数学 IB 基礎演習問題 (その１) の略解

問 1. それぞれの関数に対して, $f^{(n)}(0)$ という値を具体的に求めてみると, 関数 $f(x)$ の ($x=0$ のまわりでの) Taylor 展開は, 次のようになることが分かります.

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

(2) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \cdots$

(3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$

(4) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

(5)
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!} x^k\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k\end{aligned}$$

問 2.

(1) 問 1 で求めた「多項式の姿」を微分してみると,

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)' = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)' = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

となることが分かります.

(2) 問 1 で求めた

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

という式の右辺に $(1-x)$ を掛け算してみると,

$$\begin{aligned}(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &\qquad - x - x^2 - x^3 - x^4 - \cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) 問 1 の結果で, 特に, $\alpha = n \in \mathbb{N}$ としてみると,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}
$$

となることが分かります. これは, 皆さん良くご存じの「二項展開」の式に他なりません.

問 3.

(1) いま,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \left\{(1-x)^{-1}\right\}' \\
&= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (1-x)' \\
&= (1-x)^{-2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

となることに注意して,

$$
\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots
$$

という式の両辺を x で微分してみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)' \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(2) (1) と同様に,

$$
\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left\{(1-x)^{-2}\right\}'
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(1-x)' \\
&= 2\cdot(1-x)^{-3} \\
&= \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

となることに注意して,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$

という式の両辺を x で微分してみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{(1-x)^3} &= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots)' \\
&= 2\cdot 1 + 3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + 5\cdot 4x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}x + \frac{4\cdot 3}{2}x^2 + \frac{5\cdot 4}{2}x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \cdots$$

となることが分かります.

(3) いま,

$$
\begin{aligned}
\{\log(1+x)\}' &= \frac{(1+x)'}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x}
\end{aligned}
$$

となることに注意して,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

という式の両辺を積分してみると, 積分定数を $C \in \mathbb{R}$ として,

$$\log(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{1}$$

となることが分かります. さらに, $x = 0$ として, (1) 式の両辺の値を比べてみると, $C = 0$ となることが分かりますから,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$$

となることが分かります.

問 4. いま,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{1}$$

という式において, $x \rightsquigarrow -x$ と置き換えてみると,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \right\} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \right\} \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かります.

問 5.

(1) いま,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$$

と書き直して, $y = \frac{x}{2}$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - y + y^2 - y^3 + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \cdots \right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^3}{2^4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) いま,

$$\frac{1}{(1+x)(2+x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

というように部分分数展開してから, (1) の結果を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)(2+x)} &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \\
&= (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^3}{2^4} + \cdots\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)x + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)x^2 - \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)x^3 + \cdots \\
&= \frac{2-1}{2} - \frac{2^2-1}{2^2}x + \frac{2^3-1}{2^3}x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) 問 1 の (5) の結果から,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!}x^k \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \cdots \qquad (1)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $x \rightsquigarrow -x$ と置き換えることで,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 - \cdots \qquad (2)$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} &= \left\{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \cdots\right\} \\
&\quad - \left\{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 - \cdots\right\} \\
&= x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 3!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 5!}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^6 \cdot 7!}x^7 + \cdots \\
&= x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (4m-1)}{2^{2m} \cdot (2m+1)!}x^{2m+1}
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) いま,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)} \\
&= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}
\end{aligned}
$$

と表わせることに注意すると, (3) の結果から,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x} \\
&= \frac{1}{2x}\cdot\left\{x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(4m-1)}{2^{2m}\cdot(2m+1)!}\,x^{2m+1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(4m-1)}{2^{2m+1}\cdot(2m+1)!}\,x^{2m}
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(5) いま,

$$
\begin{aligned}
\log(x^2+3x+2) &= \log\{(x+1)(x+2)\} \\
&= \log(1+x)+\log(2+x) \\
&= \log(1+x)+\log\left\{2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right\} \\
&= \log(1+x)+\log 2+\log\left(1+\frac{x}{2}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

と表わせることに注意します. ここで, $y=\frac{x}{2}$ と書くことにすると,

$$
\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{x}{2}\right) &= \log(1+y) \\
&= y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, (3) 式, (4) 式から,

$$
\begin{aligned}
&\log(x^2+3x+2) \\
&\quad= \log 2+\log(1+x)+\log\left(1+\frac{x}{2}\right) \\
&\quad= \log 2+\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right) \\
&\qquad\quad+\left\{\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots\right\} \\
&\quad= \log 2+\left(1+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)x^3+\cdots \\
&\quad= \log 2+\frac{2+1}{2}x-\frac{2^2+1}{2\cdot 2^2}x^2+\frac{2^3+1}{3\cdot 2^3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n+1}{n\cdot 2^n}x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

問 6.

