっても構いません.

という形の行列に変形できることが分かります。例えば,

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

というように, 行列 A の 2 行 3 列目の成分が 0 でないとすれば,

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix} &\xrightarrow{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目}} \begin{pmatrix} * & * & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 列目} \leftrightarrow 3 \text{ 列目}} \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{1 \text{ 行目} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように変形することができます。

そこで, (8) 式の行列の 1 行目と 1 列目の成分を,

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & * & * \\ a_{31} & * & * \end{pmatrix}$$

というように表わすことにすると, さらに,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & * & * \\ a_{31} & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a_{31})]{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a_{21})} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[3 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-a_{13})]{2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-a_{12})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって, 3 行 3 列の行列 A を「見やすい形」に変形する問題が,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \tag{9}$$

という形の行列を「見やすい形」に変形する問題に帰着することが分かります。そこで, (9) 式の行列の残った成分に対して, 同様の変形を繰り返すと, 最終的に, 行列 A は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のうちのいずれかの「見やすい形」に変形できることが分かります。⁶

⁶行列のサイズに関する数学的帰納法を用いるとスッキリと議論することができます。

ここでは、3 行 3 列の行列に対して説明しましたが、全く同様の議論を繰り返すと、**勝手な自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ と、勝手にひとつ与えられた m 行 n 列の行列 A に対して、 A の行や列に何度か基本変形を施すことによって、行列 A を、**

「見やすい形」の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というような「見やすい形」に変形できることが分かります。⁷ また、このとき対角線上に残った 1 の数 r を行列 A の**階数 (rank)** と呼びます。2 節で見たように、「基本変形する」ということは、「対応する基本行列を右や左から掛け算する」ということでしたから、この事実は、**勝手にひとつ与えられた行列 A に対して、適当な基本行列 $E_1, E_2, \dots, E_s, F_1, F_2, \dots, F_t$ が見つかって、**

基本変形を用いて与えられた行列を「見やすい形」に変形する

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (10)$$

という形に変形できるというように表現することができます。ただし、これでは抽象的過ぎると思われる方もあるかもしれませんから、具体的な例をもとにして、(10) 式の意味をもう少し説明してみることにします。

そこで、いま、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

⁷ここで、対角線上に残った 1 の数を $r \in \mathbb{N}$ として、 r 行 r 列の単位行列を I_r という記号で表わし、零行列を O という記号で表わしました。また、正確には、 $k, l \in \mathbb{N}$ に対して、 k 行 l 列の零行列を $O_{k,l}$ と表わすことにして、

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

と表わすべきですが、たくさんの添え字に目がチカチカしても困りますし、全体の行列のサイズが m 行 n 列であることと単位行列のサイズが r 行 r 列であることから、それぞれの零行列のサイズは容易に読み取ることができますから、以下でも、零行列の方は、サイズに依らずに、すべて O という共通の記号を用いて表わすことにします。

という行列を考えて、行列 A を二通りのやり方で基本変形してみます。すると、例えば、

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-3) \end{array} & \begin{array}{c} 2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-2) \\ \downarrow \end{array} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F_1 & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\
 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \text{ 列目} \times (-\frac{1}{2}) \\ \downarrow \end{array} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = F_2 & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \text{ 行目} \times (-\frac{1}{2}) \end{array} & \begin{array}{c} 1 \text{ 列目} + 2 \text{ 列目} \times (-3) \\ \downarrow \end{array} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = F_3 & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

というように変形できることが分かります。⁸

このうち、左側の変形では行変形だけを用いて基本変形を行なったのですが、「行」に関する基本変形とは対応する基本行列を「左」から掛け算することであると読み直してみると、

$$\begin{aligned}
 E_3 E_2 E_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

という計算を行なったということになります。いま、

$$\begin{aligned}
 P &= E_3 E_2 E_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

⁸ここで、上で説明したことが見やすくなるように、「日本語」での基本変形の命令とともに、どのような基本行列をどちらから掛けたのかという「行列語」での命令も一緒に書いておくことにしました。

とすれば, P という**正則行列**⁹を左から掛け算することで,

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かったということになります.

