数学 II 演習 (第 1 回) の略解

目 次

1　問 1 の解答

$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3,\ a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ などと行列の成分を具体的に求めてみると,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

2　問 2 の解答

(1) A^n の一般的な形がすぐに分かるとは限らないので, まず, $A^2, A^3, A^4, \cdots$ などを具体的に計算してみることで, 答に「当たり」をつけることを試みてみます. そこで, $A^2, A^3, A^4, \cdots$ などを具体的に計算してみると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots$$

となることが分かります. これらの式をじっと眺めると, A^n は,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるのではないかと予想できます. こうして予想がついてしまえば, 後は, n に関する数学的帰納法を用いて, 予想が正しいことを証明することができます.[1]

(2) (1) と同様に, $A^2, A^3, A^4, \cdots$ などを具体的に計算してみると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots$$

となることが分かります. そこで, これらの式をじっと眺めると,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & c_n a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形になりそうなことが分かります. ここで, a^2 の係数がどうなるのかということは, すぐには分からないかもしれないので, 取りあえず, c_n と表わすことにしました.[2]

そこで, それぞれの行列の一行目に注目してみると,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 4a & 6a^2 \end{pmatrix},\ \cdots$$

などとなっていることが分かりますが, これが二項展開と同じパターンであることから,

$$\begin{aligned} c_n &= \binom{n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

となっていることに気がつく方もいるのではないかと思います. ただし, 二項係数を,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

という記号を用いて表わしました.[3]

また, たとえ, すぐに二項係数になるということに気が付かなくとも, $A^n \cdot A$ という行列の積を計算してみると,

$$A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & na & c_n a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1]皆さん, 確かめてみて下さい.

[2]上の実験結果から,

$$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 3,\ c_4 = 6,\ \cdots$$

などとなっていることが分かります.

[3]高校では, 二項係数を ${}_nC_k$ という記号を用いて表わしたのではないかと思いますが, 数学では, 様々な対象に C_k などの記号を用いることが多く, いらない混乱を生じるといけないので, 二項係数を $\binom{n}{k}$ という特別な記号を用いて表わす慣習になっています.

$$
= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & (n+c_n)a^2 \\ 0 & 1 & (n+1)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

となることが分かりますから, これを,

$$
A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & c_{n+1}a^2 \\ 0 & 1 & (n+1)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

という行列の行列成分と比べてみることで,

$$
c_{n+1} = c_n + n \tag{1}
$$

となることが分かります. そこで, (1) 式を,

$$
c_{k+1} - c_k = k \tag{2}
$$

というように書き換えて, (2) 式の両辺を, k について, 1 から $n-1$ まで足してみると,

$$
\begin{aligned}
c_n - c_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

となることが分かります. よって, $c_1 = 0$ となることに注意すると, (3) 式から,

$$
c_n = \frac{n(n-1)}{2}
$$

となることが分かります. したがって,

$$
A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}
$$

となることが分かります.[4]

3　どうして二項係数が現われたのか?

ここで, **A^n という行列の成分に「二項係数」が現われた**ということを不思議に思われて, その理由を考えてみたいと思われた方がいるかもしれません. そう思われた方は, 数学的にとても良い感覚の持ち主ですから, 自分の疑問点をウヤムヤにせずに, そうした疑問点についてじっくり反省してみるという癖をつけて下さい. それにより, 物事がより良く

[4] (1) と同様に, 気になる方は n に関する数学的帰納法を用いて, (4) 式を確かめてみて下さい.

理解できるようになるのではないかと思います. そこで, ここでは, **どうして二項係数が登場したのか**ということについて考えてみることにします.

いま, **A^n のそれぞれの行列成分は a の多項式になる**ということに注目して,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I + aN \end{aligned} \tag{5}$$

というように, **行列 A を a について 0 次式の部分と 1 次式の部分に分けてみます**. すると, (5) 式から, A^n は,

$$A^n = (I + aN)^n$$

というように表わすことができますから, A^n を求めることは, 正しく二項展開することのように見えてきます. したがって, このことが, A^n の成分に二項係数が現われる理由ではないかと「当たり」がつくことになります.