(1) いま,

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

とすると, 逆関数の定義から,

$$\tan f(x) = x \tag{1}$$

となることが分かります. そこで, (1) 式の両辺を x で微分してみると,

$$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = 1$$

となることが分かりますから,

$$f'(x) = \cos^2 f(x) \tag{2}$$

となることが分かります. 一方, (1) 式の両辺を 2 乗してみると,

$$\begin{aligned} x^2 &= \tan^2 f(x) \\ &= \frac{\sin^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2 f(x)} - 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\cos^2 f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{3}$$

となることが分かります. よって, (2) 式, (3) 式から,

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{4}$$

となることが分かります.

(2) $y = x^2$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + x^2} &= \frac{1}{1 + y} \\ &= 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^m x^{2m} + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かります.

(3) (4) 式に注意して, (5) 式の両辺を積分してみると, 積分定数を $C \in \mathbb{R}$ として,

$$\tan^{-1} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{6}$$

となることが分かりますが, (6) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると, $C = 0$ となることが分かりますから,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{2m-1} + \cdots$$

となることが分かります.

問 7.

(1) いま,

$$f(x) = \sin^{-1} x$$

とすると, 逆関数の定義から,

$$\sin f(x) = x \tag{1}$$

となることが分かります. そこで, (1) 式の両辺を x で微分してみると,

$$\{\cos f(x)\} \cdot f'(x) = 1$$

となることが分かりますから,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} \tag{2}$$

となることが分かります. 一方, $f(x) = \sin^{-1} x$ の定義から,

$$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

となることに注意すると,

$$\cos f(x) \geq 0$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \cos f(x) &= \sqrt{1 - \sin^2 f(x)} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります. よって, (2) 式, (3) 式から,

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{4}$$

となることが分かります.

(2) いま,

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}y^3 + \cdots$$

という「二項展開」を, $\alpha = -\frac{1}{2}$ として適用すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+y}} &= (1+y)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}y^3 + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $y \rightsquigarrow -y$ と書き換えることで,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}y^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}y^n + \cdots \quad (5)$$

となることが分かります.

(3) (5) 式において, $y = x^2$ とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \cdots \quad (6)$$

となることが分かります.

(4) (4) 式に注意して, (6) 式の両辺を積分してみると, 積分定数を $C \in \mathbb{R}$ として,

$$\sin^{-1}x = C + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \quad (7)$$

となることが分かりますが, (7) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると, $C = 0$ となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
\sin^{-1}x &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \\
&= x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1)}{2^m\cdot m!}\cdot\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \\
&= x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2m}\cdot\frac{x^{2m+1}}{2m+1}
\end{aligned}$$

となることが分かります.

問 8. いま, e^x, $\sqrt{1-x}$ は, それぞれ,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots$$

というように Taylor 展開されることが分かりますから, $e^x\sqrt{1-x}$ は,

$$\begin{aligned}
e^x\sqrt{1-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots\right) \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right)x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13}{48}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

というように Taylor 展開されることが分かります.

問 9.

(1) いま, $\frac{1}{\cos x}$ の Taylor 展開を,

$$\frac{1}{\cos x} = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + \cdots \tag{1}$$

と表わすことにします. このとき, $\cos x$ は遇関数であることに注意して, (1) 式において, $x \rightsquigarrow -x$ と置き換えると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{\cos(-x)} \\
&= d_0 - d_1 x + d_2 x^2 - d_3 x^3 + d_4 x^4 - \cdots
\end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かりますから, (1) 式, (2) 式の両辺を足し算することで,

$$\frac{1}{\cos x} = d_0 + d_2 x^2 + d_4 x^4 + d_6 x^6 + \cdots \tag{3}$$

となることが分かります. すなわち, $\frac{1}{\cos x}$ の Taylor 展開には, x に関する偶数ベキの項しか現われないことが分かります.[1] そこで, いま, (3) 式の両辺に,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

[1]全く同様にして, 一般に, 偶関数 $f(x)$ の Taylor 展開には, x に関する偶数ベキの項しか現われないことが, また, 奇関数 $f(x)$ の Taylor 展開には, x に関する奇数ベキの項しか現われないことが分かります.