同様に, 右側の変形では列変形だけを用いて基本変形を行なったのですが, 「列」に関する基本変形とは対応する基本行列を「右」から掛け算することであると読み直してみると,

$$\begin{aligned} AF_1F_2F_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という計算を行なったということになります. したがって,

$$\begin{aligned} Q &= F_1F_2F_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, Q という正則行列を右から掛けることで,

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かったということになります.

上の例では, 行変形だけ, あるいは, 列変形だけを行なうことで, 行列 A を「見やすい形」にすることができましたが, 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

という例を考えて, 行変形だけを試みると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように変形した後は, これ以上, 行変形だけでは「見やすい形」に変形することができないことが分かります. すなわち, この場合には, さらに,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⁹すなわち, 逆行列が存在する行列のことです. 2 節で注意したように, それぞれの基本行列には逆行列が存在しますから,

$$P^{-1} = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$$

というように, それらの積である P にも逆行列が存在することが分かります.

というように列変形を施すことによって、初めて「見やすい形」に変形できることが分かります。このように、行列 A に逆行列が存在しない場合には、行変形だけ、あるいは、列変形だけを用いたのでは、必ずしも完全に「見やすい形」には変形しきれないことが分かります。したがって、一般には、「行変形と列変形の両方を許す」ことで初めて「見やすい形」にまで変形することができるということになります。

いま、「基本変形を施す」ということは「対応する基本行列を右や左から掛け算する」とであると解釈できますから、この節の最初に述べた、「行や列に関する基本変形を何度か施すことで、行列を「見やすい形」に変形できる」ということの数学的な内容は、「勝手にひとつ与えられた 3 行 3 列の行列 A に対して、適当な 3 行 3 列の正則行列 P, Q が存在して、 PAQ という行列が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のいずれかの形にできる」と表現することができます。¹⁰ 全く同様に、(10) 式は、勝手にひとつ与えられた m 行 n 列の行列 A に対して、適当な m 行 m 列の正則行列 P と n 行 n 列の正則行列 Q が存在して、 PAQ という行列が、

適当な正則行列 P, Q を掛け算することで行列 A を「見やすい形」に変形する

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

というように「見やすい形」に変形できるということを意味していることが分かります。

単に「行列 A に逆行列が存在するかどうか」ということだけを問題にしている場合¹¹や行列 A の rank だけを問題にしている場合など、行列 A の性質について粗い考察をしている場合には、 P や Q の具体的な形までは必要ないということが多いので、上のように、個々の基本変形でどういう行列をどちら側から掛け算したのかという「行列語」での命令までは記さずに、行列 A が変形する姿だけを書き止めながら計算するのが普通です。しかし、上で見たように、どういう変形をしたのかという「行列語」での命令を、ひとつひとつ丁寧に追ってゆくことにすれば、 P や Q の具体形も分かるわけです。

ここで不思議なことは、変形の仕方はいくらでもあり、それぞれの人によって基本変形の仕方も異なるのに、最終的に現われる 1 の数は誰がやっても同じになるということです。このことは、rank A というものが、何か行列 A に備わった「固有な性質」として理解できるのではないかということを示唆しています。このことや、「与えられた行列 A を正則行列 P, Q を用いて PAQ という形に変形する」ということの意味などは、「線型空間」や「線型写像 (の表現行列)」などの概念を理解するとハッキリしますから、後で、そうした概念を扱ったときに、もう一度考えてみることにします。

さて、実際の基本変形に対する感覚を養うためには、いくつか実例を計算してもらいましょう。また、2 節の最初で述べたように、基本変形は「線型空間」や「線型写像」などの抽象的な考え方を理解するための基礎にもなりますから、ここで挙げた例や、皆さ