そこで, 一般に, 二つの**正方行列**[5] X, Y が与えられているとして, $(X+Y)^2$ を「慎重に」計算してみると,

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &= (X+Y)(X+Y) \\ &= X(X+Y) + Y(X+Y) \\ &= X^2 + XY + YX + Y^2 \end{aligned} \tag{6}$$

となることが分かります. このとき, 注意しないといけないことは, 例えば, X, Y が,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとすると,

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

[5] すなわち, 行の数と列の数が等しい行列のことです. このような行列は「正方形の形」をしているので, **正方行列**と呼ばれます.

$$
\begin{aligned}
YX &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, **正方行列 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して, 一般には,**

$$\boldsymbol{XY \neq YX}$$

となるということです. したがって, 一般には, (6) 式を, これ以上簡単な形に書き直すことはできないことが分かります.

ところが, もし,

$$\boldsymbol{XY = YX}$$

となっているとすると,[6]

$$\boldsymbol{(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2}$$

というように「普通の数と同じ公式」が得られることが分かります. さらに, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(X+Y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} Y^k \\
&= X^n + nX^{n-1}Y + \cdots + Y^n
\end{aligned} \tag{7}
$$

というように, 普通の数の場合と同様に, **二項展開の公式が成り立つ**ことも分かります.[7]

さて, 我々の場合には,

$$X = I,\ Y = aN$$

でしたから,

$$XY = YX$$

となることが分かります.[8] したがって, (7) 式から,

$$
\begin{aligned}
A^n &= (I + aN)^n \\
&= I^n + nI^{n-1} \cdot (aN) + \frac{n(n-1)}{2} I^{n-2} \cdot (aN)^2 + \cdots + (aN)^n \\
&= I + naN + \frac{n(n-1)}{2} a^2 N^2 + \cdots + a^n N^n
\end{aligned} \tag{8}
$$

となることが分かります. そこで, $N^2, N^3, \cdots$ を順番に求めてみると,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[6] このとき, 行列 X と Y は**交換可能である**とか, **互いに可換である**とか言ったりします.
[7] 皆さん, $n \in \mathbb{N}$ に関する数学的帰納法を用いて, (7) 式を確かめてみて下さい.
[8] 単位行列 I は, すべての行列と可換になります.

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
N^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
N^3 = N^4 = \cdots = O \tag{9}
$$

となることが分かります. ただし, **零行列**を O という記号を用いて表わすことにしました. したがって, (8) 式と (9) 式から,

$$
\begin{aligned}
A^n &= I + naN + \frac{n(n-1)}{2}\, a^2 N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + na \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\, a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2} a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることが分かりました. こうして, **何故, 二項係数が現われたのか**という理由も自然に納得できることが分かりました.

興味のある方は, $m \in \mathbb{N}$ を, 勝手な自然数として, A が m 行 m 列の行列のときに A^n がどうなるのかということを考えてみて下さい.[9] このとき, 例えば, $m = 4$ であるとして, 前と同様に,

$$
N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

として, N^2, N^3, N^4 などの行列を具体的に計算してみると,

$$
N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}
$$

[9] $m = 4$, $m = 5$ などの場合だけを考えてもらっても構いません.

というように, **行列 N をひとつ掛け算するごとに, 1 が一段ずつ斜め上に押し上げられてゆくパターン**が見て取れます. すると, (10) 式から, $m=4$ のときには,

$$N^4 = O$$

となることが分かりますが, 全く同様に考えると, 一般の自然数 $m \in \mathbb{N}$ のときには,

$$N^m = O$$

となることが分かります. このように, 何回かベキ乗を取ると零行列になるような正方行列を**ベキ零行列** (nilpotent matrix) と呼びます. ここで考えた対角線の一段上だけに 1 が並び, 他の成分が 0 になっているような行列 N がベキ零行列の典型的な例です.

上で見てきたように, **行列を「ただ単に数を並べたもの」と思うのではなく, 行列自身を足し算や掛け算のできる「数」であると考えて, 行列という「数」の持つ性質をより良く理解する**ということが, 皆さんがこれから学んでゆくことになる**線型代数学**の大きな目標になります. 行列の世界では, 二項展開を用いて計算をするというように, 行列を普通の数のように扱えるような場合もありますが, その一方で, 一般には, $XY \neq YX$ というように, 掛け算をする順番によって掛け算の結果が異なったり, それ自身は零行列ではないのに適当なベキを考えると零行列になってしまうベキ零行列が存在したりと, 普通の数の世界には見られないような現象が起こる場合もあります. こうした「数」としての行列の性質をより良く理解することによって,「連立一次方程式」や「線型漸化式を満たす数列」を始めとして, 皆さんが, 将来, それぞれの分野で出会うことになるであろう様々な事柄がより良く理解できるようになります. ですから, 皆さんも, そうした線型代数学の目標を念頭に置いて勉強されてゆかれたら良いのではないかと思います.

