

数学 IB 演習問題略解

問 1. $\alpha = \sin^{-1} x$, $\beta = \sin^{-1} y$ とすると, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - y^2}$$

と表わせることが分かります. このとき, $S = \alpha + \beta$ より,

$$\begin{aligned} \sin S &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

となることが分かりますが, $-\frac{\pi}{2} \leq S \leq \frac{\pi}{2}$ なので,

$$S = \sin^{-1} \left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} \right)$$

となることが分かります.¹

問 2. 与えられた関数を微分してみると, 次のようになることが分かります.

$$(1) -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})^3}} \qquad (2) \frac{-2a^2(a^2 + \sqrt{a^4 - x^4})}{x^3\sqrt{a^4 - x^4}}$$

$$(3) ab \cdot (\sin ax)^{b-1} (\cos bx)^{a-1} \cdot \cos(a + b)x \qquad (4) \frac{-2 \cos x}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 x}}$$

$$(5) -\frac{1}{\sin x} \qquad (6) \frac{|\cos x|}{2 \cos x} = \pm \frac{1}{2}$$

細かいことですが, (6) では, $\sqrt{1 - \sin^2 x} \geq 0$ となるので,

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

となることに注意して下さい.

問 3. 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n(x) = \cos(n! \pi x)$$

¹一般に, 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 三角関数の逆関数 $\sin^{-1} x$ の値 $\theta = \sin^{-1} x$ は, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, かつ, $\sin \theta = x$ となるような実数として定義されることに注意して下さい.

と表わすことにします。このとき、

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (a_n(x))^{2m} \end{aligned}$$

とすると、

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x)$$

と表わせることに注意します。そこで、実数 $x \in \mathbb{R}$ が、勝手にひとつ与えられたとして、 $a_n(x)$, $b_n(x)$, $f(x)$ がどのような値になるのかを、順番に考えてみることにします。

いま、

$$\begin{aligned} |a_n(x)| = 1 &\iff |\cos(n! \pi x)| = 1 \\ &\iff n! \pi x = m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = \frac{m}{n!}, \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\iff n! \cdot x \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

となることに注意します。そこで、まず、 $x \notin \mathbb{Q}$ であると仮定してみます。このとき、(1) 式から、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n(x)| = |\cos(n! \pi x)| < 1$$

となることが分かりますから、

$$b_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_n(x))^{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} |a_n(x)|^{2m} = 0$$

となることが分かります。² したがって、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $b_n(x) = 0$ となることが分かりますから、

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 0$$

となることが分かります。

次に、 $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, ($p, q \in \mathbb{Z}$) が有理数であると仮定してみます。このとき、 $n \geq |q|$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n! \cdot x = \frac{n! \cdot p}{q} \in \mathbb{Z}$$

となることが分かりますから、(2) 式と合わせて、

$$|a_n(x)| = |\cos(n! \pi x)| = 1$$

となることが分かります。よって、 $n \geq |q|$ のとき、

$$b_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_n(x))^{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} |a_n(x)|^{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1^{2m} = 1$$

²ここで、 $|a_n(x)|$ は、 $|a_n(x)| < 1$ となる m によらない「定数」であることに注意して下さい。

となることが分かりますから,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 1$$

となることが分かります.

以上より, 関数 $f(x)$ の値は, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ として,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

となることが分かります.

問 4. 数学的帰納法を用いて証明することができます.

問 5. (1) 1, (2) $\frac{1}{e}$.

これらの極限值は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) いま, $\sqrt[n]{n} \geq 1$ となることに注意して,³

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \tag{1}$$

という式により, a_n を定めてみます. このとき, (1) 式の両辺を n 乗してみると,

$$\begin{aligned} n &= (1 + a_n)^n \\ &= 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n \end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かりますが, $a_n \geq 0$ であることに注意すると, (2) 式の右辺に現われる各項は正になることが分かりますから, $n \geq 2$ のとき, (2) 式から,

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \tag{3}$$

となることが分かります. よって, (3) 式から,

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

となることが分かるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

となることが分かります. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1$$

となることが分かります.

³例えば, $n \geq 1$ という式の両辺を $\frac{1}{n}$ 乗してみると, $\sqrt[n]{n} \geq 1$ となることが分かります.

他には、例えば、次のような議論をすることもできます。いま、 $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(x) = x^\alpha - \alpha \log x$$

という関数の増減表を調べてみると、 $x \geq 1$ のとき、

$$\alpha \log x \leq x^\alpha$$

となることが分かります。⁴ そこで、例えば、 $\alpha = \frac{1}{2}$ としてみると、

$$0 < \frac{1}{n} \log n \leq \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

と評価できることが分かりますから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log n = 0 \quad (4)$$

となることが分かります。よって、(4) 式から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$$

となることが分かります。

(2) いま、 $\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k$ と表わせることに注意して、 $\sum_{k=1}^n \log k$ と $\log x$ のグラフを比べてみると、

$$\int_1^n \log x \, dx \leq \sum_{k=1}^n \log k \leq \int_1^{n+1} \log x \, dx$$

となることが分かります。そこで、両辺の積分を、

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x \, dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= n \log n - n + 1 \end{aligned}$$

などと計算してみると、⁵

$$n \log n - n \leq \log n! - 1 \leq (n+1) \log(n+1) - (n+1)$$

となることが分かります。ここで、

$$\begin{aligned} n \log n - n &= \log \left(\frac{n}{e} \right)^n \\ \log n! - 1 &= \log \frac{n!}{e} \end{aligned}$$

となることなどに注意すれば、

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \leq \frac{n!}{e} \leq \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \quad (5)$$

⁴皆さん、確かめてみて下さい。

⁵ $\log x$ の原始関数が $x \log x - x$ となることが思い浮かばない場合には、 $\log x = 1 \cdot \log x = \frac{d}{dx} \{x\} \cdot \log x$ と考えて、部分積分をすることで求めることができます。

となることが分かります. よって, (5) 式から,

$$\frac{n}{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{e^{\frac{1}{n}}} \leq \left(\frac{n+1}{e} \right)^{1+\frac{1}{n}} = \frac{n^{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}{e^{1+\frac{1}{n}}}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}{e} \quad (6)$$

となることが分かります. ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} = \frac{1}{e} \quad (7)$$

となることと, (1) の結果から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}{e} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}{e} = \frac{1 \cdot 1}{e} = \frac{1}{e} \quad (8)$$

となることが分かりますから, (6) 式, (7) 式, (8) 式から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

となることが分かります.

問 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}} = 1$

この極限值は、例えば、次のようにして求めることができます。

いま、分子の値を積分の値と比べてみると、

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{2x-1} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{2x-1}$$

となることが分かります。よって、両辺の積分の値を計算してみると、分子の値は、

$$\frac{1}{2} \log(2n+1) \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \leq 1 + \frac{1}{2} \log(2n-1) \quad (1)$$

というように評価できることが分かります。全く同様に、分母の値を積分の値と比べてみると、

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{2x} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \int_1^n \frac{dx}{2x}$$

となることが分かります。よって、分母の値は、

$$\frac{1}{2} \log(n+1) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n \quad (2)$$

というように評価できることが分かります。したがって、(2) 式から、

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} \log(n+1)}$$

となることが分かりますから、(1) 式と合わせて、

$$\frac{\frac{1}{2} \log(2n+1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n} \leq \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} \log(2n-1)}{\frac{1}{2} \log(n+1)} \quad (3)$$

となることが分かります。ここで、

$$\frac{\frac{1}{2} \log(2n+1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n} = \frac{\log(2n+1)}{1 + \log n} = \frac{\log n + \log(2 + \frac{1}{n})}{1 + \log n} = \frac{1 + \frac{1}{\log n} \cdot \log(2 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{\log n} + 1}$$

と書き直してみると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \log(2n+1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n} = 1 \quad (4)$$

となることが分かります。全く同様に、

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{2} \log(2n-1)}{\frac{1}{2} \log(n+1)} &= \frac{2 + \log(2n-1)}{\log(n+1)} = \frac{2 + \log n + \log(2 - \frac{1}{n})}{\log n + \log(1 + \frac{1}{n})} \\ &= \frac{\frac{2}{\log n} + 1 + \frac{1}{\log n} \cdot \log(2 - \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{\log n} \cdot \log(1 + \frac{1}{n})} \end{aligned}$$

と書き直してみると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} \log(2n-1)}{\frac{1}{2} \log(n+1)} = 1 \quad (5)$$

となることが分かります. よって, (3) 式, (4) 式, (5) 式から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}} = 1$$

となることが分かります.

問 7. $f(x) = \sqrt{1+x}$ として, $f(x)$ の微分を順番に求めてみると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-3}{2}\right) (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

などとなることが分かりますから,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & (k=0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}, & (k=1 \text{ のとき}) \\ \frac{(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k}, & (k \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります. したがって, $f(x) = \sqrt{1+x}$ の Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-3)!!}{2^k \cdot k!} x^k \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-3)!!}{(2k)!!} x^k \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} x^4 + \cdots \end{aligned}$$

となることが分かります. ただし, 一般に, 正の自然数 $2k+1$, $2k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} (2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1, \\ (2k)!! = 2k \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2 \end{cases}$$

と表わしました.

問 8. (1) 1, (2) $-\frac{3}{4}$, (3) $\frac{1}{2}$, (4) 1.

これらの値は, 分子を有理化することによって, 例えば, 次のようにして求めることができます.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \longrightarrow 1, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \\
 (2) \quad \sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x &= \frac{(4x^2 - 3x + 1) - 4x^2}{(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x)} \\
 &= \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \longrightarrow -\frac{3}{4}, \quad (x \rightarrow +\infty \text{ のとき}) \\
 (3) \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \\
 (4) \quad \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} &= \frac{(1+x^2) - 1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x}} \longrightarrow 1, \quad (x \rightarrow +\infty \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

また, 分子の有理化ということに気が付かなくとも,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

という $\sqrt{1+x}$ の Taylor 展開を用いて, 直接, 次のように計算することもできます.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots \right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots \right) \right\} \\
 &= 1 + \frac{x^2}{8} + \dots \longrightarrow 1, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \\
 (2) \quad \sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x &= 2x \cdot \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4x} \right)} - 1 \right\} \\
 &= 2x \cdot \left\{ \sqrt{1 - y} - 1 \right\} \quad \left(\text{ただし, } y = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4x} \right) \text{ とした} \right) \\
 &= 2x \cdot \left\{ \left(1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} - \dots \right) - 1 \right\} \\
 &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4x} \right) - \frac{1}{4x} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4x} \right)^2 - \dots \longrightarrow -\frac{3}{4}, \quad (x \rightarrow +\infty \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots \right) - 1 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \cdots \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \\
 (4) \quad \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x} \longrightarrow 1, \quad (x \rightarrow +\infty \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

問 9. $e^x \sqrt{1-x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13}{48}x^3 + \cdots$

いま, $e^x, \sqrt{1-x}$ は, それぞれ,

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
 \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots
 \end{aligned}$$

というように Taylor 展開されることが分かりますから, $e^x \sqrt{1-x}$ は,

$$\begin{aligned}
 e^x \sqrt{1-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \right) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots \right) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13}{48}x^3 + \cdots
 \end{aligned}$$

というように Taylor 展開されることが分かります.

問 10. いま, $\frac{1}{1+bx}$ は,

$$\frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + b^4x^4 - \cdots$$

というように Taylor 展開されることが注意すると, $\frac{1+ax}{1+bx}$ は,

$$\begin{aligned}
 \frac{1+ax}{1+bx} &= (1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+b^4x^4-\cdots) \\
 &= (1-bx+b^2x^2-b^3x^3+b^4x^4-\cdots) \\
 &\quad + (ax-abx^2+ab^2x^3-ab^3x^4-\cdots) \\
 &= 1 + (a-b)x - (a-b)bx^2 + (a-b)b^2x^3 - (a-b)b^3x^4 + \cdots
 \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned}
 e^x - \frac{1+ax}{1+bx} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \\
 &\quad - \{ 1 + (a-b)x - (a-b)bx^2 + (a-b)b^2x^3 - \cdots \} \\
 &= \{ 1 - (a-b) \} x + \left\{ \frac{1}{2} + (a-b)b \right\} x^2 + \left\{ \frac{1}{3!} - (a-b)b^2 \right\} x^3 + \cdots
 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} \left(e^x - \frac{1+ax}{1+bx} \right) \\ = \{1 - (a-b)\} \frac{1}{x^2} + \left\{ \frac{1}{2} + (a-b)b \right\} \frac{1}{x} + \left\{ \frac{1}{6} - (a-b)b^2 \right\} + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

となることが分かります. よって, (1) 式から, 求める条件は,

$$\begin{cases} 1 - (a-b) = 0 \\ \frac{1}{2} + (a-b)b = 0 \end{cases} \quad (2)$$

となることが分かります. したがって, (2) 式から, 求める条件は,

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

となることが分かります. また, このとき, 求める極限值は, 再び, (1) 式から,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(e^x - \frac{1+ax}{1+bx} \right) = \frac{1}{6} - (a-b)b^2 = -\frac{1}{12}$$

となることが分かります.

問 11. いま, $f(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$ として, 関数 $f(y)$ の Taylor 展開を求めると, 問 7 と同様に
して,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} y^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^n \quad (1)$$

となることが分かります.⁶ よって, (1) 式に, $y = x^2$ を代入してみると,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (2)$$

となることが分かります. そこで, (2) 式の両辺を積分してみると, $C \in \mathbb{R}$ を積分定数として,

$$\sin^{-1} x = C + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (3)$$

となることが分かります. さらに, $\sin^{-1} 0 = 0$ であることに注意して, (3) 式の両辺で $x = 0$ としてみると, $C = 0$ となることが分かります. よって, (3) 式から,

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4)$$

となることが分かります. また, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ となることに注意して, (4) 式において, $x = \frac{1}{2}$ としてみると,

$$\frac{\pi}{6} = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1}$$

⁶ 皆さん, 確かめてみて下さい.

となることが分かります.

