

数学IB 基礎演習問題 (その1) Taylor 展開の計算法

● 色々な関数の Taylor 展開が計算できるようになるためには、何度でも微分できる関数 $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」としたら、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

という「姿」に「化ける」ことがもっともらしいということを自分なりに納得して、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が具体的に求まる関数 $f(x)$ を「多項式の姿」に「化かせる」ようになることが何よりも大切です。

問 1. 次の関数 $f(x)$ に対して、 n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を具体的に求めて、 $f^{(n)}(0)$ を計算することにより、関数 $f(x)$ の ($x=0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= e^x, & (2) f(x) &= \cos x, & (3) f(x) &= \sin x, \\ (4) f(x) &= \frac{1}{1-x}, & (5) f(x) &= \sqrt{1+x}, & (6) f(x) &= (1+x)^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

問 2.

(1) 問 1 で求めた $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ の「多項式の姿」について、

$$\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x \end{cases}$$

という関係式が成り立っていることを確かめてみよ。ただし、変数 x に関する微分を $(\cdot)'$ と表わした。

(2) 問 1 で求めた $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の「多項式の姿」を、

$$\frac{1}{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (1)$$

とすると、(1) 式の両辺に $(1-x)$ を掛け算して、

$$(1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = 1$$

となることを確かめよ。

(3) 問 1 で求めた $f(x) = (1+x)^\alpha$ の Taylor 展開を、特に、 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ として書き下してみよ。

- 関数 $f(x)$ の Taylor 展開を,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (2)$$

とするとき、(2) 式の両辺を微分したり、積分したりすることで、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ や原始関数 $F(x)$ の Taylor 展開を求めることができる。

問 3.

- (1) 関数 $\frac{1}{1-x}$ の Taylor 展開を利用して、 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ。
- (2) (1) の結果を利用して、 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ。
- (3) 関数 $\frac{1}{1+x}$ の Taylor 展開を利用して、 $f(x) = \log(1+x)$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ。

• 与えられた関数 $f(x)$ に対して、 n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を具体的に求めることは、一般には、とても困難ですから、 $f^{(n)}(0)$ を直接計算して、関数 $f(x)$ の Taylor 展開を求めることは期待できなくなります。このような場合には、**Taylor 展開が計算できる基本的な関数の組み合わせになっている関数の Taylor 展開が、それら基本的な関数の Taylor 展開からどのような形で求まるのか**という「計算規則」を理解することが大切になります。

[Taylor 展開の計算規則 (その 1)]

いま、 $g(x), h(x)$ の Taylor 展開を、それぞれ、

$$\begin{aligned} g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \\ h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots \end{aligned}$$

と表わすことにします。¹ このとき、

$$g(x) + h(x), 2g(x), g(x)h(x)$$

などの関数の Taylor 展開は、次のようにして計算することができます。

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots) \\ &= (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots \\ 2g(x) &= 2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \end{aligned}$$

¹ ここで、 $b_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました。

$$\begin{aligned}
&= (2b_0) + (2b_1)x + (2b_2)x^2 + \cdots \\
g(x)h(x) &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots) \\
&= (b_0c_0) + (b_0c_1 + b_1c_0)x + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)x^2 + \cdots \quad (3)
\end{aligned}$$

また, 関数 $\frac{1}{h(x)}$ の Taylor 展開は, 次のようにして求めることができます. いま, 関数 $\frac{1}{h(x)}$ の Taylor 展開を,

$$\frac{1}{h(x)} = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots \quad (4)$$

と表わすことにします. このとき, (4) 式を,

$$\begin{aligned}
1 &= h(x)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots) \\
&= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots) \\
&= (c_0d_0) + (c_0d_1 + c_1d_0)x + (c_0d_2 + c_1d_1 + c_2d_0)x^2 + \cdots \quad (5)
\end{aligned}$$

というように書き直して, (5) 式の両辺の x^n , ($n \in \mathbb{N}$) の係数を順番に比較することで, $c_0, c_1, c_2, \dots$ から $d_0, d_1, d_2, \dots$ を順番に求めることができます. さらに, (3) 式, (5) 式を合わせると, 関数 $\frac{g(x)}{h(x)}$ の Taylor 展開を,

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{h(x)} &= g(x) \cdot \frac{1}{h(x)} \\
&= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots) \\
&= (b_0d_0) + (b_0d_1 + b_1d_0)x + (b_0d_2 + b_1d_1 + b_2d_0)x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

というように計算することができます.

[Taylor 展開の計算規則 (その 2)]

いま, $h(x)$ を $h(0) = 0$ となる関数として, 関数 $g(y), h(x)$ の Taylor 展開を, それぞれ,

$$\begin{cases} g(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \cdots \\ h(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \end{cases}$$

と表わすことにします.² このとき, $g(y)$ と $h(x)$ の合成関数 $f(x) = g(h(x))$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(h(x)) \\
&= b_0 + b_1h(x) + b_2h(x)^2 + \cdots \\
&= b_0 + b_1(c_1x + c_2x^2 + \cdots) + b_2(c_1x + c_2x^2 + \cdots)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

²ここで, $b_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました. いま, $h(0) = 0$ と仮定しているので, $c_0 = 0$ となっていることに注意して下さい.

$$= b_0 + b_1 c_1 x + (b_1 c_2 + b_2 c_1^2) x^2 + \cdots$$

というように計算することができます.

問 4. 双曲線関数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

問 5. 次の関数 $f(x)$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \frac{1}{2+x}, & (2) f(x) &= \frac{1}{(1+x)(2+x)}, \\ (3) f(x) &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, & (4) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}, \\ (5) f(x) &= \log(x^2 + 3x + 2), \end{aligned}$$

問 6.

(1) $\tan x$ の逆関数 $\tan^{-1} x$ に対して,

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

となることを示せ.

(2) $\frac{1}{1+y}$ の ($y = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を利用して, $\frac{1}{1+x^2}$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

(3) (1) と (2) の結果を用いて, $\tan^{-1} x$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

問 7.

(1) $\sin x$ の逆関数 $\sin^{-1} x$ に対して,

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となることを示せ.

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-y}}$ の ($y = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

(4) (1) と (3) の結果を用いて, $\sin^{-1} x$ の ($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開を求めよ.

問 8. $e^x\sqrt{1-x}$ の ($x=0$ のまわりでの) Taylor 展開を x^3 の項まで求めよ.

問 9. 次の関数 $f(x)$ の ($x=0$ のまわりでの) Taylor 展開を x^6 の項まで求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \frac{1}{\cos x}, & (2) f(x) = \tan x, \\ (3) f(x) = \log(\cos x), & \end{array}$$

問 10. $(1+x)^x$ の ($x=0$ のまわりでの) Taylor 展開を x^6 の項まで求めよ.