¹⁰ このとき、最終的に現われた 1 の数を行列 A の rank と呼ぶのでした。

¹¹ すなわち、逆行列の具体的な形までは問題にしないということです。

んの持っている教科書や演習書に載っている例を自分で計算してみて、今のうちにできるようになっておいて下さい。¹²

4 問2の解答

(1) 与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わすことにして、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\left(A \mid I \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

たなることが分かります。

(2) 同様に、与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

と表わすことにして、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \times \alpha^{-1} \\ 2 \text{ 行目} \times \alpha^{-1} \\ 3 \text{ 行目} \times \alpha^{-1}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-\alpha^{-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-\alpha^{-1})} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

¹²一日二日をつぶして行列を 20 個くらい基本変形してみると、さすがに感覚はつくのではないかと思います。

というように変形できることが分かります. したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

また,

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{n \text{ 個}}$$

に対して, 同様の考察を行なうと,

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} & \cdots & (-1)^{n-1}\alpha^{-n} \\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \alpha^{-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}}_{n \text{ 個}}$$

となることが分かります.

5 基本変形により逆行列を求めること

問1のところで見たように, 与えられた行列の rank を求めるためには, **行と列の両方に関する基本変形**を何度か施すことによって, 行列を「見やすい形」に変形すればよいのでした. また, 「行に関する基本変形」は「対応する基本行列を左から掛け算する」ことにより実現され, 「列に関する基本変形」は「対応する基本行列を右から掛け算する」ことにより実現されるのでした.

そこで, ここでは, 2節での考察をもとにして, 「**基本変形を用いて逆行列を求めること**」について少し考えてみることにします. 以下で見るように, 基本変形を用いることで, 与えられた行列の逆行列を求めることができるのですが, このとき注意しないといけないことは, 同じ「基本変形」と言っても「rank を求めるとき」と「逆行列を求めるとき」とでは「**重要な違い**」があるということです. それは, rank を求める場合には, **行と列の両方に関する基本変形を施すことが許される**のに対して, 逆行列を求める場合には, 行と列の両方に関する基本変形が許されるわけではなく, **行なら行, 列なら列**というように, **どちらか一方に関する基本変形だけを施すことに決めなければならない**ということです. そこ

で、ここでは、「どうして行と列のうちのどちらか一方だけに決めなければならないのか」という理由について考えてみることにします。

いま、正方行列¹³ A が、勝手にひとつ与えられているとして、 A の逆行列を求めることを考えてみます。そのために、「行列 A の逆行列を求める問題」を、「

$$I = AB \quad (11)$$

となるような行列 B を求める問題」であると解釈してみることにします。このとき、仮に、「行列 A が行に関する基本変形を何度か施すことにより、単位行列に基本変形できた」と仮定してみます。すると、2 節で見たように、「行に関する基本変形」とは「対応する基本行列を左から掛け算する」ことであると解釈できますから、この仮定は、**適当な基本行列 $E_1, E_2, \dots, E_s$ が見つかって、**

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = I \quad (12)$$

となることであると理解することができます。そこで、(12) 式に注意して、(11) 式の両辺に、左から $E_s \cdots E_2 E_1$ という行列を掛け算してみると、

$$\begin{aligned} E_s \cdots E_2 E_1 I &= (E_s \cdots E_2 E_1) AB \\ &= (E_s \cdots E_2 E_1 A) B \\ &= I \cdot B && \text{((12) 式から)} \\ &= B \end{aligned} \quad (13)$$

となることが分かりますが、こうして得られた (13) 式を「**求めたい行列 $B (= A^{-1})$ が、単位行列 I に対して A に施したのと全く同じ行変形を施すことで得られる**」と解釈してみるとということが「**基本変形を用いて逆行列を求める**」ための基本的なアイデアになります。すなわち、**基本変形を用いて逆行列を求める原理**とは、「 $AB = I$ という式の両辺に、左から適当な基本行列を掛けていって、最終的に A を単位行列に変形して消してやろう」ということであると言えます。このとき、(11) 式に現われている行列 A に対して、「右」から基本行列を掛けようとしても、 B が邪魔をしますから、(11) 式から出発した場合には、 **A に対して、列に関する基本変形を施すことはできないこと**になります。このことが、与えられた行列の逆行列を求める場合には、基本変形として**行に関する基本変形しか許されない理由**であることが分かります。