問 12. (1) $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \dots$

(2) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$

これらの展開は, 例えば, 次のようにして求めることができます. いま, $\cos x$ を,

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right) \\ &= 1 - y \quad \left(\text{ただし, } y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ とした.} \right)\end{aligned}$$

というように表わしてみます. すると, $\log(\cos x)$ は,

$$\begin{aligned}\log(\cos x) &= \log(1 - y) \\ &= -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \dots \\ &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right) - \frac{x^4}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right)^2 - \frac{x^6}{3} \left(\frac{1}{2} - \dots \right)^3 - \dots \\ &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right) - \frac{x^4}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right) - \frac{x^6}{3} \left(\frac{1}{8} - \dots \right) - \dots \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 4} \right) x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2 \cdot 4!} - \frac{1}{3 \cdot 8} \right) x^6 + \dots \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \dots\end{aligned}$$

と表わせることが分かります. 全く同様に, $\tan x$ は,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\sin x}{1 - y} \\ &= \sin x (1 + y + y^2 + \dots) \\ &= \sin x + \sin x \cdot y + \sin x \cdot y^2 + \dots \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + x^3 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right) \\ &\quad + x^5 (1 - \dots) \cdot \left(\frac{1}{2} - \dots \right)^2 + \dots \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + x^3 \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{4!} \right) x^2 + \dots \right\} \\ &\quad + \left(\frac{x^5}{4} - \dots \right) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\right)x^5 + \cdots \\
 &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots
 \end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

問 13. $(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{33}{40}x^6 + \cdots$

まず, $(1+x)^x$ は,

$$(1+x)^x = e^{x \log(1+x)}$$

というように表わせることに注意します. いま, $\log(1+x)$ は,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

というように Taylor 展開できることが分かりますから,

$$x \log(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots$$

と表わせることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned}
 (1+x)^x &= e^{x \log(1+x)} \\
 &= 1 + \{x \log(1+x)\} + \frac{1}{2} \{x \log(1+x)\}^2 + \frac{1}{3!} \{x \log(1+x)\}^3 + \cdots \\
 &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots\right) + \frac{x^4}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right)^2 \\
 &\quad + \frac{x^6}{6} (1 - \cdots)^3 + \cdots \\
 &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \cdots\right) + \frac{x^4}{2} \left(1 - x + \frac{11}{12}x^2 + \cdots\right) \\
 &\quad + \frac{x^6}{6} (1 - \cdots) + \cdots \\
 &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)x^5 + \left(\frac{1}{5} + \frac{11}{24} + \frac{1}{6}\right)x^6 + \cdots \\
 &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{33}{40}x^6 + \cdots
 \end{aligned}$$

となることが分かります.

問 14. (1) $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, (2) $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

これらの極限值は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) いま, それぞれの $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, a_i^x は,

$$a_i^x = e^{x \log a_i} = 1 + x \log a_i + \frac{x^2}{2} (\log a_i)^2 + \cdots$$

というように表わせることが分かりますから,

$$y = \frac{x}{n} \sum_{i=1}^n \log a_i + \frac{x^2}{2n} \sum_{i=1}^n (\log a_i)^2 + \cdots$$

として,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x = 1 + y,$$

というように表わせることが分かります. ここで,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x \right)^{\frac{1}{x}} = (1 + y)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1+y)}$$

と表わしてみると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \log(1 + y) &= \frac{1}{x} \left(y - \frac{y^2}{2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(\frac{x}{n} \sum_{i=1}^n \log a_i + \frac{x^2}{2n} \sum_{i=1}^n (\log a_i)^2 + \cdots \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \sum_{i=1}^n \log a_i + \cdots \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log a_i + \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\log a_i)^2 - \frac{1}{2n^2} \left(\sum_{i=1}^n \log a_i \right)^2 \right\} \cdot x + \cdots \\ &= \frac{1}{n} \log(a_1 a_2 \cdots a_n) + \cdots \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x \right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{x} \log(1+y)} \\ &= e^{\frac{1}{n} \log(a_1 a_2 \cdots a_n) + \cdots} \longrightarrow e^{\frac{1}{n} \log(a_1 a_2 \cdots a_n)} \\ &= (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) 必要なら番号を付け替えることで, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ と仮定することができます. このとき,

$$\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = a_1 \cdot \left\{ \frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^x + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1} \right)^x}{n} \right\}^{1/x} \quad (1)$$

と表わして考えてみることにします. すると, 仮定から, $0 < \frac{a_i}{a_1} \leq 1$ なので, $x > 0$ のとき,

$$0 < \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^x \leq 1$$

となることが分かりますから,

$$\frac{1}{n} < \frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^x}{n} \leq \frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n} = 1 \quad (2)$$

となることが分かります. そこで, (2) 式の各辺を $\frac{1}{x}$ 乗してから $x \rightarrow \infty$ としてみると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/x} = \left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1$$

となることが分かりますから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^x}{n} \right\}^{1/x} = 1$$

となることが分かります. したがって, (1) 式と合わせて,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = a_1$$

となることが分かりますが, いま, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ と仮定していたので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

と表わせることが分かります.

問 15. (1) $-\frac{e}{2}$, (2) $\frac{5}{24}$, (3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, (4) $\frac{1}{6}$

これらの極限值は, 例えば, Taylor 展開を利用して, 次のようにして求めることができます.

(1) まず, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1+x)}$ と表わせることに注意します. いま, $\log(1+x)$ は,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

というように Taylor 展開されることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \log(1+x) &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots \right) \\ &= 1 - y \quad \left(\text{ただし, } y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots \text{ とした.} \right) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. よって,

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{1}{x}} - e &= e^{1-y} - e \\
 &= e \cdot (e^{-y} - 1) \\
 &= e \cdot \left\{ \left(1 - y + \frac{y^2}{2!} - \cdots \right) - 1 \right\} \\
 &= e \cdot \left\{ - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots \right)^2 - \cdots \right\} \\
 &= e \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \cdots \right)
 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = e \cdot \left(-\frac{1}{2} + \cdots \right) \longrightarrow -\frac{e}{2}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

となることが分かります.

(2) いま, $\frac{x}{e^x-1}$ は,

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{e^x-1} &= \frac{x}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) - 1} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots} \\
 &= \frac{1}{1+y} \quad \left(\text{ただし, } y = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \text{ とした.} \right) \\
 &= 1 - y + y^2 - \cdots \\
 &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \right)^2 - \cdots \\
 &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \cdots
 \end{aligned}$$

というように Taylor 展開できることが分かります. 一方, $\sqrt{1-x}$ は,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots$$

というように Taylor 展開できることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{e^x-1} - \sqrt{1-x} \right) &= \frac{1}{x^2} \left\{ \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \cdots \right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots \right) \right\} \\
 &= \frac{5}{24} + \cdots \longrightarrow \frac{5}{24}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) まず, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos x)}$ と表わせることに注意します. いま, $\cos x$ を,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$= 1 - y \quad \left(\text{ただし, } y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ とした.} \right)$$

と表わしてみると,

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log(1 - y) \\ &= -y - \frac{y^2}{2} - \cdots \\ &= -\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 - \cdots \\ &= -\frac{x^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. よって,

$$\frac{1}{x^2} \log(\cos x) = -\frac{1}{2} + \cdots$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos x)} \\ &= e^{-\frac{1}{2} + \cdots} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) まず,

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} = \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x(e^x - 1)} \quad (3)$$

と表わせることに注意します. このとき, (3) 式の分子は,

$$\begin{aligned} &x(e^x + 1) - 2(e^x - 1) \\ &= x \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) + 1 \right\} - 2 \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) - 1 \right\} \\ &= \left(2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \cdots \right) - \left(2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots \right) \\ &= \frac{x^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. 一方, (3) 式の分母は,

$$\begin{aligned} x(e^x - 1) &= x \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) - 1 \right\} \\ &= x^2 + \frac{x^3}{2} + \cdots \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから,

$$\frac{1}{x} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) = \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2(e^x - 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{x^3}{6} + \dots}{x^3 + \dots} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} + \dots}{1 + \dots} \longrightarrow \frac{1}{6}, \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

となることが分かります.

問 16. $a_0 = \log 2$, $a_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}$, $a_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{m} - \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$

これらの係数は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

まず, $x^3 + 2x^2 + x + 2$ は,

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1) \quad (1)$$

というように因数分解できることに注意します. すると, (1) 式から,

$$\begin{aligned}
 \log(x^3 + 2x^2 + x + 2) &= \log(x+2) + \log(x^2+1) \\
 &= \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \log(1+x^2)
 \end{aligned} \quad (2)$$

と表わせることが分かります. そこで, $\log(1+y)$ が,

$$\begin{aligned}
 \log(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{n}
 \end{aligned} \quad (3)$$

というように Taylor 展開されることに注意して, (3) 式において, $y = \frac{x}{2}$, あるいは, $y = x^2$ などとしてみると, (2) 式から,

$$\begin{aligned}
 &\log(x^3 + 2x^2 + x + 2) \\
 &= \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \log(1+x^2) \\
 &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{2m}}{m} \\
 &= \log 2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{m-1}}{m} - \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \right\} x^{2m}
 \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります.

問 17. $\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

この結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とすると,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

となることに注意します. また, $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ という関数の Taylor 展開は,

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot y^k \quad (2)$$

という式によって与えられることに注意します. そこで, いま, (2) 式において, $y = x^2$ としてみると, (1) 式, (2) 式から,

$$f'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot x^{2k} \quad (3)$$

となることが分かります. さらに, (3) 式の両辺を積分してみると, C を積分定数として,

$$f(x) = C + x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (4)$$

となることが分かりますが, $x = 0$ として, (4) 式の両辺を比べてみると, $C = 0$ となることが分かります. 以上から, 関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

というように Taylor 展開できることが分かります.

問 18. いま, $e = \frac{q}{p}$, $p, q \in \mathbb{N}$ と表わされたと仮定してみます. このとき, Taylor の定理から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{q}{p} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} \quad (1)$$

と表わせるような実数 $\theta_n \in \mathbb{R}$ が, $0 < \theta_n < 1$ という範囲に存在することが分かります. ここで, (1) 式の両辺に, $n!$ を掛けて, 適当に移項してみると,

$$\frac{e^{\theta_n}}{n+1} = \frac{q \cdot n!}{p} - n! \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right\} \quad (2)$$

となることが分かりますが, (2) 式の右辺の表示から, $n \geq p$ のとき, $\frac{e^{\theta_n}}{n+1}$ は整数になることが分かります. 一方, $0 < \theta_n < 1$ より,

$$1 < e^{\theta_n} < e$$

となることが分かりますから, $\frac{e}{n+1} < \frac{1}{2}$ のとき, すなわち, $n > 2e - 1$ のとき,

$$0 < \frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{e}{n+1} < \frac{1}{2} < 1$$

となることが分かります. 以上の議論から, $n \geq p$, かつ, $n > 2e - 1$ のとき, $\frac{e^{\theta_n}}{n+1}$ は,

$$0 < \frac{e^{\theta_n}}{n+1} < 1$$

となる整数であることが分かりましたが, このような整数は存在しませんから, e が有理数であると仮定したことから矛盾が導かれました. よって, e は無理数であることが分かります.

問 19. $\cos 1 = 0.540 \dots$

この近似値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, $f(x) = \cos x$ として, 関数 $f(x)$ に Taylor の定理を適用すると, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} + \frac{f^{(2m+1)}(\theta)}{(2m+1)!} \quad (1)$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が $0 < \theta < 1$ という範囲に存在することが分かります. ここで,

$$R_m = \frac{f^{(2m+1)}(\theta)}{(2m+1)!}$$

と表わすことにすると, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ と勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|f^{(2m+1)}(x)| \leq 1$$

となることが分かりますから, 剰余項 R_m の大きさが,

$$|R_m| \leq \frac{1}{(2m+1)!} \quad (2)$$

というように評価できることが分かります. そこで, (1) 式において, 例えば, $m = 4$ と取ってみると,

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}$$

として, (2) 式から,

$$|\cos 1 - A| = |R_4| \leq \frac{1}{9!} \leq \frac{1}{10^5} = 0.00001$$

となることが分かりますから,

$$A - 0.00001 \leq \cos 1 \leq A + 0.00001 \quad (3)$$

となることが分かります. さらに, 実際に A を計算してみると,

$$A = 0.54030 \dots$$

となることが分かりますから, (3) 式と合わせて,

$$0.54029 \leq \cos 1 \leq 0.54031$$

となることが分かります. したがって, $\cos 1 = 0.540 \dots$ となることが分かります.

問 20. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$

これらの結果は、例えば、次のようにして分かります。

いま、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

とすると、

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$$

となることが分かります。したがって、

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

とすると、 $g(z)$ は、

$$g(z) = z f'(z) \quad (1)$$

と表わせることが分かります。全く同様に考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = z g'(z) \quad (2)$$

と表わせることが分かります。一方、

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (3)$$

と表わせますから、(1) 式、(2) 式、(3) 式から、 $g(z)$ 、 $g'(z)$ などを順番に計算してみると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \quad (4)$$

となることが分かります。また、(4) 式において、 $z = \frac{1}{2}$ としてみると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$$

となることが分かります。

問 21. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} z^n = z(z^2 + 3z + 1)e^z$

これらの結果は、例えば、次のようにして分かります。

(1) いま、指数関数 e^z が、

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1)$$

というように Taylor 展開できることに注目すると,

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \quad (2)$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

となることが分かります.

(2) いま, $f(z) = e^z$ とすると, (1) 式から,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!}$$

となることが分かりますから,

$$zf'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{n!} \quad (3)$$

となることが分かります. 全く同様に, (3) 式から,

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^{n-1}}{n!}$$

となることが分かりますから,

$$z(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!} \quad (4)$$

となることが分かります. さらに, (4) 式から,

$$(z(zf'(z))')' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^{n-1}}{n!}$$

となることが分かりますから,

$$z(z(zf'(z))')' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{n!} \quad (5)$$

となることが分かります. そこで, $f(z) = e^z$ であることに注意して, $z(z(zf'(z))')'$ を具体的に求めてみると, (5) 式から,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} z^n = z(z^2 + 3z + 1)e^z$$

となることが分かります.