4 問 3 の解答

(1) $z \neq 0$ のとき, $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ とすると,

$$z \cdot w = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1,$$
$$w \cdot z = \frac{\bar{z} \cdot z}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

となることが分かります. よって, $w = z^{-1}$ となることが分かります.

(2) $z^3 - 1$ は,

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$$

というように因数分解できることに注意すると, $z^3 - 1 = 0$ という方程式の解は,

$$z = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

となることが分かります. そこで, これらの解を図示してみると, 複素平面内の単位円周[10]上で, 3 等分点に対応する点が選ばれることが分かります (図 1 を参照).

[10]すなわち, 半径が 1 の円周のことです.

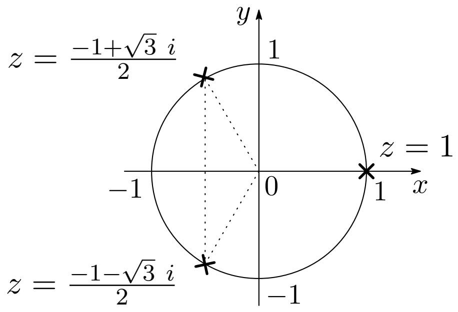

図 1: $z^3 = 1$ となる複素数を複素平面上に描いてみると, 単位円周上の三等分点に対応する点が得られる.

興味がある方は, $z = 1$, $z^2 = 1$, $z^4 = 1$ などに対して同様の考察をしてみることで, 一般に, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $z^n = 1$ の解が複素平面上のどのような点に対応するのかということに「当たり」を付けてみて下さい.

(3) $z_0 z = (a + bi)(x + yi)$ を具体的に計算してみると,

$$z_0 z = (ax - by) + (bx + ay)\, i$$

となることが分かりますから,

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$A_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{11}$$

とすればよいことが分かります.

(4) (11) 式において,

$$\begin{cases} a = |z_0| \cdot \cos\theta \\ b = |z_0| \cdot \sin\theta \end{cases}$$

とすれば, 行列 A_{z_0} は,

$$A_{z_0} = |z_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かります.

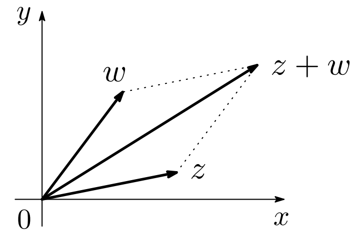

図 2: 複素数同士の足し算は, ベクトルの足し算として理解することができる.

5 複素数の掛け算

問 3 は, 皆さんに, **複素数の掛け算の幾何学的な意味**を理解してもらいたいと思って出題してみました. 複素数は, $i^2 = -1$ という奇妙な数を考えるために, 人目につかないように隠れて使われていた時代もありました. しかし, 今では,

複素数と平面上の点の対応

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように, 複素数と平面上の点を同一視して考えることで, **複素数とは平面 $\mathbb{R}^2$ 上に足し算や掛け算の構造を入れたもの**であるというように, 数学的にきちんとした形で理解されているわけです.[11] このとき, **複素数同志の足し算は, 複素数を複素平面上のベクトルと思ったときに, それぞれのベクトルの和で与えられる**ということは, 皆さんもよくご存じのことではないかと思います (図 2 を参照).[12] それでは,「複素数を掛け算するとはどのような操作なのか」ということを考えてみて下さいというのが, 問 3 の (3), (4) の問題の意味です.

いま,

$$z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$$

という複素数を, 勝手にひとつ取ってきて,**「複素数 z_0 を掛け算する」という操作**を考え

[11] 実数とは, 直線 $\mathbb{R}$ 上に数の構造を入れたものでした.