全く同様に、(11) 式の代わりに、

$$I = BA \quad (14)$$

という式から出発して、「 **A の逆行列を求めるという問題**」を、「(14) 式を満たすような**行列 B を求める問題**」であると解釈することにすると、今度は、 A の「右側」から基本行列を掛け算することだけが許されることになりますから、**列に関する基本変形しか許さずに変形しなければならない**ことが分かります。

以上が、「基本変形を用いて逆行列を求める」ということの計算原理のわけですが、これでは抽象的だと思われる方がいるかもしれないので、再び、3 節で考えた

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

¹³すなわち、行の数と列の数が同じ行列のことです。

という行列をもとにして考えてみることにします. そこで, 上で説明した原理を頭に置いて,

$$\left(A \mid I \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

というように行列 A と単位行列 I を横に並べて書いて, これら二つの行列に対して, 同じ行変形を施しながら, A を単位行列に変形することを考えてみます.¹⁴ すると, 例えば,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ E_1 = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \times \downarrow \begin{array}{l} 2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-3) \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ E_2 = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \times \downarrow \begin{array}{l} 1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 1 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ E_3 = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \times \downarrow \begin{array}{l} 2 \text{ 行目} \times (-\frac{1}{2}) \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

などと変形できることが分かります.¹⁵ このとき, 上で述べたことから, 最初に単位行列 I があった場所に, 最終的に現われた行列

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

が, A の逆行列になっているはずであるというわけです.

そこで, この点をより良く理解するために,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という単位行列が変形される姿を順番に記録している右側の列に注目して, (17) 式における右側の列に現われる行列が何を表わしているのかということを反省してみることにしま

¹⁴このように行列 A と単位行列 I を横に並べて書いたのは, 「 A と I に対して, 全く同じ行変形を行なう」ということが, 「 $(A \mid I)$ という行列を「ひとつの行列」と見なして行変形を行なう」ということにより実現できるからです. このことを「行列語」を用いて表わせば, E を基本行列として,

$$E(A \mid I) = (EA \mid EI) \quad (16)$$

ということになりますが, (16) 式は, $(A \mid I)$ という「ひとつの行列」に対して, E に対応した行変形を施すことにより, A, I という「二つの行列」に対して, 「全く同じ行変形をそれぞれの行列に施す」ということが実現できることを表わしています.

¹⁵ここで, 後での考察のために, 対応する基本行列も一緒に書いておくことにしました.

す. すると, 「行に関する基本変形」とは「対応する基本行列を左から掛け算すること」であるということに注意すると, (17) 式における右側の列は,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad \downarrow E_1 \times \\
 & E_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = E_1 \\
 & \quad \downarrow E_2 \times \\
 & E_2(E_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = E_2 E_1 \\
 & \quad \downarrow E_3 \times \\
 & B = E_3(E_2 E_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_3 E_2 E_1
 \end{aligned} \tag{18}$$

という計算をしていることが分かります.

3 節では, (15) 式で与えられる 2 行 2 列の行列 A に対して,

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるような 2 行 2 列の正則行列 P が存在するということと, 実際には, 行列 P は,

$$\begin{aligned}
 P &= E_3 E_2 E_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

で与えられるということを見ましたが, (18) 式と見比べてみると, (17) 式において, 単位行列が変形される姿を順番に書き留めた右側の列は, (19) 式の右辺に現われる行列の積を, 後ろの方から順番に計算した結果を書いていることが分かります. すなわち, 行列 A を行変形した結果だけでなく, 単位行列 I に対して, A と同じ行変形をした結果も平行して書き留めて行くことにすれば,

$$PA = I$$

となるような行列 P も同時に求めることができるというわけです.¹⁶

以上から, **行に関する基本変形**を用いて,

¹⁶もちろん, $PA = I$ となる行列 P は $AB = I$ となる行列 B と同じものです.