問 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = 0.564 \dots$

この近似値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

と定めると,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{(N-1)^2}} + R_N \quad (1)$$

このように表わすことができます. ここで, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(N+k)^2 \geq N^2 + k^2 \geq N^2 + k$$

となることに注意して,

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{1}{2^{N^2}} + \frac{1}{2^{(N+1)^2}} + \frac{1}{2^{(N+2)^2}} + \dots \\ &\leq \frac{1}{2^{N^2}} + \frac{1}{2^{N^2+1}} + \frac{1}{2^{N^2+2}} + \dots \\ &= \frac{1}{2^{N^2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2^{N^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{2^{N^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

このように R_N の大きさを評価してみると, 例えば, (2) 式において, $N = 4$ として,

$$R_4 \leq \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{(2^7)^2 \cdot 2} = \frac{1}{(128)^2 \cdot 2} < \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

となることが分かります. したがって, (1) 式, (2) 式から,

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9}$$

として,

$$A - 0.0001 \leq S \leq A + 0.0001 \quad (3)$$

となることが分かります. そこで, 実際に, A を計算してみると, $A = 0.5644 \dots$ となることが分かりますから, (3) 式から,

$$0.5643 \leq S \leq 0.5645$$

となることが分かります. よって, $S = 0.564 \dots$ となることが分かります.

問 23. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} < +\infty \iff p > 1$

このことは、例えば、次のようにして分かります。

いま、 $n \in \mathbb{N}$ が、 $n \geq 3$ であるとする、

$$\log n \geq \log 3 \geq \log e = 1$$

となることに注意します。そこで、まず、 $p \leq 0$ のときを考えてみます。すると、このとき、 $n \geq 3$ であるとする、

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n \cdot (\log n)^p}$$

となることが分かりますから、 $N \geq 3$ となる勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n} \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} \quad (1)$$

となることが分かります。よって、

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} = +\infty$$

となることに注意すると、(1) 式から、

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} = +\infty$$

となることが分かります。したがって、 $p \leq 0$ のとき、与えられた級数は発散することが分かります。

次に、 $p > 0$ のときを考えてみます、このとき、部分和を積分の値と比べてみると、

$$\int_3^{N+1} \frac{dx}{x \cdot (\log x)^p} \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} \leq \int_2^N \frac{dx}{x \cdot (\log x)^p} \quad (2)$$

となることが分かります。ここで、

$$\frac{dx}{x \cdot (\log x)^p} = \frac{d(\log x)}{(\log x)^p}$$

となることに注意して、例えば、 $y = \log x$ などと変数変換して、積分を計算してみると、(2) 式から、 $p \neq 1$ のとき、

$$\frac{1}{1-p} \cdot \{(\log(N+1))^{1-p} - (\log 3)^{1-p}\} \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} \quad (3)$$

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} \leq \frac{1}{p-1} \cdot \left\{ \frac{1}{(\log 2)^{p-1}} - \frac{1}{(\log N)^{p-1}} \right\} \quad (4)$$

となることが分かります. このとき, $0 < p < 1$ とすると,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \{(\log(N+1))^{1-p} - (\log 3)^{1-p}\} = +\infty$$

となることが分かりますから, (3) 式から,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} = +\infty$$

となることが分かります. よって, $0 < p < 1$ のとき, 与えられた級数は発散することが分かります. また, $p > 1$ のときには, (4) 式から,

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\log n)^p} \leq \frac{1}{(p-1) \cdot (\log 2)^{p-1}}$$

となることが分かりますから, 与えられた級数の部分和は, $\frac{1}{(p-1) \cdot (\log 2)^{p-1}}$ という値によって「頭打ち」になっていることが分かります. よって, $p > 1$ のとき, 与えられた級数は収束することが分かります. 最後に, $p = 1$ のときには, (2) 式の積分を計算してみると,

$$\log(\log(N+1)) - \log(\log 3) \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot \log n}$$

となることが分かりますが,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{\log(\log(N+1)) - \log(\log 3)\} = +\infty$$

となることが分かりますから,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot \log n} = +\infty$$

となることが分かります. よって, $p = 1$ のとき, 与えられた級数は発散することが分かります.

以上から, 与えられた級数は, $p > 1$ のときに収束し, $p \leq 1$ のときに発散することが分かります.

問 24. いま, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$A_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } m \text{ 桁の数で, } 9 \text{ が現れない.}\}$$

と定めてみます.⁷ このとき,

$$S_m = \sum_{n \in A_m} \frac{1}{n}$$

⁷例えば, $A_1 = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$, $A_2 = \{10, 11, \dots, 18, 20, \dots, 88\}$ などとなります.

と定めてみると, 求める和は, $\sum_{m=1}^{\infty} S_m$ と表わすことができます. ここで, A_{m+1} の元は, A_m の元を用いて,

$$A_{m+1} = \{n = 10n' + k \mid n' \in A_m, k = 0, 1, 2, \dots, 8\}$$

と表わせることに注意すると,

$$\sum_{n \in A_{m+1}} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n' \in A_m \\ k=0,1,\dots,8}} \frac{1}{10n' + k} \leq \sum_{\substack{n' \in A_m \\ k=0,1,\dots,8}} \frac{1}{10n'} = \frac{9}{10} \sum_{n' \in A_m} \frac{1}{n'}$$

となることが分かります. よって, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S_{m+1} \leq \frac{9}{10} S_m$$

となることが分かりますから,

$$S_m \leq \frac{9}{10} S_{m-1} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^2 S_{m-2} \leq \dots \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} S_1 \quad (1)$$

となることが分かります. したがって, (1) 式より, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N S_m &\leq S_1 \left\{ 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^{N-1} \right\} \\ &\leq S_1 \left\{ 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^{N-1} + \dots \right\} \\ &= S_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \\ &= 10 \cdot S_1 \end{aligned} \quad (2)$$

となることが分かります. したがって, (2) 式から, 部分和 $\sum_{m=1}^N S_m$ は, $10 \cdot S_1$ という数によって「頭打ち」になっていることが分かりますから, $\sum_{m=1}^{\infty} S_m$ は収束することが分かります.

問 25. (1) 収束する. (2) 収束する. (3) 収束する.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

(1) いま, $2^n = (1+1)^n$ と考えて, 二項展開してみると, $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots \\ &\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned} \quad (1)$$

となることが分かります. よって, (1) 式から, $n \geq 3$ のとき,

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{6}{(n-1)(n-2)} \quad (2)$$

となることが分かります. したがって, (2) 式から, $N \geq 3$ となる勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \sum_{n=3}^N \frac{n}{2^n} \\ &\leq 1 + 6 \sum_{n=3}^N \frac{1}{(n-1)(n-2)} \\ &= 1 + 6 \sum_{n=3}^N \left\{ \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right\} \\ &= 1 + 6 \left(1 - \frac{1}{N-1} \right) < 7 \end{aligned} \quad (3)$$

となることが分かります. よって, (3) 式から, 部分和が, 7 という値によって「頭打ち」になっていることが分かりますから, 与えられた級数は収束することが分かります.

(2) いま, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdots \frac{n}{n+n} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{1}+1} \cdot \frac{1}{\frac{n}{2}+1} \cdots \frac{1}{\frac{n}{n}+1} \end{aligned} \quad (4)$$

と表わせることに注意します. このとき, $k = 1, 2, \dots, n$ とすると, $\frac{n}{k} \geq 1$ となりますから,

$$\frac{1}{\frac{n}{k}+1} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

となることが分かります. よって, (4) 式, (5) 式から,

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

となることが分かりますから, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{(n!)^2}{(2n)!} &\leq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^N \\ &\leq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^N + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^{N-1} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

となることが分かります. よって, (6) 式から, 部分和が, 1 という値によって「頭打ち」になっていることが分かりますから, 与えられた級数は収束することが分かります.

(3) いま, $x \geq 0$ のとき,

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq 0 \quad (7)$$

となることに注目して, 例えば, $f(x) = e^x - 1 - x - 2x^2$ なる関数の増減表を調べてみると, $x \leq 1$ のとき,

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2 \quad (8)$$

となることが分かります.⁸ そこで, (8) 式において, $x = \frac{1}{n}$ と取ってみると, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$0 \leq e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n^2} \quad (9)$$

となることが分かります. よって, (9) 式から, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad (10)$$

となることが分かります. したがって, (10) 式から, 部分和が, $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ という値によって「頭打ち」になっていることが分かりますから, 与えられた級数は収束することが分かります.

♣ ここでは, 直接, 部分和の大きさを見積もるという方法で議論しましたが, (1), (2) に関しては, 数学 IB 演習の第 5 回の問 2 のところで説明した「級数の収束判定法」を用いると, 次のように, ずっと簡単に収束判定をすることができます.

(1) いま, $a_n = \frac{n}{2^n}$ とすると,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

となりますから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられた級数は収束することが分かります.

(2) いま, $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ とすると,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\{(n+1)!\}^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)}$$

⁸いま, (7) 式から, $|x| \ll 1$ のときには, $e^x - 1 - x \doteq \frac{x^2}{2}$ と考えられますから, $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \doteq \frac{1}{2}$ となることが分かります. よって, $C \in \mathbb{R}$ を $\frac{1}{2} < C$ となる定数とすれば, $|x| \ll 1$ のとき, $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \doteq \frac{1}{2} < C$ となることが分かりますから, $e^x - 1 - x \leq Cx^2$ となることが分かります. そこで, $|x| \ll 1$ でなくとも, 適当に正の定数 C を定めると, $x \leq 1$ のとき, $e^x - 1 - x \leq Cx^2$ とできるのではないかと考えました. 実際, $f(x) = e^x - 1 - x - Cx^2$ と定めて, 関数 $f(x)$ の増減表を調べてみると, $f''(1) = e - 2C \leq 0$ なら, $x \leq 1$ のとき, $e^x - 1 - x \leq Cx^2$ となることが分かります. ここでは, $C = 2$ として, $f''(1) = e - 4 \leq 0$ という式をチェックしやすいようにしました.

となりますから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられた級数は収束することが分かります.

(3) いま, $f(x) = e^x$ に対して, Taylor の定理を用いると, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^x = 1 + x + \frac{e^\theta}{2} x^2 \quad (11)$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かります. 特に, $x = \frac{1}{n}$ としてみると, (11) 式から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{e^{\theta_n}}{2n^2} \quad (12)$$

となる実数 $\theta_n \in \mathbb{R}$ が 0 と $\frac{1}{n}$ の間に存在することが分かります.

そこで, $a_n = e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}$ とすると, (12) 式から,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{\theta_{n+1}}}{2(n+1)^2}}{\frac{e^{\theta_n}}{2n^2}} = \frac{e^{\theta_{n+1}}}{e^{\theta_n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \quad (13)$$

と表わせることが分かります. ここで, $\theta_n \in \mathbb{R}$ は 0 と $\frac{1}{n}$ の間の数ですから, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\theta_n \rightarrow 0$ となることに注意すると, (13) 式から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^0}{e^0} \cdot 1 = 1$$

となることが分かります. よって, この場合には「級数の収束判定法」では収束・発散の判定はできないことが分かりますから, 例えば, 上で述べたようにして, 個別に収束・発散を議論する必要があります. また, 上では, (8) 式という不等式をもとにして, (9) 式の評価式を得ましたが, Taylor の定理にもとづく (12) 式の表示を用いると,

$$0 \leq e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{e^{\theta_n}}{2n^2} \leq \frac{e^{1/n}}{2n^2} \leq \frac{e^1}{2n^2} = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (14)$$

という評価式を得ることができますから, (9) 式の代わりに (14) 式を用いて, 同様の議論をすることもできます.

問 26. (1) 発散する. (2) 収束する. (3) 収束する. (4) 収束する.

(5) $a \leq 1$ のとき収束し, $a > 1$ のとき発散する. (6) 収束する.

(7) $|x| < 3$ のとき収束し, $|x| \geq 3$ のとき発散する. (8) 収束する.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

(1) $x \geq 1$ のとき, $\log x \leq x$ となることに注意すると,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1+n} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+\log n} \quad (1)$$

となることが分かります. したがって, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+n} = +\infty$ となることに注意すると, (1) 式から, 与えられた級数は発散することが分かります.

(2) まず,

$$\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{n} \log n}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \log n\right)^2 \quad (2)$$

というように評価できることに注意します. いま, $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = x^\alpha - \alpha \log x$$

という関数の増減表を調べることで, $x \geq 1$ のとき $\alpha \log x \leq x^\alpha$ となることが分かるので,

$$\left(\frac{1}{n} \log n\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot n^\alpha\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \quad (3)$$

となることが分かります. そこで, (3) 式において, 例えば, $\alpha = \frac{1}{4}$ とすると, (2) 式, (3) 式から,

$$\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \log n\right)^2 \leq \frac{16}{n^{3/2}}$$

というように評価できることが分かります. よって, 与えられた級数の部分和は,

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2 \leq 16 \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}} < 16 \cdot 3 = 48$$

となり, 48 という数によって「頭打ち」になることが分かります.⁹ したがって, 与えられた級数は収束することが分かります.

(3) いま, $\cos y$ という関数の Taylor 展開から,

$$\cos y - 1 = -\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots$$

となることに注目して, 例えば, $f(y) = \cos y - 1 + y^2$ という関数の増減表を調べてみると, 勝手な実数 $y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 \leq 1 - \cos y \leq y^2 \quad (4)$$

となることが分かります. よって, (4) 式において, $y = \frac{x}{n}$ としてみることで, 与えられた級数の部分和は,

$$\sum_{n=1}^N \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) \leq x^2 \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < x^2 \cdot 2 = 2x^2$$

となり, $2x^2$ という数によって「頭打ち」になることが分かります. したがって, 与えられた級数は収束することが分かります.

⁹例えば, $\frac{1}{x^{3/2}}$ という関数の積分と比べることで, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}} < 3$ となることが分かります.