[12] 実際, $z = x + yi, w = x' + y'i$ とすると, $z + w = (x + x') + (y + y')i$ となることが分かりますから,

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{C} \ni w = x' + y'i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように対応しているとき,

$$\mathbb{C} \ni z + w = (x + x') + (y + y')i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように対応することが分かります.

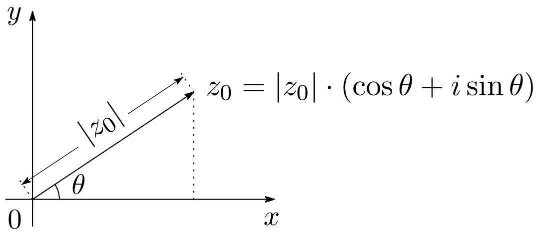

図 3: 複素数 $z_0 \in \mathbb{C}$ の極座標表示.

てみます. すると, 問 3 の (3) で見たように, この操作は, **平面 $\mathbb{R}^2$ 上で,**

$$\boldsymbol{A_{z_0}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

という行列を掛け算する操作として理解することができることが分かります. そこで, この操作をより良く理解するために, $z_0 \in \mathbb{C}$ を

$$z_0 = |z_0| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

というように極座標を用いて表わすことにして (図 3 を参照), 問 3 の (4) のように, 行列 A_{z_0} を,

$$A_{z_0} = |z_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

という形に書き直してみると,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{12}$$

という行列が現われることが分かります. 実は, (12) 式の行列 $R(\theta)$ は**平面 $\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心に角度 θ だけ反時計回りに回転させる操作を表わす行列**であることが, 次のようにして分かるのですが, このときのアイデアは**「原点を中心とする回転」という操作が持つ性質に注目する**ということにあります.

いま, 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に対して, 原点を中心として, $\mathbf{u}$ を角度 θ だけ反時計回りに回転して得られるベクトルを $R_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ と表わすことにします. すなわち, それぞれのベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbf{u}$ を θ 回転させた結果である $R_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ というベクトルを対応させる写像を,

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

と表わすことにします.[13] このとき, 原点まわりの回転という操作 R_θ は,

[13]英語で, 回転のことを rotation と言います.

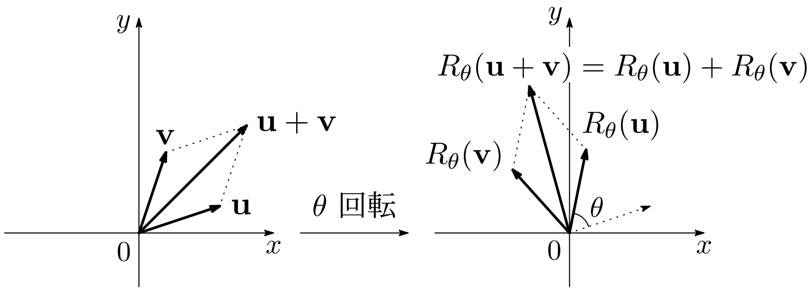

図 4: 二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を足してから θ 回転させたもの $R_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ は, それぞれのベクトルを θ 回転させてから足したもの $R_\theta(\mathbf{u}) + R_\theta(\mathbf{v})$ に等しい.

原点まわりの回転の持つ性質

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\boldsymbol{R_\theta}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{R_\theta}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{R_\theta}(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\boldsymbol{R_\theta}(a\mathbf{u}) = a \cdot \boldsymbol{R_\theta}(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの性質を持つことが, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ という二つのベクトルを, 勝手にひとつずつ取ってきて,

$$\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

という三つのベクトルを考えて, これらのベクトルを θ 回転させたときの様子を考えてみます (図 4 を参照). このとき, 図 4 の左の図における $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ というベクトルを回転させた行き先のベクトルを考えると, 定義により, このベクトルは $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ というベクトルを θ 回転させたものですから, $R_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ と表わせることが分かります. 一方, 図 4 の左の図のことは忘れて, 右の図のみに注目して考えてみると, このベクトルは, $R_\theta(\mathbf{u})$ と $R_\theta(\mathbf{v})$ という二つのベクトルを足したものと考えることもできますから, $R_\theta(\mathbf{u}) + R_\theta(\mathbf{v})$ とも表わせることが分かります. もちろん, これらの二つの表示は同じベクトルを表わしているわけですから,

$$R_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = R_\theta(\mathbf{u}) + R_\theta(\mathbf{v})$$

となることが分かります. よって, (イ) という性質が成り立つことが分かります.