行に関する基本変形を用いて逆行列を求める

$$\left(A \mid I \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(I \mid A^{-1} \right)$$

というように、与えられた正方行列 A の逆行列を求めることができることが分かりました。全く同様に、もし、**列に関する基本変形**を用いて逆行列を求めたいのだとすれば、今度は、与えられた行列 A と単位行列 I を縦に並べて書いて、

列に関する基本変形を用いて逆行列を求める

$$\left(\begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{列に関する基本変形}} \left(\begin{array}{c} I \\ A^{-1} \end{array} \right)$$

というような計算をすれば良いことが分かります。¹⁷

このような変形の意味を、最初に述べた「戦略」という視点から眺めてみると、

$$I = AB \tag{21}$$

という式の両辺に、基本行列の積である正則行列 $P (= E_s \cdots E_2 E_1)$ を左から掛けて、

$$\begin{aligned} PI &= P(AB) \\ &= (PA)B \\ &= I \cdot B \\ &= B \end{aligned}$$

という等式に変形したというように解釈することができるというわけです。同様のことを連立一次方程式に対して考えると、

$$Au = b \tag{22}$$

という連立一次方程式を基本変形を用いて解くということは、(22) 式の両辺に、基本行列の積である正則行列 $P (= E_s \cdots E_2 E_1)$ を左から掛けて、

$$PAu = Pb$$

という形に連立一次方程式を書き換えてから解くということになります。¹⁸ したがって、こ

¹⁷前と同様、このように行列 A と単位行列 I を縦に並べて書いたのは、「 A と I に対して、全く同じ列変形を行なう」ということが、「 $\left(\begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right)$ という行列を「ひとつの行列」と見なして列変形を行なう」ということにより実現できるからです。このことを「行列語」を用いて表わせば、 F を基本行列として、

$$\left(\begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right) F = \left(\begin{array}{c} AF \\ IF \end{array} \right) \tag{20}$$

ということになりますが、(20) 式は、「 $\left(\begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right)$ という「ひとつの行列」に対して、 F に対応した列変形を施すことにより、 A, I という「二つの行列」に対して、「全く同じ列変形をそれぞれの行列に施す」ということが実現できるということを表わしています。

¹⁸ここで、 $B \leftrightarrow u, I \leftrightarrow b$ という対応のもとで、

$$AB = I \longleftrightarrow Au = b$$

というように対応させて考えました。

の場合には、単位行列 I の代わりに、 $\mathbf{b}$ というベクトルを右側に書いて、

基本変形を用いて連立一次方程式を「精一杯の見やすい形」に変形する

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(PA \mid P\mathbf{b} \right)$$

というように、行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ に対して、同じ行変形を何度か施すことで、行列 PA が「精一杯の見やすい形」になったところで、実際に、

$$PA\mathbf{u} = P\mathbf{b}$$

という連立一次方程式を解けば良いということになります。この点については、後で、連立一次方程式を扱うときに、もう一度考えてみることにします。

皆さんも、以上の原理を自分でじっくりと理解してから、実際に、逆行列や rank の計算をいくつかやってみると、基本変形に対する理解が深まるのではないかと思います。

6 問2の(2)の結果を見直すと

上で挙げた問2の解答では、基本変形を用いて逆行列を求めましたが、問2の(2)の行列に対しては、次のようにして逆行列を求めることもできます。

いま、与えられた行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

のそれぞれの行列成分は α の多項式であるということに注目して、第1回の問2のときと同様に、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

として、行列 A を、

$$A = \alpha I + N$$

というように、 α に関して、一次式の部分と零次式の部分に分解して表わしてみることにします。すると、

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (\alpha I + N)^{-1} \\ &= \{\alpha \cdot (I + \alpha^{-1}N)\}^{-1} \\ &= \alpha^{-1} \cdot (I + \alpha^{-1}N)^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