- (4) いま, $\log N_0 \geq 2$ となるような自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ を勝手にひとつ取ってきます. すると, $n \geq N_0$ のとき,

$$\log n \geq \log N_0 \geq 2$$

となることが分かりますから,

$$n^{\log n} \geq n^2 \quad (5)$$

となることが分かります. よって, (5) 式から, $N_0 \leq N$ となる勝手な自然数 N に対して, 与えられた級数の部分和は,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\log n}} &= \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{n^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^N \frac{1}{n^{\log n}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{n^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^N \frac{1}{n^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{n^{\log n}} + 2 \end{aligned}$$

となり, $\sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{n^{\log n}} + 2$ という数によって「頭打ち」になることが分かります. したがって, 与えられた級数は収束することが分かります.

- (5) いま, $a_n = \frac{a^n}{n^2+n}$ とすれば,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)}}{\frac{a^n}{n^2+n}} = \frac{a(n^2+n)}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{a(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$$

となることが分かります. よって, 第5回の問2のところで見た「級数の収束判定法」により, 与えられた級数は, $a < 1$ のときには収束し, $a > 1$ のときには発散することが分かります. また, $a = 1$ のときは,

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

と書き直せることに注意すると, 与えられた級数の部分和は,

$$\sum_{n=1}^N a_n = 1 - \frac{1}{N+1} \quad (6)$$

というように具体的に計算できてしまいますから, (6) 式の両辺の極限を取ることで, 与えられた級数は 1 に収束することが分かります.

- (6) いま,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}+2}{n^2-n+1} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \quad (7)$$

というように表わしてみます. すると, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

となりますから, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_0$ のとき,

$$\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \leq 2 \quad (8)$$

となることが分かります. よって, (7) 式, (8) 式から, $N \geq N_0$ のとき, 与えられた級数の部分和は,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + \sum_{n=N_0}^N a_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + 2 \cdot \sum_{n=N_0}^N \frac{1}{n^{3/2}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

となり, $\sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + 6$ という数によって「頭打ち」になることが分かります. したがって, 与えられた級数は収束することが分かります.

(7) いま,

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot \log(1+n)}{3^n} \cdot x^n$$

とすると,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} \cdot \log(1+(n+1))}{3^{n+1}} \cdot x^{n+1}}{\frac{(-1)^n \cdot \log(1+n)}{3^n} \cdot x^n} \right| = \frac{\log((1+n)+1)}{\log(1+n)} \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \\ &= \frac{\log(1+n) + \log\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)}{\log(1+n)} \cdot \left| \frac{x}{3} \right| = \left\{ 1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)}{\log(1+n)} \right\} \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \end{aligned}$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{3} \right|$$

となることが分かります. よって, 第5回の問2のところで見た「級数の収束判定法」により, 与えられた級数は, $|x| < 3$ のときには収束し, $|x| > 3$ のときには発散することが分かります. また, $|x| = 3$ のときは,

$$|a_n| = \log(n+1)$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ とはなりませんから, 与えられた級数は発散することが分かります.

(8) いま,

$$a_n = \frac{\sin nx - \cos nx}{n^{3/2}}$$

とすると, $|a_n|$ の大きさが,

$$|a_n| = \frac{|\sin nx - \cos nx|}{n^{3/2}} \leq \frac{|\sin nx| + |\cos nx|}{n^{3/2}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}$$

というように評価できることが分かります. したがって, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という級数の部分和は,

$$\sum_{n=1}^N |a_n| \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}} < 2 \cdot 3 = 6$$

となり, 6 という数によって「頭打ち」になることが分かります. よって, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ となることが分かります. すなわち, 与えられた級数は絶対収束していることが分かります.¹⁰

問 27. (1) 1, (2) 1, (3) 1, (4) 1.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

(1) いま, $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n$ とすると,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+2)(n+3)}x^{n+1}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n} \right| = \frac{n+1}{n+3} \cdot |x| = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \cdot |x|$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$$

となることが分かります. よって, 第 5 回の問 2 のところで見た「級数の収束判定法」により, 与えられたべき級数は, $|x| < 1$ のときには収束し, $|x| > 1$ のときには発散することが分かります. したがって, 収束半径は 1 であることが分かります.

(2) いま, $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n = \frac{x^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ とすると,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} \right| = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \cdot |x| = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \cdot |x|$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられたべき級数は, $|x| < 1$ のときには収束し, $|x| > 1$ のときには発散することが分かります. したがって, 収束半径は 1 であることが分かります.

¹⁰絶対収束する級数は, それ自身, 収束することに注意します.

(3) いま, $a_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n$ とすると,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2n+3} \cdot \frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1}}{\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \cdot |x| = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \cdot |x|$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられたべき級数は, $|x| < 1$ のときには収束し, $|x| > 1$ のときには発散することが分かります. したがって, 収束半径は 1 であることが分かります.

(4) いま, $a_n = \frac{1}{\log n} x^n$ とすると,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{\log(n+1)} x^{n+1}}{\frac{1}{\log n} x^n} \right| = \frac{\log n}{\log(n+1)} \cdot |x| \\ &= \frac{\log n}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot |x| = \frac{1}{1 + \frac{1}{\log n} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot |x| \end{aligned}$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられたべき級数は, $|x| < 1$ のときには収束し, $|x| > 1$ のときには発散することが分かります. したがって, 収束半径は 1 であることが分かります.

問 28. (1) 1, (2) 1, (3) 1, (4) 0, (5) 1, (6) $\frac{1}{2}$, (7) $+\infty$.

これらの収束半径は, 例えば, 次のようにして分かります.

(1) いま,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot |x|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \cdot |x|^2 = |x|^2$$

となることが分かります. よって, 与えられた級数は, $|x|^2 < 1$ のとき収束し, $|x|^2 > 1$ のとき発散することが分かります. したがって, 与えられたべき級数の収束半径は, 1 となることが分かります.

(2) いま,

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \cdot |x|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^2}{(2 + \frac{2}{n})(2 + \frac{3}{n})} \cdot |x|^2 = |x|^2$$

となることが分かります. よって, 与えられた級数は, $|x|^2 < 1$ のとき収束し, $|x|^2 > 1$ のとき発散することが分かります. したがって, 与えられたべき級数の収束半径は, 1 となることが分かります.

(3) いま,

$$a_n = x^{n^2}$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \begin{cases} 0, & (|x| < 1 \text{ のとき}) \\ 1, & (|x| = 1 \text{ のとき}) \\ +\infty, & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります. よって, 与えられた級数は, $|x| < 1$ のとき収束し, $|x| > 1$ のとき発散することが分かります. したがって, 与えられたべき級数の収束半径は, 1 となることが分かります.

(4) いま,

$$a_n = n! x^n$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot |x| = \begin{cases} 0, & (|x| = 0 \text{ のとき}) \\ +\infty, & (|x| > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります。よって、与えられた級数は、 $x = 0$ のとき収束し、 $x \neq 0$ のとき発散することが分かります。したがって、与えられたべき級数の収束半径は、0 となることが分かります。

(5) いま、

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \cdot x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\alpha}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| \cdot |x| = |x|$$

となることが分かります。したがって、与えられたべき級数の収束半径は、1 となることが分かります。

(6) いま、

$$a_n = 2^n x^n$$

とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x| = 2|x|$$

となることが分かります。よって、与えられた級数は、 $2|x| < 1$ のとき収束し、 $2|x| > 1$ のとき発散することが分かります。したがって、与えられたべき級数の収束半径は、 $\frac{1}{2}$ となることが分かります。

(7) いま、

$$a_n = q^{n^2} x^n$$

とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{2n+1} \cdot |x| = 0$$

となることが分かります。したがって、与えられたべき級数の収束半径は、 $+\infty$ となることが分かります。

問 29. 収束半径は 1 となります。

この結果は、例えば、次のようにして分かります。

いま、 c_n の大きさを見積もるために、積分の値と比べてみると、

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x^2} \leq c_n \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{dx}{x^2}$$

となることが分かります。そこで、両辺の積分の値を具体的に計算してみると、

$$\frac{n+1}{n(2n+1)} \leq c_n \leq \frac{n+1}{2n(n-1)} \quad (1)$$

となることが分かります. よって, (1) 式から,

$$\frac{2n(n-1)}{n+1} \leq \frac{1}{c_n} \leq \frac{n(2n+1)}{n+1} \quad (2)$$

となることが分かります. また, (1) 式で, $n \rightsquigarrow n+1$ と置き換えることで,

$$\frac{n+2}{(n+1)(2n+3)} \leq c_{n+1} \leq \frac{n+2}{(2n+2)n} \quad (3)$$

となることが分かります. よって, (2) 式, (3) 式から,

$$\frac{2n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(n+1)(2n+3)} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{n(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(2n+2)n}$$

となることが分かりますから,

$$\frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{3}{n}\right)} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} \quad (4)$$

となることが分かります. よって, (4) 式の各辺で, $n \rightarrow \infty$ としてみると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 \quad (5)$$

となることが分かります.

そこで, $a_n = c_n x^n$ とすると,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x|$$

となりますが, (5) 式と合わせて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x| = |x|$$

となることが分かります. よって, 「級数の収束判定法」により, 与えられたべき級数は, $|x| < 1$ のときには収束し, $|x| > 1$ のときには発散することが分かります. したがって, 収束半径は 1 であることが分かります.

問 30. $\log \frac{1 + \sqrt{1+x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!}{n \cdot (2n)!!} x^n$ と Taylor 展開できます. また, その収束半径は, 1 となります.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

いま,

$$f(x) = \log(1 + \sqrt{1+x}) - \log 2$$

とすると,

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \quad (1)$$

となることが分かります. また, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ という関数の Taylor 展開は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n\end{aligned}\quad (2)$$

となることが分かりますから, (1) 式と (2) 式から,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1} \quad (3)$$

となることが分かります. よって, $f(0) = 0$ となることに注意して, (3) 式の両辺を 0 から x まで積分してみると,

$$\log \frac{1+\sqrt{1+x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!}{n \cdot (2n)!!} x^n \quad (4)$$

となることが分かります. また,

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!}{n \cdot (2n)!!} x^n$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+2)} \cdot |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{2}{n})} \cdot |x| = |x|$$

となることが分かります. したがって, (4) 式の右辺に現われるべき級数の収束半径は, 1 となることが分かります.

$$\text{問 31. (1) } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}.$$

問 32. $f(x, t)$ の偏微分を計算してみると,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-(x^2/4t)} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{2t} \right)^2 - \frac{1}{2t} \right\} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

となることが分かります.

$$\text{問 33. } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x+y) \cos(x^2+xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(x^2+xy) \end{cases}$$

問 34. $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とすると, 次のように表わせます.

$$(1) \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$(2) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = r \cos(2\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial r} - \sin(2\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$(3) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$(5) \quad y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ の両辺を r や θ で偏微分してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

となることが分かります. そこで, (1) 式を, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ について逆に解いてみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$$

と表わせることが分かります. すなわち, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ を極座標で表わすと,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2)$$

と表わせることが分かります. そこで, (2) 式を用いて, 与えられた式を書き換えてみると, 上のような等式が成り立つことが分かります.

問 35. (1) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, (2) $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$, (3) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right)$.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

(1) いま, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 6y^2 - 1 \end{cases}$$

となることが分かりますから, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) は,

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$$

となることが分かります. また, それぞれの点におけるヘッシアン

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

は,

$$H_f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, H_f\left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \mp \sqrt{3} \\ -1 \mp \sqrt{3} & 1 \pm 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となることが分かります. そこで, 数学 IB 演習の第 6 回の問 2 のところで述べた極値の判定法¹¹を用いると, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ は極小点になり, $(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2})$ は鞍点になることが分かります.

(2) いま, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y(a - 2x - y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(a - x - 2y) \end{cases}$$

となることが分かりますから, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) は,

$$(x, y) = (0, 0), (0, a), (a, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

となることが分かります. また, それぞれの点におけるヘッシアンは,

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, H_f(0, a) = \begin{pmatrix} -2a & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(a, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix}, H_f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{a}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります. そこで, 極値の判定法を用いると, $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ のみが極値点になり, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ は鞍点になることが分かります.

(3) いま, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 2xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 2y \end{cases}$$

¹¹いま, 臨界点 (x_0, y_0) でのヘッシアン $H_f(x_0, y_0)$ を,

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

と表わすことにします. このとき, 例えば, $A > 0$ のときには, $\det H_f(x_0, y_0) = AC - B^2 > 0$ ならば (x_0, y_0) は極小点となり, $\det H_f(x_0, y_0) < 0$ ならば (x_0, y_0) は鞍点となることなどが分かるのでした.

となることが分かりますから, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) は,

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right)$$

となることが分かります. また, それぞれの点におけるヘッシアンは,

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります. そこで, 極値の判定法を用いると, $(\frac{1}{5}, \frac{1}{50})$ が極小点になることが分かります. 一方, $(x, y) = (0, 0)$ においては, $\det H_f(0, 0) = 0$ となるために, 極値の判定法を用いることはできませんが, 例えば, $y = 0$ としてみると, $f(x, 0) = x^5$ となることが分かりますから, $(x, y) = (0, 0)$ は極値にはならないことが分かります.

問 36. $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ のとき, 最小値 -8 を取ります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) \end{cases}$$

となることが分かりますから, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点は,

$$(x, y) = (0, 0), (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$$

となることが分かります. ここで,

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -8$$

となることに注意すると, 関数 $f(x, y)$ は, $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, あるいは, $x^2 + y^2 = 5$ という円盤の周上で最小値を取ることが分かります.

そこで, $x^2 + y^2 = 5$ という円周上での関数 $f(x, y)$ の値について考察してみることにします. いま, $x^2 + y^2 = 5$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - 2(x - y)^2 \\ &= 25 - 2\{x^2y^2 + (x - y)^2\} \\ &= 17 - 2(xy - 1)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

というように書き直せることが分かります. さらに, $(x, y) = (\sqrt{5} \cos \theta, \sqrt{5} \sin \theta)$ というように円周上の点を表わしてみると,

$$xy = \sqrt{5} \cos \theta \cdot \sqrt{5} \sin \theta = \frac{5}{2} \sin 2\theta$$

となることが分かりますから,

$$-\frac{5}{2} \leq xy \leq \frac{5}{2} \quad (2)$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から, $x^2 + y^2 = 5$ という円周上では,

$$f(x, y) \geq -\frac{15}{2} > -8$$

となることが分かります. したがって, 円板 $x^2 + y^2 \leq 5$ 上での関数 $f(x, y)$ の最小値は, $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -8$ となることが分かります.

