

数学 II 演習 (第 1 回)

問 1. i 行 j 列の行列成分 a_{ij} が, $a_{ij} = i + 2j$ で与えられる 4 行 4 列の行列 A を具体的に書き表わせ.

問 2.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, A^n , ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, A^n , ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

♠ 余裕があれば, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{m \times m}$ でも考えてみよ.

● 実数 (real number) 全体の集合を $\mathbb{R}$ と表わし, 複素数 (complex number) 全体の集合を $\mathbb{C}$ と表わす.

問 3. $z = x + yi \in \mathbb{C}$ を複素数とする. すなわち, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ とする. また, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, z の複素共役 $\bar{z} \in \mathbb{C}$ を $\bar{z} = x - yi$ という式により定め, z の絶対値 $|z|$ を $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ という式により定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z \neq 0$ のとき, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ となることを確かめよ.

(2) $z^3 = 1$ となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ. また,

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

という対応により複素数を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点と思うとき, これらの点を図示せよ.

(3) 複素数 $z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $f_{z_0}(z) = z_0 z$ という式によって与えられる写像 $f_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. このとき, $z = x + yi$, $f_{z_0}(z) = x' + y'i$ と表わすと, (x', y') は, 2 行 2 列の行列 A_{z_0} を用いて,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_{z_0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という形に表わすことができることを示せ. (すなわち, A_{z_0} を具体的に求めてみよ.)

(4) さらに, (2) と同様に, $z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ を $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ という平面上の点と同一視して, $(a, b) = (|z_0| \cdot \cos \theta, |z_0| \cdot \sin \theta)$ と表わすと, A_{z_0} は,

$$A_{z_0} = |z_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表わせることを確かめよ.