と表わすことができますから、(24) 式から、 A^{-1} を求めるためには、

$$(I + \alpha^{-1}N)^{-1}$$

という行列が求まれば良いということになります。

そこで、第1回の問2のときと同様に、取りあえず、 x は普通の数であるとして、

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

という関数に注目し、Taylor 展開を用いて、関数 $f(x)$ を、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \end{aligned} \quad (25)$$

というように「多項式の姿」で表わしてみます。このとき、(25) 式をじっと眺めていると、我々の場合にも、(25) 式の右辺に $x = \alpha^{-1}N$ を代入することで、

$$(I + \alpha^{-1}N)^{-1}$$

という行列が求まるのではないかという気がしてきます。ただし、「(25) 式の右辺の無限和が意味を持つのは $|x| < 1$ のときだけではなかったのか」などということや、「安直に、 x のところに行列を代入しても良いのか」などということが気になる方もいると思いますので、どうして (25) 式のような Taylor 展開が得られるのかということから反省してみることにします。

そのために、まず、 $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として、

$$(1+x) \{1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n\} = 1 + (-1)^n x^{n+1} \quad (26)$$

という式に注目してみます。このとき、(26) 式の両辺を $1+x$ で割ってから、適当に移項すると、

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n - \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \quad (27)$$

となることが分かります。この (27) 式は、 $x \in \mathbb{R}$ が、 $x \neq -1$ となるどんな実数であっても成り立つ式のわけですが、さらに、 $|x| < 1$ であるとする、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \rightarrow 0$$

となることが分かりますから、(27) 式の右辺の最後に現われている「剰余項」がいなくなって、(25) 式のような表示が得られるのだと理解することができます。すなわち、**(25) 式の Taylor 展開の大もとに (26) 式という恒等式があるのだと理解することができます。**

さて、この (26) 式という恒等式の変数 x のところへは、**正方行列を代入して考えることもできます**。¹⁹ そこで、正方行列 X を、勝手にひとつ取ってきて、行列 X を代入してみると、

$$(I + X)(I - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n) = I + (-1)^n X^{n+1} \quad (28)$$

となることが分かります。このとき、やはり、(28) 式の右辺の第二項である「剰余項」

$$(-1)^n X^{n+1}$$

¹⁹すなわち、正方行列に対しては、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 X^n という行列を考えることができますから、多項式に代入してみることができるわけです。

が気になりますが, 第1回のときに見たように, (23) 式で与えられる行列 N に対しては,

$$N^3 = O$$

となることが分かりますから,

$$X = \alpha^{-1}N$$

とすると,

$$\begin{aligned} X^3 &= (\alpha^{-1}N)^3 \\ &= \alpha^{-3} \cdot N^3 \\ &= \alpha^{-3} \cdot O \\ &= O \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, この場合, $n \geq 2$ とすれば, (28) 式の右辺の「剰余項」はいなくなることが分かります. そこで, 特に, $n = 2$ としてみると,

$$(I + \alpha^{-1}N)(I - \alpha^{-1}N + \alpha^{-2}N^2) = I$$

となることが分かりますが, これは,

$$\begin{aligned} (I + \alpha^{-1}N)^{-1} &= I - \alpha^{-1}N + \alpha^{-2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2} \\ 0 & 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ということに他なりません. こうして上で述べた予想を正当化することができました.

興味のある方は, 行列 A が n 行 n 列のときに, 基本変形を試みることに, ここで考えた方法と二通りの方法で逆行列 A^{-1} を求めてみて下さい.

7 逆行列に関する注意

さて, 一般に, 正方行列 A に対して,

$$AB = BA = I \tag{29}$$

となる行列 B が存在するときに, B を行列 A の**逆行列**と呼び, 記号で, $B = A^{-1}$ と表わすということは, 皆さん良くご存じのことではないかと思いますが, **逆行列を考えるときに, どうして A は正方行列でなければならないのか**ということが気になる方がいるかもしれません. そこで, ここでは, この点について少し考えてみることにします.