問 37. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ のとき, 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を取ります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

まず, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ という条件は忘れて, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と考えて, 関数 $f(x, y)$ の最大値について考えてみることにします. このとき, $f(x, y)$ は, x, y について周期関数となっていますから, 関数 $f(x, y)$ は $0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$ という範囲で最大値を取ることが分かります. いま,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) \end{cases}$$

となることが分かりますから, この範囲で, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点を求めてみると,

$$(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (\pi, \pi), (\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi)$$

となることが分かります.¹² さらに,

$$f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, f(\pi, \pi) = 0, f(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となることが分かりますから, 関数 $f(x, y)$ の最大値は, $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ となることが分かります. いま, $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ という点は, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ という領域に属していることに注意すると, この領域における最大値も, やはり, $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ で与えられることが分かります.

問 38.

(1) $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ で極大となり, $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ で極小となります.

(2) $(x, y, z) = (t, 0, -t), t \in \mathbb{R}$ という直線に沿って極小になります.

(3) $(0, 0)$ で極大となり, $x^2 + y^2 = 1$ という円に沿って極小となります.

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

¹²例えば, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ という式は, $\cos(x+y) = -\cos x$ というように書き直してみると, $x+y = \pi \pm x + 2n\pi, (n \in \mathbb{N})$ というように解くことができます.

(1) いま、それぞれの偏微分を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (1 - 2x^2)ye^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (1 - 2y^2)xe^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

となることが分かりますから、 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) は、

$$(x, y) = (0, 0), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となることが分かります。また、それぞれの点におけるヘッシアンは、

$$\begin{aligned} H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2}{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= H_f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、極値の判定法を用いると、 $(0, 0)$ は鞍点になり、 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は極大点になり、 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は極小点になることが分かります。

(2) $g(y, w) = 5y^2 - 2yw + 2w^2$ とすると、

$$f(x, y, z) = g(y, x + z) \quad (1)$$

と表わすことができることに注意します。そこで、関数 $g(y, w)$ について考えてみます。いま、それぞれの偏微分を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} = 10y - 2w, \\ \frac{\partial g}{\partial w} = -2y + 4w \end{cases}$$

となることが分かりますから、 $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0$ となる点 (y, w) は、 $(y, w) = (0, 0)$ となることが分かります。また、この点におけるヘッシアンは、

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。したがって、極値の判定法を用いると、 $(0, 0)$ は関数 $g(y, w)$ の極小点であることが分かります。よって、(1) 式から、関数 $f(x, y, z)$ は $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$ という直線に沿って極小になることが分かります。

(3) $g(t) = (t - 1)^2$ とすると、

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (2)$$

と表わすことができることに注意します。そこで、 $x^2 + y^2 \geq 0$ となることに注意して、 $t \geq 0$ なる範囲で関数 $g(t)$ を考えてみます。すると、この範囲で、関数 $g(t)$ は、 $t = 0$ で極大となり、 $t = 1$ で極小となることが分かります。したがって、(2) 式から、関数 $f(x, y)$ は、 $(0, 0)$ で極大となり、 $x^2 + y^2 = 1$ という円に沿って極小となることが分かります。

問 39. 極大値は $2 + \sqrt{2}$ となり, 極小値は $2 - \sqrt{2}$ となります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2(x^2 + y^2) + 2xy + (x^2 - y^2) \\ &= 2 + 2\cos \theta \sin \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= 2 + \sin 2\theta + \cos 2\theta \\ &= 2 + \sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. したがって, $f(x, y)$ は, $\sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ のとき, 極大値 $2 + \sqrt{2}$ を取り, $\sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$ のとき, 極小値 $2 - \sqrt{2}$ を取ることが分かります.

問 40. 最大値は, $\frac{8\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9}$ となります.

このことは, 例えば, Lagrange の未定乗数法により, 次のようにして分かります.

いま, $F(x, y, \lambda) = 2x^3 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ として, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 - 2\lambda x, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

となることが分かります. これより, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ となる点は,

$$(x, y, \lambda) = \pm(0, 1, \frac{1}{2}), (\frac{\lambda_0}{3}, \frac{1}{2\lambda_0}, \lambda_0), \left(\lambda_0 = \pm \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

となることが分かります. さらに,

$$f(0, \pm 1) = \pm 1, f(\frac{\lambda_0}{3}, \frac{1}{2\lambda_0}) = \pm \frac{8\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{9}$$

となることが分かりますから, $\frac{8\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9} \geq 1$ となることに注意すると, 関数 $f(x, y)$ の最大値は, $\frac{8\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9}$ となることが分かります.

問 41. 最大値は, $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ となります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}, Z = \frac{z}{c}$ というように変数変換してみると, $xyz = (abc) \cdot XYZ$ となることが分かりますから, 以下では, $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ のもとで, $g(X, Y, Z) = XYZ$ の最大値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めてみることにします. そこで,

$$F(X, Y, Z, \lambda) = XYZ - \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$$

として、それぞれの偏微分を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial X} = YZ - 2\lambda X \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = XZ - 2\lambda Y \\ \frac{\partial F}{\partial Z} = XY - 2\lambda Z \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - X^2 - Y^2 - Z^2 \end{cases}$$

となることが分かります。これより、 $\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ となる点は、 $\lambda_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ として、

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, \lambda) = & (\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0), \\ & (2\lambda_0, 2\lambda_0, 2\lambda_0, \lambda_0), (2\lambda_0, -2\lambda_0, -2\lambda_0, \lambda_0), \\ & (-2\lambda_0, 2\lambda_0, -2\lambda_0, \lambda_0), (-2\lambda_0, -2\lambda_0, 2\lambda_0, \lambda_0) \end{aligned}$$

となることが分かります。また、このとき、 $g(X, Y, Z) = XYZ$ の値は、最初の 6 点に対しては 0 となり、残りの 8 点に対しては $(2\lambda_0)^3 = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$ となることが分かります。したがって、求める最大値は、 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ に abc を掛けて、 $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ となることが分かります。

問 42. 最短距離は、 $\sqrt{2}$ となります。

このことは、例えば、次のようにして分かります。

いま、Lagrange の未定乗数法を用いて、 $2xy + z^2 - 1 = 0$ のもとでの関数 $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$ の最小値を求めてみることにします。そこで、

$$F(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - \lambda(2xy + z^2 - 1)$$

として、それぞれの偏微分を計算してみると、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) - 2\lambda y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-1) - 2\lambda x \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z-2) - 2\lambda z \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - 2xy - z^2 \end{cases}$$

となることが分かります。これより、 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ となる点は、 $\lambda_0 = 1 \pm \sqrt{6}$ として、

$$(x, y, z, \lambda) = (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, -1), \left(\frac{1}{1-\lambda_0}, \frac{1}{1-\lambda_0}, \frac{2}{1-\lambda_0}, \lambda_0\right)$$

となることが分かります。また、このとき、

$$f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 2, \quad f\left(\frac{1}{1-\lambda_0}, \frac{1}{1-\lambda_0}, \frac{2}{1-\lambda_0}\right) = (\sqrt{6} \pm 1)^2$$

となることが分かります。ここで、

$$2 < (\sqrt{6} - 1)^2 < (\sqrt{6} + 1)^2$$

となることに注意すると, $f(x, y, z)$ の最小値は 2 となることが分かります. いま, $f(x, y, z)$ は, 点 (x, y, z) と点 $(1, 1, 2)$ との間の距離の 2 乗ですから, 求める最小値は $\sqrt{2}$ となることが分かります.

問 43. 最大値は 3 となり, 最小値は -3 となります.

このことは, 例えば, Lagrange の未定乗数法により, 次のようにして分かります.

いま, $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 - z^2 + 4xz + 4yz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ として, それぞれの偏微分を計算してみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(1 - \lambda)x - 4z \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(1 - \lambda)y - 4z \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 4x + 4y - 2(1 + \lambda)z \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \end{cases}$$

となることが分かります. したがって, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ となる条件は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -(1 + \lambda) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (2)$$

というように表わせることが分かります. いま, 行列 A に逆行列が存在すると仮定すると, (1) 式より, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ となることが分かりますが, このとき, $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \neq 1$ となりますから, (2) 式は成り立たないことが分かります. したがって, (1) 式, (2) 式が同時に成り立つためには,

$$\det A = 0 \quad (3)$$

でなければならないことが分かります. そこで, $\det A$ を具体的に求めてみると,

$$\det A = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 9) \quad (4)$$

となることが分かりますから, (3) 式, (4) 式から, $\lambda = 1, \pm 3$ でなければならないことが分かります. そこで, それぞれの λ の値に対して, (1) 式, (2) 式の解を求めてみると, 結局, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ となる点は,

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), & (\lambda = 1 \text{ のとき}) \\ (x_0, y_0, z_0) = \pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), & (\lambda = 3 \text{ のとき}) \\ (x_0, y_0, z_0) = \pm(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), & (\lambda = -3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります. また, これらの点での関数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 4xz + 4yz$ の値は, $\lambda = 1$ のとき $f(x_0, y_0, z_0) = 1$ となり, $\lambda = 3$ のとき, $f(x_0, y_0, z_0) = 3$ となり, $\lambda = -3$ のとき, $f(x_0, y_0, z_0) = -3$ となることが分かります. したがって, 関数 $f(x, y, z)$ の最大値, 最小値は, それぞれ, $3, -3$ となることが分かります.

問 44. 極小値は $2\sqrt{3} - 3$ となり, 極大値は 1 となります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $0 \leq x < 1$ において, 直接, 関数

$$h(x) = (x - 1)^2 + \frac{x^3}{1 - x}$$

の増減を調べてみることにします. すると,

$$h'(x) = \frac{-3(x - 1)^2 + 1}{(1 - x)^2}$$

となることが分かるので, $x = 0$ のとき, 極大値 $h(0) = 1$ を取り, $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極小値 $h(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3} - 3$ を取ることが分かります.

♣ 一方, Lagrange の未定乗数法では, $(x, y) = (0, 0)$ という極値は抜け落ちてしまうことが分かります.¹³ 実際, $g(x, y) = x^3 - (1 - x)y^2$ として,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

と定めると,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2(x - 1)y \end{cases}$$

となることが分かりますから, $(x, y) = (0, 0)$ は曲線 C の唯一の特異点となることが分かります (図 1 を参照).

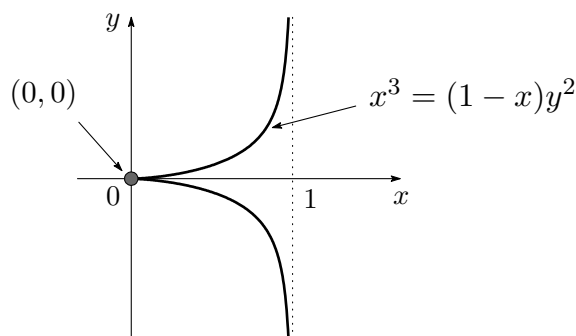


図 1: 曲線 C の概形

¹³ 皆さん, 確かめてみて下さい.

問 45. 極小値は $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ となり, 極大値は $\frac{16}{25\sqrt{5}}$ となります.

このことは, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $-1 \leq x$ において, 直接, 関数

$$h_{\pm}(x) = \pm x^2 \sqrt{x+1}$$

の増減を調べてみることにします. すると,

$$h_{\pm}(x) = \pm \frac{(5x+4)x}{2\sqrt{x+1}}$$

となることが分かるので, 関数 $h_{+}(x)$ は, $x=0$ で極小値 $h_{+}(0)=0$ を取り, $x=-\frac{4}{5}$ で極大値 $h_{+}(-\frac{4}{5}) = \frac{16}{25\sqrt{5}}$ を取ることが, また, 関数 $h_{-}(x)$ は, $x=0$ で極大値 $h_{-}(0)=0$ を取り, $x=-\frac{4}{5}$ で極小値 $h_{-}(-\frac{4}{5}) = -\frac{16}{25\sqrt{5}}$ を取ることが分かります. したがって,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(x+1) = y^2\}$$

とすると, 関数 $f(x, y) = xy$ は, 点 $P_{\pm} = (-\frac{4}{5}, \pm\frac{4}{5\sqrt{5}}) \in C$ において, それぞれ, 極小値 $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ と極大値 $\frac{16}{25\sqrt{5}}$ を取ることが分かります. 一方, $(x, y) = (0, 0)$ の近くでは, $f(x, y) = 0$ という値は, 点 (x, y) が曲線 C 上を $(x, y) = (x, x\sqrt{x+1})$ という方向に進むと極小値のように見え, $(x, y) = (x, -x\sqrt{x+1})$ という方向に進むと極大値のように見えるわけですから, 極値ではないことが分かります (図 2 を参照).

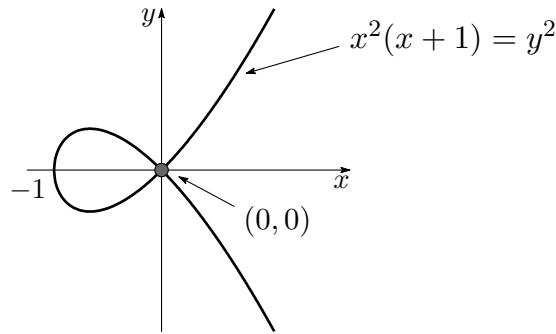


図 2: 曲線 C の概形

- 問 46. (1) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x+2}{x+4} \right|$, (2) $\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{11}{4} \log \left| \frac{x+1}{x+3} \right|$, (3) $\log \{(x-2)^2|x+1|\}$,
 (4) $\frac{3}{5} \log|x+2| + \frac{2}{5} \log|x-3|$, (5) $\frac{3}{4} \log|x+3| + \frac{1}{4} \log|x-1|$, (6) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right|$,
 (7) $\frac{1}{6} \log|x| + \frac{1}{3} \log|x+3| + \frac{1}{2} \log|x-2|$

それぞれの関数は、次のように表わせることが分かります。

- (1) $\frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right)$.
 (2) $\frac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2} = -\frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1}$.
 (3) $\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$.
 (4) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x-3}$.
 (5) $\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}$.
 (6) $\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(x^2)'}{x^2-1} - \frac{(x^2)'}{x^2+1} \right\}$.
 (7) $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$.

