数学 II 演習（第 2 回）のヒント

問 1. 定義にもとづいて, それぞれの等式の両辺の行列を具体的に求めて, それら二つの行列を比べてみよ.

問 2.

(1) $R(\theta)\cdot R(\varphi)$ という行列の積を具体的に計算して, 両辺の行列の行列成分を比べてみよ.

(2) (1) の結果と数学的帰納法を用いて確かめてみよ.

(3) 三角関数の加法定理と数学的帰納法を用いて確かめてみよ.

問 3.

(1) いま, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \tag{1}$$

と表わされているとして, (1) 式の両辺で $x = 0$ としてみると何が分かるかを考えてみよ. また, (1) 式の両辺を微分して,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + k a_k x^{k-1} + \cdots \tag{2}$$

としてから, (2) 式の両辺で $x = 0$ としてみると何が分かるかも考えてみよ. より一般に, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, (1) 式の両辺を k 回微分してから $x = 0$ としてみると何が分かるかを考えてみよ.

(2) それぞれの関数 $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ に対して, $f^{(k)}(0)$ を具体的に計算して, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ を求めてみよ.

問 4.

(1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$ という式に $z = i\theta$ を代入して, 右辺を実部と虚部に分けてみよ. また, 得られた結果を $\cos x, \sin x$ の Taylor 展開の式と比べてみよ.

(2) $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ という複素数の積を具体的に計算して, 両辺の実部と虚部を比べてみよ.

(3) (2) の結果と数学的帰納法を用いて確かめてみよ.