全く同様に, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ というベクトルと $a \in \mathbb{R}$ という実数を, 勝手にひとつずつ取ってきて,

$$\mathbf{u},\ a\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$$

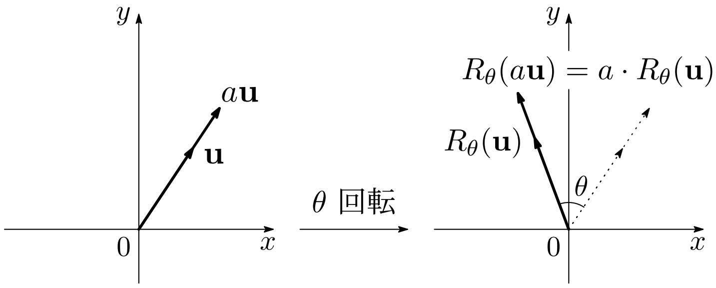

図 5: ベクトル $\mathbf{u}$ を a 倍してから θ 回転させたもの $R_\theta(a\mathbf{u})$ は, ベクトル $\mathbf{u}$ を θ 回転させてから a 倍したもの $a\cdot R_\theta(\mathbf{u})$ に等しい.

という二つのベクトルを考えて, これらのベクトルを θ 回転させたときの様子を考えてみます (図 5 を参照). このとき, 図 5 の左の図における $a\mathbf{u}$ というベクトルを回転させた行き先のベクトルを考えると, 定義により, このベクトルは $a\mathbf{u}$ というベクトルを θ 回転させたものですから, $R_\theta(a\mathbf{u})$ と表わせることが分かります. 一方, 図 5 の左の図のことは忘れて, 右の図のみに注目して考えてみると, このベクトルは, $R_\theta(\mathbf{u})$ というベクトルを a 倍したものと考えることもできますから, $a\cdot R_\theta(\mathbf{u})$ とも表わせることが分かります. もちろん, これらの二つの表示は同じベクトルを表わしているわけですから,

$$R_\theta(a\mathbf{u}) = a\cdot R_\theta(\mathbf{u})$$

となることが分かります. よって, (ロ) という性質が成り立つことも分かります.

以上から, 原点まわりの回転という操作 R_θ は, (イ), (ロ) という二つの性質を持つことが分かりました. ここで, (イ) という性質は「二つのベクトルの和を θ 回転させたものは, それぞれのベクトルを θ 回転してから足したものに等しい」ということを, (ロ) という性質は「ベクトルを 2 倍 3 倍などしてから θ 回転したものは, θ 回転してから 2 倍 3 倍などしたものに等しい」ということを表わしています. この R_θ のように, **足し算を足し算に写し, スカラー倍をスカラー倍に写すような写像**のことを, 一般に, **線型写像**と呼びます. 実は, **「線型写像」は「行列」を用いて表わすことができる**ということが分かっていて, こうした事柄を理解することが線型代数学の大きな目標のひとつになるのですが, ここでは, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の θ 回転 R_θ を例に取って, このことを確かめてみることにします.

そこで, 勝手なベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

に対して, $\mathbf{u}$ を θ 回転させた行き先 $R_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ がどうなるのかということを, (イ), (ロ) という二つの性質をもとにして考えてみます. そのために, ベクトル $\mathbf{u}$ を,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

というように分解してみます. このとき, (イ), (ロ) という二つの性質を用いると, $R_\theta(\mathbf{u})$ は,

$$
\begin{aligned}
R_\theta(\mathbf{u}) &= R_\theta\left(x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= R_\theta\left(x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+R_\theta\left(y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) && (\text{(イ) より})\\
&= x\cdot R_\theta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\cdot R_\theta\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) && (\text{(ロ) より}) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

というように表わせることが分かります. この (13) 式は, $\mathbb{R}^2$ **の勝手なベクトル**

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

を θ 回転させた行き先 $R_\theta(\mathbf{u})\in\mathbb{R}^2$ を知るためには,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

という特別なベクトルを θ 回転させた行き先さえ分かれば良いということを表わしていると解釈できます. すなわち, これら二つのベクトルを θ 回転させた行き先さえ分かれば, 勝手なベクトル $\mathbf{u}$ を θ 回転させた行き先は, (13) 式を用いて機械的に計算できるというわけです.