- 問 47. (1) $-\frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$,
 (2) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)$,
 (3) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$, (4) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$,
 (5) $\frac{1}{6} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{1}{12} \log \left| \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$,
 (6) $\frac{1}{24} \log \frac{(x^4-1)^2}{x^8+x^4+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x^4+1}{\sqrt{3}} \right)$,
 (7) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{6} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$,
 (8) $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \log(x^2+1)$, (9) $\frac{1}{4} \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$,
 (10) $\frac{1}{4} \log \frac{x^4}{x^4+x^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} \right)$.

(1) から (4) では、それぞれの関数は、次のように表わせることが分かります。

$$(1) \frac{1}{1-x^3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \quad (1)$$

$$(2) \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} \right\}.$$

$$(3) \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

$$(4) \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

(5) 与えられた関数は、

$$\frac{1}{1-x^6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1-x^3} \right)$$

と表わせることに注意します。また、(1) 式において、 x を $-x$ と書き直すと、

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

と表わせることが分かります。

(6) $t = x^4$ と変数変換してみると、

$$\int \frac{x^7 dx}{x^{12}-1} = \frac{1}{4} \int f(t) dt, \\ f(t) = \frac{t}{t^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

と表わせることが分かります。

(7) 与えられた関数は、

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

と表わせることが分かります。

(8) $t = x^2$ と変数変換してみると、

$$\int \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2} \int f(t) dt, \\ f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^3} = \frac{1}{(t+1)^3} - \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1}$$

と表わせることが分かります。

(9) 与えられた関数は,

$$\frac{x}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

と表わせることが分かります.

(10) $t = x^2$ と変数変換してみると,

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x^2) dx}{x(1+x^2+x^4)} &= \frac{1}{2} \int f(t) dt, \\ f(t) &= \frac{1-t}{t(t^2+t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{2}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

問 48. $A = \log \frac{x_0 + y_0}{R}$

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, $y = R \sinh t$ と変数変換してみると, $y_0 = R \sinh t_0$ として,

$$A = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{R^2 + y^2}} = \int_0^{t_0} dt = t_0 \quad (1)$$

となることが分かります. また, $x_0^2 - y_0^2 = R^2$, $x_0 > 0$ より, $x_0 = R \cosh t_0$ と表わせることに注意すると,

$$e^{t_0} = \cosh t_0 + \sinh t_0 = \frac{x_0 + y_0}{R} \quad (2)$$

となることが分かります. したがって, (1) 式, (2) 式から,

$$A = t_0 = \log \frac{x_0 + y_0}{R}$$

と表わせることが分かります.

問 49. 問 48 と同様に, $y = R \sinh t$ と変数変換してみると, $y_0 = R \sinh t_0$ として,

$$B = \int_0^{y_0} \sqrt{R^2 + y^2} dy = R^2 \int_0^{t_0} \cosh^2 t dt \quad (1)$$

となることが分かります. ここで,

$$\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)$$

となることに注意すると, (1) 式から,

$$B = \frac{R^2}{2} \int_0^{t_0} (\cosh 2t + 1) dt = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh 2t_0 + t_0 \right) \quad (2)$$

となることが分かります. また, $x_0 = R \cosh t_0$, $y_0 = R \sinh t_0$ と表わせるので,

$$\begin{cases} \sinh 2t_0 = 2 \cosh t_0 \cdot \sinh t_0 = \frac{2x_0y_0}{R^2}, \\ t_0 = \log \frac{x_0+y_0}{R} \end{cases} \quad (3)$$

となることが分かります. したがって, (2) 式, (3) 式から,

$$B = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh 2t_0 + t_0 \right) = \frac{1}{2} \left(x_0y_0 + R^2 \log \frac{x_0+y_0}{R} \right)$$

と表わせることが分かります.

問 50. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{2} \{x - x \log(x^2 + 1) + (x^2 - 1) \tan^{-1} x\}$

これらの結果は, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, $f(t) = \frac{(x-t)^2}{1+t^2}$ とすると, $f(t)$ は, $t=0$ のまわりで,

$$\begin{aligned} f(t) &= (x^2 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+2} \end{aligned} \quad (1)$$

と表わせることが分かります. そこで, (1) 式の両辺を積分してみると,

$$\begin{aligned} 2F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{2n+3} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$

となることが分かります. 一方,

$$f(t) = 1 - x \cdot \frac{2t}{t^2+1} + (x^2-1) \cdot \frac{1}{t^2+1} \quad (2)$$

と表わしてから, (2) 式の両辺を積分してみると,

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \{x - x \log(x^2 + 1) + (x^2 - 1) \tan^{-1} x\}$$

となることが分かります.

- 問 51. (1) $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\log x - \frac{1}{\alpha+1} \right)$, (2) $\{x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\}e^x$,
 (3) $x\{(\log x)^n - n(\log x)^{n-1} + n(n-1)(\log x)^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\}$,
 (4) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$, (5) $\frac{\sin 2x + 2x}{4}$, (6) $\frac{1}{3}(\log x)^3$,
 (7) $\log(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$, (8) $\frac{1}{5}(\cos x)^5 - \frac{1}{3}(\cos x)^3$,
 (9) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \log |\sqrt[6]{x} - 1|$, (10) $\frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{a^2 + b^2}$.

これらの原始関数は、例えば、次のようにして求めることができます。

- (1) $x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)'$ と考えて、部分積分をしてみると、

$$\int x^\alpha \log x \, dx = \int \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' \log x \, dx = \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha \, dx$$

となることが分かります。

- (2) $e^x = (e^x)'$ と考えて、部分積分を繰り返すと、

$$\begin{aligned} \int x^n e^x \, dx &= \int x^n (e^x)' \, dx \\ &= x^n e^n - n \int x^{n-1} e^x \, dx \\ &= x^n e^n - n \int x^{n-1} (e^x)' \, dx \\ &= x^n e^n - nx^{n-1} e^n + n(n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx \\ &= \cdots \\ &= x^n e^x - nx^{n-1} e^x + n(n-1)x^{n-2} e^x + \cdots + (-1)^n n! e^x \\ &= \{x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\}e^x \end{aligned}$$

となることが分かります。

- (3) $t = \log x$ と変数変換すると、

$$\int (\log x)^n \, dx = \int t^n e^t \, dt$$

となることが分かりますから、(2) の結果に帰着できることが分かります。

- (4) $\sin^{-1} x = 1 \cdot \sin^{-1} x = (x)' \cdot \sin^{-1} x$ と考えて、部分積分をしてみると、

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1} x \, dx &= \int (x)' \cdot \sin^{-1} x \, dx \\ &= x \sin^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ と表わせることに注意すると,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + x \right)$$

となることが分かります.

(6) $t = \log x$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int t^2 dt$$

となることが分かります.

(7) 与えられた関数は,

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

というように表わせることが分かります.

(8) $t = \cos x$ と変数変換してみると,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (t^2 - 1)t^2 dt$$

となることが分かります.

(9) $t = \sqrt[6]{x}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{6t^3 dt}{t-1} = \int \left(6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1} \right) dt$$

となることが分かります.

(10) $a \neq 0$ のとき, $e^{ax} = \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)'$ と考えて, 部分積分を二回繰り返してみると,

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \int \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' \cos bx dx \\ &= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx \\ &= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' \sin bx dx \\ &= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{be^{ax} \sin bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx \\ &= \frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx \end{aligned} \quad (1)$$

となることが分かります. そこで, (1) 式の右辺の第 2 項を左辺に移項して適当に整理してみると,

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{a^2 + b^2}$$

となることが分かります.

全く同様に, $b \neq 0$ のときには, $\cos bx = \left(\frac{\sin bx}{b}\right)'$ などと考えて, 部分積分を二回繰り返してみると,

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos bxdx &= \int e^{ax} \left(\frac{\sin bx}{b}\right)' \\&= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx \\&= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \left(\frac{-\cos bx}{b}\right)' dx \\&= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{ae^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx \\&= \frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx\end{aligned}\quad (2)$$

となることが分かります. そこで, (2) 式の右辺の第 2 項を左辺に移項して適当に整理してみると, やはり,

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{a^2 + b^2}$$

となることが分かります.

問 52.

(1) $n \geq 2$ より, $0 \leq x \leq 1$ のとき, $x^n \leq x^2$ となることに注意すると,

$$\sqrt{1+x^n} \leq \sqrt{1+x^2}$$

となることが分かります. したがって, このとき,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1\quad (1)$$

となることが分かります. そこで, (1) 式の各辺を積分してみると,

$$\log(1+\sqrt{2}) = \left[\log(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} \leq \int_0^1 dt = 1$$

となることが分かります.

(2) $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ となることに注意すると, $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x \leq 1$ となることが分かりますから,

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} \leq \sqrt{2}\quad (2)$$

となることが分かります. そこで, (2) 式の各辺を積分してみると,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となることが分かります.

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ となることに注意すると,

$$-Rx \leq -R \sin x \leq -\frac{2R}{\pi}x$$

となることが分かります. したがって, このとき,

$$e^{-Rx} \leq e^{-R \sin x} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}x} \quad (3)$$

となることが分かります. そこで, (3) 式の各辺を積分してみると,

$$\frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}R}) = \int_0^{\pi/2} e^{-Rx} dx \leq \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin x} dx \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}x} dx = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

となることが分かります.

問 53. (1) $x \tan \frac{x}{2}$, (2) $\frac{1}{4} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$,

(3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \left| \frac{b \tan \frac{x}{2} - a + \sqrt{a^2+b^2}}{b \tan \frac{x}{2} - a - \sqrt{a^2+b^2}} \right|$, (4) i). $\frac{1}{a} \tan \frac{x}{2}$, ($a = b$),

ii). $-\frac{1}{a \tan \frac{x}{2}}$, ($a = -b$), iii). $\frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$, ($a^2 > b^2$),

iv). $\frac{1}{(b-a)} \sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right|$, ($a^2 < b^2$), (5) $x + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1}$.

これらの原始関数は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = 2 \int \left(\tan^{-1} t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = 2 \int (t \tan^{-1} t)' dt = 2t \tan^{-1} t$$

となることが分かります.

(2) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \frac{1}{2} \int \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^2 + t + \frac{1}{2} \log |t|$$

となることが分かります.

(3) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{-2}{b} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{b^2}} \quad (1)$$

となることが分かります. そこで, さらに, $T = t - \frac{a}{b}$, $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ としてみると, (1) 式から,

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{-2}{b} \int \frac{dt}{T^2 - R^2} = \frac{1}{bR} \int \left(\frac{1}{T+R} - \frac{1}{T-R} \right) = \frac{1}{bR} \log \left| \frac{T+R}{T-R} \right|$$

となることが分かります.

(4) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} \quad (2)$$

となることが分かります. そこで, 場合分けをして考えてみると, (2) 式の右辺は, $a = b$ のとき,

$$\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2}$$

と表わせ, $a = -b$ のときには,

$$\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2}$$

と表わせ, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$ のときには,

$$\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} = \frac{2}{a+b} \int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2 + 1}$$

と表わせ, $a^2 - b^2 < 0$ のときには, $R = \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$ として,

$$\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} = \frac{1}{(a-b)R} \int \left(\frac{1}{t-R} - \frac{1}{t+R} \right) dt$$

と表わせることが分かります.

(5) まず,

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} = \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin x} \right) dx = x - \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

と変形してから, $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} = x - \int \frac{dx}{1 + \sin x} = x - \int \frac{2dt}{(t+1)^2} = x + \frac{2}{t+1}$$

となることが分かります.

問 54. (1) $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2},$

(2) $I_n = -\frac{1}{n+m} \sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{n+m} I_{n-2},$

(3) $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1},$ (4) $I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1} I_{n-1},$

(5) $I_n = x(\sin^{-1} x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1} x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$

これらの漸化式は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) $\tan^n x = \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x$ と表わしてみると,

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
 &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}
 \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります.

(2) $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)'$ と表わして, 部分積分をしてみると,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \cos^m x \cdot (-\cos x)' dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos^m x \cdot \cos x dx \\
 &\quad + m \int \sin^{n-1} x \cdot \cos^{m-1} x \cdot (-\sin x) \cdot \cos x dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^m x \cdot \cos^2 x dx - m I_n \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^m x \cdot (1 - \sin^2 x) dx - m I_n \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) - m I_n \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + (n-1)I_{n-2} - (n+m-1)I_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

となることが分かります. よって, (1) 式から,

$$I_n = -\frac{1}{n+m} \sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{n+m} I_{n-2}$$

となることが分かります.

(3) $1 \cdot (\log x)^n = (x)' \cdot (\log x)^n$ と表わして, 部分積分をしてみると,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int (x)' \cdot (\log x)^n dx \\
 &= x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} dx \\
 &= x(\log x)^n - n I_{n-1}
 \end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) $x^m = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)'$ と表わして, 部分積分をしてみると,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{1}{m+1} \int (x^{m+1})' \cdot (\log x)^n dx \\
 &= \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\log x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m \cdot (\log x)^{n-1} dx \\
 &= \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\log x)^n - \frac{n}{m+1} I_{n-1}
 \end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) いま, $t = \sin^{-1} x$ と変数変換してみると, I_n は,

$$I_n = \int t^n \cos t dt \quad (2)$$

というように表わせることが分かります. そこで, (2) 式の表示を用いて, 部分積分を二回繰り返してみると,

$$\begin{aligned} I_n &= \int t^n (\sin t)' dt \\ &= t^n \sin t - n \int t^{n-1} \sin t dt \\ &= t^n \sin t - n \int t^{n-1} (-\cos t)' dt \\ &= t^n \sin t + nt^{n-1} \cos t - n(n-1) \int t^{n-2} \cos t dt \\ &= t^n \sin t + nt^{n-1} \cos t - n(n-1) I_{n-2} \\ &= x(\sin^{-1} x)^n + n\sqrt{1-x^2} (\sin^{-1} x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

となることが分かります.