を掛け算してみると,

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)(d_0 + d_2x^2 + d_4x^4 + d_6x^6 + \cdots) \\
&= d_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + d_2\left(x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + \cdots\right) \\
&\quad + d_4\left(x^4 - \frac{x^6}{2!} + \cdots\right) + d_6\left(x^6 - \cdots\right) + \cdots \\
&= d_0 + \left(d_2 - \frac{d_0}{2!}\right)x^2 + \left(d_4 - \frac{d_2}{2!} + \frac{d_0}{4!}\right)x^4 \\
&\qquad + \left(d_6 - \frac{d_4}{2!} + \frac{d_2}{4!} - \frac{d_0}{6!}\right)x^6 + \cdots
\end{aligned} \tag{4}
$$

となることが分かります. よって, (4) 式の両辺の x^k, $(k \in \mathbb{N})$ の係数を比較することで,

$$
\begin{cases}
d_0 = 1 \\
d_2 - \frac{d_0}{2!} = 0 \\
d_4 - \frac{d_2}{2!} + \frac{d_0}{4!} = 0 \\
d_6 - \frac{d_4}{2!} + \frac{d_2}{4!} - \frac{d_0}{6!} = 0
\end{cases} \tag{5}
$$

となることが分かりますから, 後は, (5) 式の連立一次方程式を順番に解くことによって,

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 1 \\
d_2 &= \frac{d_0}{2!} = \frac{1}{2} \\
d_4 &= \frac{d_2}{2!} - \frac{d_0}{4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4!} = \frac{5}{24} \\
d_6 &= \frac{d_4}{2!} - \frac{d_2}{4!} + \frac{d_0}{6!} = \frac{1}{48}\left(5 - 1 + \frac{1}{15}\right) = \frac{61}{720}
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,

$$
\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots \tag{6}
$$

となることが分かります.

あるいは, $\frac{1}{1-y}$ の Taylor 展開を用いて, 次のように計算することもできます. いま,

$$
y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots
$$

として, $\cos x$ を,

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \\ &= 1-\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots\right) \\ &= 1-y\end{aligned}$$

というように表わしてみます. すると, $\frac{1}{\cos x}$ は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-y} \\ &= 1+y+y^2+y^3+\cdots \\ &= 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+x^4\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)^2 \\ &\quad +x^6\left(\frac{1}{2}-\cdots\right)^3-\cdots \\ &= 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right) \\ &\quad +x^6\left(\frac{1}{8}-\cdots\right)-\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)x^4+\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)x^6+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots\end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) (4) 式から,

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x\cdot\frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots\right) \\ &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{x^5}{3!}+\cdots\right)+\frac{5}{24}\left(x^5-\cdots\right)+\cdots \\ &= x+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\right)x^5+\cdots \\ &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) (1) と同様に,

$$y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

として, $\cos x$ を,

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 - \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots\right) \\
&= 1 - y
\end{aligned}$$

というように表わしてみます. すると, $\log(\cos x)$ は,

$$\begin{aligned}
\log(\cos x) &= \log(1-y) \\
&= -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \cdots \\
&= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{x^4}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \cdots\right)^2 \\
&\quad - \frac{x^6}{3}\left(\frac{1}{2} - \cdots\right)^3 - \cdots \\
&= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{x^4}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4!} + \cdots\right) \\
&\quad - \frac{x^6}{3}\left(\frac{1}{8} - \cdots\right) - \cdots \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 - \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{48} + \frac{1}{24}\right)x^6 + \cdots \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かります.

問 10. まず, $(1+x)^x$ は,

$$(1+x)^x = e^{x\log(1+x)}$$

というように表わせることに注意します. いま, $\log(1+x)$ は,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

というように Taylor 展開できることが分かりますから,

$$x\log(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots$$

と表わせることが分かります. したがって,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^x &= e^{x\log(1+x)} \\
&= 1 + \{x\log(1+x)\} + \frac{1}{2}\{x\log(1+x)\}^2 + \frac{1}{3!}\{x\log(1+x)\}^3 + \cdots \\
&= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots\right) + \frac{x^4}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right)^2 \\
&\qquad + \frac{x^6}{6}(1-\cdots)^3 + \cdots \\
&= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots\right) + \frac{x^4}{2}\left(1 - x + \frac{11}{12}x^2 + \cdots\right) \\
&\qquad + \frac{x^6}{6}(1-\cdots) + \cdots \\
&= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)x^5 + \left(\frac{1}{5} + \frac{11}{24} + \frac{1}{6}\right)x^6 + \cdots \\
&= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{33}{40}x^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かります.