そこで, まず, A を m 行 n 列の行列として, この場合にも, (29) 式の条件が意味を持つのかどうかということを考えてみます. いま, A は m 行 n 列の行列ですから, AB という

行列の積が意味を持つためには、行列 B の行の数は n でなければならないことが分かります。また、単位行列 I は正方行列ですから、 $AB = I$ という等式が意味を持つためには、行列 AB は m 行 m 列の行列でなければならない、行列 B の列の数は m でなければならないことが分かります。よって、 B は n 行 m 列の行列でなければならないことが分かりますが、逆に、 B を n 行 m 列の行列とすれば、

$$AB = I_m \quad (30)$$

という等式は意味を持つことが分かります。²⁰ 全く同様に考えると、 B を n 行 m 列の行列とすれば、

$$BA = I_n \quad (31)$$

という等式は意味を持つことが分かります。以上より、「 m 行 n 列の行列 A に対して、

$$\begin{cases} AB = I_m \\ BA = I_n \end{cases} \quad (32)$$

となる n 行 m 列の行列 B が存在するときに、 B を行列 A の逆行列と呼ぶ」ということにすれば、この場合にも逆行列の概念を考えることができることが分かります。²¹

このように、行列 A が正方行列とは限らない場合でも逆行列の概念を考えることはできるのですが、残念ながら、 **$m \neq n$ のときには、(32) 式を満たす行列 B は存在しないこと**が、例えば、次のようにして分かります。

そのために、まず、正方行列に対するトレースという概念を準備することになります。一般に、 m 行 m 列の正方行列 $C = (c_{ij})$ に対して、

行列 C のトレース

$$\text{tr } C = \sum_{i=1}^m c_{ii}$$

と定めて、 $\text{tr } C$ を行列 C の**トレース** (trace) と呼びます。²² そこで、 A を m 行 n 列の行列、 B を n 行 m 列の行列として、 $\text{tr}(AB)$ と $\text{tr}(BA)$ との間の関係について考えてみることにします。

いま、行列 A, B の行列成分を、それぞれ、 $A = (a_{ij})$ 、 $B = (b_{ij})$ と表わすことにします。このとき、 $AB = (c_{ij})$ と表わすと、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

と表わせるので、

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m c_{ii}$$

²⁰以下の議論では、**どのようなサイズの単位行列を考えているのか**ということが重要になりますので、 m 行 m 列の単位行列を I ではなく、 I_m と表わすことにしました。

²¹ここで、 AB は m 行 m 列の行列、 BA は n 行 n 列の行列となりますから、 $m \neq n$ のときには、 AB と BA はサイズの異なる正方行列となり、 $AB = BA$ という等号は意味を持たないことに注意して下さい。

²²日本語でトレースのことを**跡**、あるいは、**対角和**と言いますが、日本語名は用いずに、そのまま英語名でトレースと言うことが多いです。

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \quad (33)$$

となることが分かります. 全く同様に, $BA = (d_{ij})$ と表わすと,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

と表わせるので,

$$\begin{aligned} \text{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^n d_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{ki} \end{aligned} \quad (34)$$

となることが分かります. そこで, (33) 式の右辺の和を取る添え字を $i \leftrightarrow k$ と書き直してみると, (33) 式, (34) 式から,

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{ki} \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

となることが分かります. 以上から,

—— トレースの持つ重要な性質 ——

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (35)$$

となることが分かりました.