- 問 55. (1) $\sin^{-1}\left(\frac{2x-a}{a}\right)$, (2) $\sin^{-1}(2x-3)$, (3) $\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$,
 (4) i). $x+b \geq 0$ のとき, $\sqrt{(x+a)(x+b)} + (a-b)\log(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$,
 ii). $x+b \leq 0$ のとき, $-\sqrt{(x+a)(x+b)} + (a-b)\log(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})$,
 (5) $\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$, (6) $\frac{2}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$,
 (7) $\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{4}$, (8) $\sin^{-1}\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)$,
 (9) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}}\right|$, (10) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,
 (11) $(a+b)\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - (b-x)\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}$, (12) $\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{8}x(a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}$,
 (13) $\frac{1}{a}\log\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$.

これらの原始関数は、例えば、次のようにして求めることができます。

(1) 与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{2}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{a}x-1)^2}}$$

というように書き直すことができます。

(2) 与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2-x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$$

というように書き直すことができます。

(3) 与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}}$$

というように書き直すことができます。

(4) $t = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$I = \int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} dx = 2(b-a) \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} \quad (1)$$

というように書き直せることが分かります。そこで、さらに、(1) 式の右辺の被積分関数を部分分数展開して表わしてみると、

$$I = \frac{b-a}{2} \int \left\{ \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right\} dt$$

というように表せることが分かります.

(5) 与えられた関数の不定積分は,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

というように書き直すことができます.

(6) $x = a \cosh t$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \pm \frac{2}{a} \int \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \quad (2)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, さらに, $T = e^t$ と変数変換してみると, (2) 式から,

$$I = \pm \frac{2}{a} \int \frac{dT}{T^2 + 1}$$

となることが分かります.

(7) $x = \cosh t$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\sinh t \, dt}{\cosh t + |\sinh t|} \quad (3)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, さらに, $T = e^t$ と変数変換してみると, (3) 式から,

$$I = \int \frac{T^2 - 1}{T^2 + 1 + |T^2 - 1|} \cdot \frac{dT}{T} \quad (4)$$

となることが分かります. よって, (4) 式から, $t \geq 0$ のときには,

$$I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^3} \right) dT$$

というように表わせ, $t \leq 0$ のときには,

$$I = \frac{1}{2} \int \left(T - \frac{1}{T} \right) dT$$

というように表わせることが分かります.

(8) 与えられた関数の不定積分は,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \frac{2}{\beta-\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)^2}}$$

というように書き直すことができます.

(9) $x = \tan \theta$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{1-2\sin^2 \theta} \quad (5)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, さらに, $t = \sin \theta$ と変数変換してみると, (5) 式から,

$$I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}t} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}t} \right) dt$$

というように表わせることが分かります.

(10) $x = \sin \theta$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta} \quad (6)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, さらに, $t = \tan \theta$ と変数変換してみると, (6) 式から,

$$I = \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2 + 1}$$

というように表わせることが分かります.

(11) $t = \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = 2(a+b) \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2}$$

というように書き直せることが分かります.

(12) $x = a \sin \theta$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2\theta d\theta = \frac{a^4}{8} \int (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

というように書き直せることが分かります.

(13) $x = a \sin \theta$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad (7)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, さらに, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換してみると, (7) 式から,

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t}$$

というように表わせることが分かります.

問 56. (1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3}(x+1) + 2\sqrt{x^2+x+1}}{1-x} \right|$, (2) $\log \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right|$,

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x} \right)$, (4) $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, (5) $-\log \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \right|$,

(6) $x > -1 + \sqrt{2}$ のとき, $-\sin^{-1} \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}x} \right)$, $x < -1 - \sqrt{2}$ のとき, $\sin^{-1} \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}x} \right)$,

(7) $-\log \left| \frac{1+x+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x} \right|$, (8) $\frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3}(x+1) + 2\sqrt{x^2+x+1}}{1-x} \right|$

$$-\log \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| - \log \left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} \right), \quad (9) \quad \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2-3}{3\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

これらの原始関数は、例えば、次のようにして求めることができます。

(1) $1-x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x^2+x+1}} = \pm 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1+\{\sqrt{3}(2t-1)\}^2}}$$

というように書き直せることが分かります。

(2) $x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \mp \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

というように書き直せることが分かります。

(3) $1+x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-\{\sqrt{2}(t-1)\}^2}}$$

というように書き直せることが分かります。

(4) $1+x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}}$$

というように書き直せることが分かります。

(5) $x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \mp \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

というように書き直せることが分かります。

(6) $x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{t-1}{\sqrt{2}})^2}}$$

というように書き直せることが分かります。

(7) $x = \frac{1}{t}$ と変数変換してみると、与えられた関数の不定積分は、

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}} = \mp \int \frac{dt}{\sqrt{1+(t+1)^2}}$$

というように書き直せることが分かります。

(8) いま,

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1$$

と表わせることに注意すると,

$$I_1 = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x+x^2}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

として,

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = I_1 + I_2 - I_3$$

というように表わせることが分かります. このうち, (1) の結果から, I_1 は,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3}(x+1) + 2\sqrt{x^2+x+1}}{1-x} \right|$$

となることが分かります. 全く同様にして, I_2 は,

$$I_2 = -\log \left| \frac{1-x + 2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|$$

となることが分かります. また, 問 55 の (3) の結果から, I_3 は,

$$I_3 = \log \left(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1} \right)$$

となることが分かります.

(9) $t = x + \sqrt{1+x^2}$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$\int \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int (t^{1/2} + t^{-3/2}) dt$$

というように書き直せることが分かります.

問 57. (1) $\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, (2) $|r| < 1$ のとき, 0 , $|r| > 1$ のとき, $2\pi \log |r|$,

(3) $\log(a+1)$, (4) $\frac{\pi r}{(r^2-1)^{3/2}}$, (5) $\pi \log \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{2}$, (6) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\theta^2}{2}$

これらの積分の値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) いま,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$$

とすると,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^2} = -\frac{\partial I}{\partial a} - \frac{\partial I}{\partial b}$$

というように表せることが分かります. また, $t = \tan x$ と変数変換してみると, $I(a, b)$ は,

$$I(a, b) = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + (\sqrt{\frac{b}{a}} t)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

となることが分かります.

(2) いま,

$$f(r) = \int_0^\pi \log(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta$$

とすると,

$$f'(r) = \frac{1}{r} \int_0^\pi \left(1 + \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right) d\theta = \frac{\pi}{r} + \frac{r^2 - 1}{r} \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad (1)$$

と表わせることが分かります. ここで, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換してみると, (1) 式の右辺に現われる積分は,

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} = \frac{2}{(1 - r)^2} \int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2 + 1} \quad (2)$$

というように表わせることが分かります. したがって, (2) 式から,

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{1 - r^2}, & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{r^2 - 1}, & (|r| > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

となることが分かります. したがって, (1) 式, (2) 式, (3) 式から, $|r| < 1$ のときには,

$$f'(r) = 0$$

となることが分かりますが, $f(0) = 0$ となるので,

$$f(r) = 0 \quad (4)$$

となることが分かります. また, $|r| > 1$ のときには, $r' = \frac{1}{r}$ とすると,

$$\log(1 - 2r \cos \theta + r^2) = \log r^2 + \log(1 - 2r' \cos \theta + (r')^2)$$

となるので,

$$f(r) = \pi \log r^2 + f(r')$$

というように表わせることが分かりますが, (4) 式から, $f(r') = 0$ となること分かりますから,

$$f(r) = 2\pi \log |r|$$

となることが分かります.

(3) いま,

$$f(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx$$

とすると,

$$f'(a) = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a + 1}$$

となることが分かります. したがって, 適当な定数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$f(a) = \log(a+1) + C$$

と表わせることが分かりますが, $f(0) = 0$ となることから, $C = 0$ となることが分かります.

(4) いま,

$$F(r) = \int_0^\pi \frac{dx}{r - \cos x}$$

とすると,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(r - \cos x)^2} = -F'(r)$$

と表わせることが分かります. また, $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$F(r) = \frac{2}{r-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(\sqrt{\frac{r+1}{r-1}}t)^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{r^2-1}}$$

となることが分かります.

(5) いま,

$$f(r) = \int_0^\pi \log(1 + r \cos x) dx$$

とすると,

$$f'(r) = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{1 + r \cos x} = \frac{1}{r} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{1 + r \cos x}\right) dx = \frac{\pi}{r} - \frac{1}{r} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + r \cos x} \quad (5)$$

と表わせることが分かります. ここで, $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると, (5) 式の右辺に現れる積分は,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + r \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-r^2}} \quad (6)$$

となることが分かるので, (5) 式と (6) 式から,

$$f'(r) = \frac{\pi}{r} - \frac{\pi}{r\sqrt{1-r^2}} \quad (7)$$

となることが分かります. このとき, 問 56 の (2) の結果から,

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{1-r^2}} = \log \left| \frac{1 - \sqrt{1-r^2}}{r} \right| = -\log \left| \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \right| \quad (8)$$

となることに注意すると, (7) 式と (8) 式から, 適当な定数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$f(r) = \pi \log \left(1 + \sqrt{1-r^2}\right) + C$$

というように表わせることが分かりますが, $f(0) = 0$ となるので, $C = -\pi \log 2$ となることが分かります.

(6) いま,

$$f(\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + \cos \theta \cos x)}{\cos x} dx$$

とすると,

$$f'(\theta) = -\sin \theta \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos \theta \cos x} \quad (9)$$

となることが分かります. このとき, $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると, (9) 式の右辺に現われる積分は,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos \theta \cos x} = \frac{2}{1 + \cos \theta} \int_0^1 \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} t\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sin \theta} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}}$$

となることが分かるので,

$$f'(\theta) = -2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} \quad (10)$$

となることが分かります. ここで, $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ となることに注意すると, (10) 式から,

$$f'(\theta) = -2 \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2} = -\theta \quad (11)$$

となることが分かります. したがって, (11) 式から, 適当な定数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$f(\theta) = -\frac{\theta^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

というように表わせることが分かりますが, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ となるので, $C = \frac{\pi^2}{8}$ となることが分かります.

問 58.

(1) $F^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}F^{(n-1)}(x)$ と考えて、部分積分をしてみると、

$$\int_a^b Q(x)F^{(n)}(x)dx = \left[Q(x)F^{(n-1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b Q'(x)F^{(n-1)}(x)dx$$

となることが分かります。以下、同様に、部分積分を繰り返すと、 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x)F^{(n)}(x)dx &= \left[Q(x)F^{(n-1)}(x) - Q'(x)F^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^{k-1}Q^{(k-1)}(x)F^{(n-k)}(x)\right]_a^b \\ &\quad + (-1)^k \int_a^b Q^{(k)}(x)F^{(n-k)}(x)dx \end{aligned} \quad (1)$$

となることが分かります。¹⁴ いま、 $Q(x)$ は、 $(n-1)$ 次の多項式なので、 $Q^{(n)}(x) = 0$ となることに注意すると、(1) 式において、 $k = n$ とすることで、

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x)F^{(n)}(x)dx &= \left[Q(x)F^{(n-1)}(x) - Q'(x)F^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^{n-1}Q^{(n-1)}(x)F(x)\right]_a^b \quad (2) \end{aligned}$$

となることが分かります。

(2) いま、 n 次の多項式 $P_n(x)$ を、 $2n$ 次の多項式 $F(x)$ を用いて、

$$P_n(x) = F^{(n)}(x) \quad (3)$$

というように表わすことにします。¹⁵ このとき、 $F(x)$ から勝手な $(n-1)$ 次の多項式を引いても $F^{(n)}(x)$ は変わらないので、必要なら $F(x)$ を $(x-a)$ のべきの形に展開したときの $(x-a)$ に関して $(n-1)$ 次以下の部分を引き算することで、

$$F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = 0 \quad (4)$$

という式が成り立つように $F(x)$ を選んだとして議論を進めることにします。すると、(3) 式から、

$$0 = \int_a^b Q(x)P_n(x)dx = \int_a^b Q(x)F^{(n)}(x)dx \quad (5)$$

というように表わせますから、(2) 式、(4) 式、(5) 式から、勝手な $(n-1)$ 次以下の多項式 $Q(x)$ に対して、

$$Q(b)F^{(n-1)}(b) - Q'(b)F^{(n-2)}(b) + \dots + (-1)^{n-1}Q^{(n-1)}(b)F(b) = 0 \quad (6)$$

¹⁴ 皆さん、数学的帰納法を用いて確かめて下さい。

¹⁵ このような多項式 $F(x)$ は、 $P_n(x)$ を n 回積分することで得られます。

でなければならないことが分かります. そこで, 特に, $k = 0, 1, \dots, n-1$ として, $Q(x) = (x-b)^k$ としてみると, (6) 式から,

$$F(b) = F'(b) = \dots = F^{(n-1)}(b) = 0 \quad (7)$$

でなければならないことが分かります. よって, (4) 式と (7) 式から, 適当な多項式 $G(x)$ を用いて, $F(x)$ は,

$$F(x) = (x-a)^n(x-b)^n G(x)$$

というように表わせることが分かりますが, $F(x)$ は, $2n$ 次の多項式でしたから, $G(x) = C$, ($C \in \mathbb{R}$) となることが分かります.

逆に,

$$F(x) = C(x-a)^n(x-b)^n, \quad C \in \mathbb{R}$$

に対して, $P_n(x) = F^{(n)}(x)$ と定めると, $P_n(x)$ は n 次の多項式となりますが, (4) 式と (7) 式が成り立つことから, (2) 式と合わせて, 勝手な $(n-1)$ 次以下の多項式 $Q(x)$ に対して,

$$\int_a^b Q(x)P_n(x)dx = 0$$

となることが分かります.

