数学 II 演習 (第 2 回)

問 1. 複素数 $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して, 行列

$$A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

を対応させる. このとき, 勝手な二つの複素数 $z, z' \in \mathbb{C}$ に対して, 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $A(z + z') = A(z) + A(z')$
(2) $A(zz') = A(z) \cdot A(z')$
(3) $A(1) = I$
(4) $A(\bar{z}) = {}^tA(z)$
(5) $A(z) \cdot {}^tA(z) = |z|^2 \cdot I$

ただし, 2 行 2 列の単位行列を I と表わし, 行列 $A(z)$ の転置行列 (すなわち, 行と列をひっくり返した行列のこと. 英語で, 転置を *transpose* と言う.) を ${}^tA(z)$ と表わした. 今の場合,

$${}^tA(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

である.

問 2. 実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

なる行列を考える.

(1) 勝手な実数 $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$R(\theta + \varphi) = R(\theta) \cdot R(\varphi)$$

となることを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して,

$$\begin{aligned} R(n\theta) &= R(\theta)^n \\ &= \underbrace{R(\theta) \cdot R(\theta) \cdots R(\theta)}_{n\ \text{コ}} \end{aligned}$$

となることを示せ.

(3) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ となることを示せ.

♠ 裏に, 問 3, 問 4 があります.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

• 次の問では, あまり厳密なことは問わない.「Taylor 展開」については, いずれ微積分学の講義で学んで下さい.

問 **3.**

(1) $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

というように「(次数が無限大の) 多項式の姿」で表わせるとする. このとき, 右辺が項別に微分できるとすると,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

でなければならないことを示せ. 但し, $f^{(k)}(x)$ は, $f(x)$ の k 階導関数, すなわち, $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{df}{dx}(x)$, $f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$, $\cdots$ である. また,「項別に微分できる」とは,

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \frac{d}{dx}(a_0) + \frac{d}{dx}(a_1 x) + \frac{d}{dx}(a_2 x^2) + \cdots$$

という計算ができるということである.

(2) $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ とするとき, $f(x)$ が上のように展開できることを認めて, 次を示せ.

$$\begin{cases} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{cases}$$

• そこで, 問 3 の結果を用いて, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対しても,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

と定めてみる.

問 **4.** $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \cdots$ に対して, 次を示せ.

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$

(3) $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = \underbrace{e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta}}_{n\ コ}$