そこで, 図を描いて, これら二つのベクトルを θ 回転させた行き先を求めてみると,

$$R_\theta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},\ R_\theta\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix} \qquad (14)$$

となることが分かります (図 6 を参照). したがって, (13) 式と (14) 式から, 勝手なベクトル

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

を θ 回転させた行き先は,

$$
\begin{aligned}
R_\theta(\mathbf{u}) &= x\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(\cos\theta)\cdot x-(\sin\theta)\cdot y\\(\sin\theta)\cdot x+(\cos\theta)\cdot y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

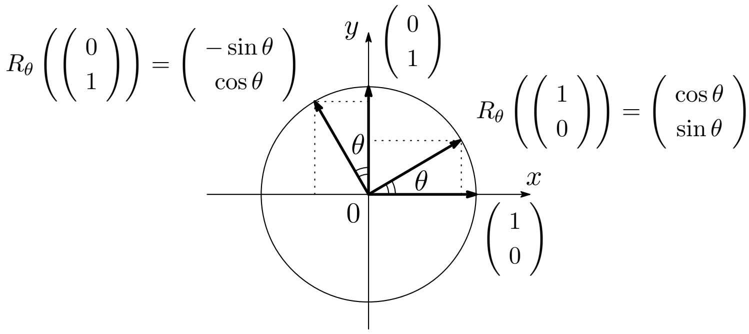

図 6: ベクトル ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1) \in \mathbb{R}^2$ を θ 回転したベクトルは, それぞれ, ${}^t(\cos\theta, \sin\theta)$, ${}^t(-\sin\theta, \cos\theta) \in \mathbb{R}^2$ で与えられる.（ここで, 与えられた行列の行と列を入れ替えることによって得られる「転置行列」を「^{t}」という添字を付けて表わしました.）

となることが分かります. すなわち,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

という座標を用いて表わすと, **$\boldsymbol{\theta}$ 回転する操作を表わす線型写像 $\boldsymbol{R_\theta}$ は**,

原点まわりの回転の行列表示

$$\boldsymbol{R_\theta(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

というように, $\boldsymbol{R(\theta)}$ という行列を掛け算する写像として表わされることが分かります.

さて, 問 3 の (4) の結果から, 複素数 $z_0 = |z_0| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ を掛け算するということは,

$$\begin{aligned} A_{z_0} &= |z_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= |z_0| \cdot R(\theta) \end{aligned}$$

という行列を掛け算するということであると理解できることが分かります. また, 上で見たように, $R(\theta)$ という行列は, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とした θ 回転を表わすような行列でした. したがって, **複素数 $\boldsymbol{z_0 = |z_0| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)}$ を掛け算するということは, 幾何学的には, 複素平面上で, 角度を $\boldsymbol{\theta}$ 回転させて, さらに長さを $\boldsymbol{|z_0|}$ 倍する操作である**ということが分かりました（図 7 を参照）. 例えば, 複素数 i を掛け算するということは, 原点を中心とした 90 度回転を施すということであると理解することができます.

上で注意したように, 複素数は平面 $\mathbb{R}^2$ 上に数の構造を入れたものとして理解することができます. すると,「同様にして, $\mathbb{R}^3$ や $\mathbb{R}^4$ など, 他のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ にも数の構造を入れることができるのだろうか」と疑問に思われる方がいるかも知れません. これはなかなか手ごわい問題でしたが, 現在では, 0 でない元に対していつでも割り算ができるような数の構造は, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8$ という四つのユークリッド空間にしか入らないというこ

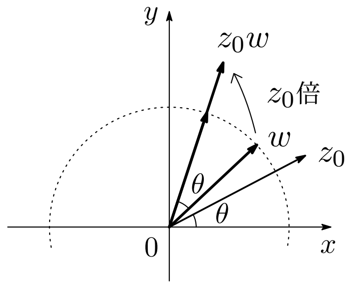

図 7: 複素数 $z_0 = |z_0| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ を掛け算するという操作は, 角度を θ 回転させて, さらに長さを $|z_0|$ 倍する操作として理解できる.

とが（高級な数学を用いることで）分かっています. このように, 世の中には**不思議な次元**というのが存在しているようです.