以上の準備のもとで, 逆行列の問題に戻ることになります. そこで, いま, m 行 n 列の行列 A に対して, (32) 式を持たす n 行 m 列の行列 B が存在したとします. このとき, (30) 式の両辺のトレースを考えると,

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}(I_m) \\ &= m \end{aligned} \quad (36)$$

となることが分かります. 同様にして, (31) 式の両辺のトレースを考えると,

$$\begin{aligned} \text{tr}(BA) &= \text{tr}(I_n) \\ &= n \end{aligned} \quad (37)$$

となることが分かります. したがって, (35) 式, (36) 式, (37) 式から,

$$m = \text{tr}(AB) \quad ((36) \text{ 式より})$$

$$= \text{tr}(BA) \quad ((35) \text{ 式より})$$

$$= n \quad ((37) \text{ 式より})$$

となることが分かります. 以上より, **(32) 式を満たす行列 B が存在するためには, $m = n$ でなければならないこと**, すなわち, **行列 A は正方行列でなければならないこと**が分かりました.

このように, **行列 A に逆行列が存在するためには, A は正方行列でなければならないこと**が分かるのですが, (30) 式, あるいは, (31) 式のうち, 片方だけを満たすような行列 B であれば, 行列 A が正方行列でなくとも存在し得ます. 例えば, 3 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

に対して,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

となることが分かります. ただし, この場合には, 例えば,

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

としても,

$$\begin{aligned} B'A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

となってしまうというように, (31) 式を満たすような行列 B は唯ひとつには定まらなくなってしまう.²³

²³興味がある方は, (38) 式で与えられる行列 A に対して, $BA = I_2$ となるような 2 行 3 列の行列 B をすべて求めてみて下さい.

一方, A が正方行列の場合には, 実は, (30) 式, あるいは, (31) 式のうちの一方の等号が成り立てば, もう一方の等号も自動的に成り立つということが分かります. すなわち,

正方行列の特殊事情

$$AB = I \iff BA = I \quad (39)$$

となることが分かります.²⁴ また, 与えられた正方行列 A に対して, (30) 式, あるいは, (31) 式を満たすような行列 B は, 存在したとしても, 唯一つしか存在しないことが, 次のようにして分かります. そこで, いま, 例えば,

$$BA = I \quad (40)$$

$$B'A = I \quad (41)$$

というように, (30) 式を満たす行列が二つ見つかったとします. このとき, (39) 式, (40) 式から,

$$AB = I \quad (42)$$

となることが分かります. そこで, (42) 式の両辺に左から B' を掛け算してみると, (41) 式から,

$$\begin{aligned} B' &= B'I \\ &= B'(AB) && ((42) \text{ 式より}) \\ &= (B'A)B \\ &= IB && ((41) \text{ 式より}) \\ &= B \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $B = B'$ でなければならないことが分かります.²⁵

上で見てきたように, 行列 A が正方行列でない場合には, (30) 式と (31) 式が両立しないとか,²⁶ (30) 式, あるいは, (31) 式を満たす行列 B が一意的に定まらないなど, 行列 A が正方行列である場合に比べて, 事情が込み入ってきます. そこで, この場合には, 「線型空間」や「線型写像」という見方を通して, 行列に対する理解を深めた上で, それぞれの目的に応じて, (30) 式, あるいは, (31) 式を満たす行列 B について考察するのが普通です.

²⁴ この事実は, 行列を「数が並んだもの」と見るのではなく, 「線型写像」とみなして議論した方がより良く理解できるのではないかと思いますので, ここでは立ち入らずに, 後で「線型写像」や「線型写像の大まかな様子」を扱うときに, もう一度考えてみようと思います. 皆さんは, **(39) 式は, それほど「当たり前」の事実ではない**ということだけは頭の片隅に置いて, 取りあえず, (39) 式は認めて, 5 節で述べた「基本変形を用いた逆行列の計算法」など, 正方行列の逆行列に対する基本的な事柄の理解を深めてゆかれると良いのではないかと思います.

²⁵ 論理的には, 「このようにして, 行列 A から (存在すれば) 唯一つ定まる行列 B を行列 A の逆行列と呼び, $B = A^{-1}$ と表わす」ということになります.

²⁶ すなわち, (30) 式と (31) 式を同時に満たすような行列 B は存在しないということです.