(3) いま, (高階微分に関する) ライブニッツの公式を用いると,¹⁶

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n (x+1)^n \\ &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x-1)^n \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x+1)^n \end{aligned} \quad (8)$$

となることが分かります. ここで, (8) 式の右辺で $x = 1$ としたときに 0 とならないのは, $k = 0$ に対応した項だけですから,

$$\begin{aligned} P_n(1) &= \frac{1}{2^n n!} \cdot n! \cdot 2^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かります. 全く同様に, (8) 式の右辺で $x = -1$ としたときに 0 とならないのは, $k = n$ に対応した項だけですから,

$$\begin{aligned} P_n(-1) &= \frac{1}{2^n n!} \cdot (-2)^n \cdot n! \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

となることが分かります.

次に,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx$$

¹⁶(高階微分に関する) ライブニッツの公式については, 問 4 を参照して下さい.

という値について考えてみると, $m \neq n$ のときには, 例えば, $m < n$ であるとする
と, $P_m(x)$ は, $(n-1)$ 次以下の多項式になるので, (2) の結果から,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

となることが分かります.¹⁷

そこで, $m = n$ の場合を考えてみることにします. いま,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = \frac{d^n}{dx^n}(x^{2n} - nx^{2n-2} + \dots) = \frac{(2n)!}{n!}x^n - \dots$$

となることに注意して, $P_n(x)$ の $(n-1)$ 次以下の部分を $Q(x)$ と表わして, $P_n(x)$ を,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + Q(x)$$

というように表わしてみます. すると, (2) の結果から,

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + Q(x) \right\} P_n(x) dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

となることが分かります. このとき, (1) 式において, $k = n$, $Q(x) = x^n$, $F(x) = (x^2 - 1)^n$ としてみると,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n dx &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} x^n (x^2 - 1)^n dx \\ &= (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \end{aligned} \quad (10)$$

となることが分かりますから, (9) 式と (10) 式から,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \quad (11)$$

となることが分かります. さらに, 部分積分を繰り返すと, (11) 式の右辺に現われる積分は,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx &= \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} (x+1)^{n+1} dx \end{aligned}$$

¹⁷ $m > n$ のときも, 同じです.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+2} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-2} (x+1)^{n+2} dx \\
 &= \dots \\
 &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx \\
 &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned} \tag{12}$$

となることが分かりますから, (11) 式と (12) 式から,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

となることが分かります.

問 59. $8a, 5\pi^2 a^3$

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

となります. また, この曲線を x 軸の周りに回転させて得られる立体図形の体積は,

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y(\theta)^2 x'(\theta) d\theta = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^3 d\theta$$

となります. これらの積分の値を具体的に計算してみると求める結果が得られます.

問 60. $\frac{a}{2} \left\{ \omega \sqrt{1 + \omega^2} + \log \left(\omega + \sqrt{1 + \omega^2} \right) \right\}$

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_0^\omega \sqrt{\{r'(\theta)\}^2 + r(\theta)^2} d\theta = a \int_0^\omega \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

となることが分かりますが, 問 49 の結果から,

$$\int_0^\omega \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \omega \sqrt{1 + \omega^2} + \log \left(\omega + \sqrt{1 + \omega^2} \right) \right\}$$

となることが分かります.

問 61. (1) $6a$, (2) $1 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$, (3) $a \sinh \frac{b}{a}$, (4) $8a$, (5) $b\sqrt{a^2 + c^2}$.

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) 与えられた曲線の $x > 0, y > 0$ という範囲における長さを l_0 とすると,

$$l_0 = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

と表わせます. このとき, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ の両辺を, x で微分してみることで,

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

となることが分かりますから,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}$$

となることが分かります. したがって, l_0 は,

$$l_0 = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3a}{2}$$

となることが分かります.

(2) 与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

となることが分かりますが, さらに, $T = \sqrt{1+x^2}$ と変数変換してみると,

$$l = \int_2^3 \frac{T^2}{T^2 - 1} dT$$

となることが分かります.

(3) 与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^b \cosh \frac{x}{a} dx$$

となることが分かります.

(4) 与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{r'(\theta)\}^2 + r(\theta)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

となることが分かります.

(5) 与えられた曲線の長さは,

$$l = \int_0^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \int_0^b dt$$

となることが分かります.

問 62. a^2 . また, 与えられた曲線の概形は, 図 3 のようになります.

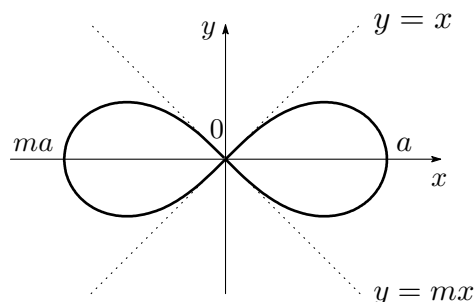


図 3: 曲線 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ の概形

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とすると, 与えられた曲線は,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi\right)$$

で与えられることが分かります. よって, 求める面積は,

$$S = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$$

となることが分かります.

問 63. $8a$, $\frac{5}{4}\pi a^2$

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とすると, 与えられた曲線は,

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

というように与えられることが分かります. また, このとき,

$$x^2 + y^2 - ax = r^2 - ar \cos \theta = a^2(1 + \cos \theta) \geq 0$$

となるので, この曲線は, 常に, 円 C の外部にあることが分かります (図 4 を参照).
したがって, 曲線の長さは,

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

となり, この曲線が囲む面積は,

$$S = 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$$

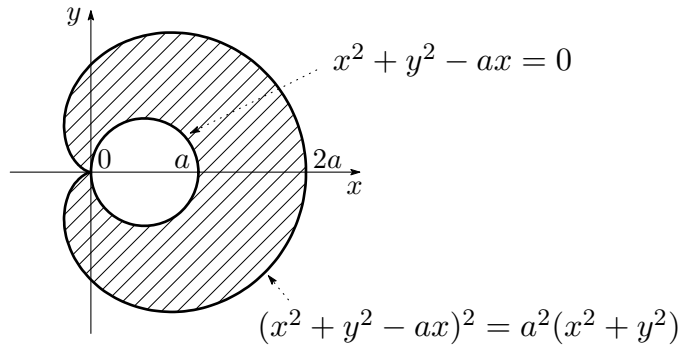


図 4: 問 63 の図

となることが分かります。また、円 C が囲む面積は、

$$S' = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

となることが分かります。

問 64. (1) $\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}$, (2) $\frac{1}{2}$, (3) $\frac{1}{2} \log 2$

問 65. それぞれの広義積分が収束することは、例えば、次のようにして分かります。

(1) $x > 1$ のとき, $1 < x$, $\sqrt{2} < \sqrt{x+1}$ となることに注意すると,

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (1)$$

と評価できることが分かります。このとき, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} < +\infty$ となることが分かりますから, (1) 式から,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} < +\infty$$

となることが分かります。同様にして、例えば, $x \geq 2$ のとき,

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (2)$$

と評価できることが分かります。このとき, $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} < +\infty$ となることが分かりますから, (2) 式から,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int_2^\infty \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

となることが分かります。

(2) $-1 < x < 1$ のとき, $|x| < 1$, $|\sin^{-1} x| < \frac{\pi}{2}$ となることに注意すると,

$$\left| \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

と評価できることが分かります. さらに, $-1 < x \leq 0$ とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (4)$$

と評価できることと, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} < +\infty$ となることに注意すると, (3) 式, (4) 式から,

$$\int_{-1}^0 \left| \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} < +\infty$$

となることが分かります. 同様にして, $0 \leq x < 1$ とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (5)$$

と評価できることと, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} < +\infty$ となることに注意すると, (3) 式, (5) 式から,

$$\int_0^1 \left| \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} < +\infty$$

となることが分かります.

(3) $0 < x \leq 1$ のときには, $\sqrt{2-x} \geq 1$ となることから,

$$\frac{1}{\sqrt{|x(x-2)|}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

となることが分かります. このとき, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$ となることが分かりますから, (6) 式から,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$$

となることが分かります. また, $1 \leq x < 2$ のときには, $\sqrt{x} \geq 1$ となることから,

$$\frac{1}{\sqrt{|x(x-2)|}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \quad (7)$$

となることが分かります. このとき, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} < +\infty$ となることが分かりますから, (7) 式から,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}} \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} < +\infty$$

となることが分かります. 最後に, $2 < x \leq 3$ のときには, $\sqrt{x} \geq \sqrt{2}$ となることから,

$$\frac{1}{\sqrt{|x(x-2)|}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \quad (8)$$

となることが分かります. このとき, $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} < +\infty$ となることが分かりますから, (8) 式から,

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} < +\infty$$

となることが分かります.

(4) 例えば, $f(x) = x^{-1/2} \log x$ として, $f(x)$ の増減表を調べてみると, $x \geq 1$ のとき,

$$f(x) \leq f(e^2) = \frac{2}{e} \quad (9)$$

となることが分かります. よって, (9) 式から, $x \geq 1$ のとき,

$$\frac{\log x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^{3/2}} \leq \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \quad (10)$$

と評価できることが分かります. このとき, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < +\infty$ となることが分かりますから, (10) 式から,

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx \leq \frac{2}{e} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < +\infty$$

となることが分かります.

(5) $x \geq 0$ のとき,

$$\frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}} \leq \frac{1}{e^{ax}} \quad (11)$$

と評価できることが分かります. このとき, $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax}} < +\infty$ となることが分かりますから, (11) 式から,

$$\int \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}} \leq \int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax}} < +\infty$$

となることが分かります.

(6) $x \geq 1$ のとき,

$$\frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad (12)$$

と評価できることが分かります. このとき, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} < +\infty$ となることが分かりますから, (12) 式から,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^3} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} < +\infty$$

となることが分かります.

また, それぞれの積分の値は次のようになります.

$$(1) \frac{\pi}{2}, \quad (2) 2, \quad (3) \pi + \log(2 + \sqrt{3}), \quad (4) 1, \quad (5) \frac{\pi}{4a}, \quad (6) \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) $t = \frac{1}{x}$ と変数変換してみると,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

となることが分かります.

(2) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = (-\sqrt{1-x^2})'$ と考えて、部分積分をしてみると、

$$\int_{-1}^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 dx$$

となることが分かります。

(3) 積分区間を、 $0 \leq x \leq 2$ と $2 \leq x \leq 3$ とに分けて考えてみると、与えられた積分は、

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$$

というように表わせることが分かります。

(4) $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ と考えて、部分積分をしてみると、

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

となることが分かります。

(5) $t = e^{ax}$ と変数変換してみると、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{a} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2 + 1}$$

となることが分かります。

(6) 被積分関数は、

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

というように部分分数展開できることが分かります。

問 66. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ となることから、

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

となることに注目して、

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x)$$

なる関数の増減表を調べてみると、 $x \geq 0$ のとき、 $f(x) \geq 0$ となることが分かります。したがって、 $x \geq 0$ のとき、

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

となることが分かります。したがって、(1) 式から、

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx = \frac{1}{2} < +\infty \quad (2)$$

となることが分かります。また、 $1 - \cos x \leq 2$ より、

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2} \quad (3)$$

となることが分かります. このとき, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < +\infty$ となることが分かりますから, (3) 式から,

$$\int_1^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \leq 2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < +\infty \quad (4)$$

となることも分かります. したがって, (2) 式, (4) 式から, $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ が存在することが分かります.

問 67. 題意を示すためには, 例えば,

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

と分解して, $I_1 = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ と $I_2 = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ の両方が存在することを示せば良いことになります.

そこで, まず, I_1 について考えてみます. すると, $p \geq 1$ のときには, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ は, 閉区間 $[0, \frac{1}{2}]$ 上の連続関数となるので, I_1 は存在することが分かります. また, $0 < p < 1$ のときには, $0 < x \leq \frac{1}{2}$ に対して, $q \geq 1$ ならば,

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} \quad (1)$$

と評価でき, $0 < q < 1$ ならば,

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq 2^{1-q} x^{p-1} \quad (2)$$

と評価できることが分かります. このとき, $\int_0^{1/2} x^{p-1} dx < +\infty$ となることが分かりますから, (1) 式, あるいは, (2) 式から, いずれの場合にも,

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx < +\infty$$

となり, I_1 が存在することが分かります. 以上より, $p > 0, q > 0$ に対して, I_1 が存在することが分かります.

全く同様に, $p > 0, q > 0$ に対して, I_2 が存在することも分かります.¹⁸

問 68. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta)^m \sin \theta d\theta$ というように書き直せることに注意して, $t = \cos^2 \theta$ と変数変換してみると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^m t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2})$$

となることが分かります.

¹⁸ 皆さん, 確かめてみて下さい.

問 69. (1) $\int_0^a \left\{ \int_x^a f(x, y) dy \right\} dx$, (2) $\int_0^{a^2} \left\{ \int_{a-\sqrt{a^2-y}}^{a+\sqrt{a^2-y}} f(x, y) dx \right\} dy$,
 (3) $\int_0^{ma} \left\{ \int_{y/n}^{y/m} f(x, y) dx \right\} dy + \int_{ma}^{na} \left\{ \int_{y/n}^a f(x, y) dx \right\} dy$,
 (4) $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \left\{ \int_{\pi/4}^{\sin^{-1} r} f(r, \theta) d\theta \right\} dr + \int_1^2 \left\{ \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(r, \theta) d\theta \right\} dr$

これらの書き換えは、例えば、次のようにして行なうことができます。

(1) いま、積分領域 D が有界閉区間 $[a, b] \times [c, d]$ に含まれているとして、

$$\begin{aligned} \int_c^d \left\{ \int_{I_y} f(x, y) dx \right\} dy &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{J_x} f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned} \quad (1)$$

というように、Fubini の定理を二回用いることで、与えられた積分を書き直すことを考えてみます。ただし、(1) 式において、 $y \in [c, d]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(x, y) \in D$ となる x の範囲を、

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D\}$$

と表わし、 $x \in [a, b]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(x, y) \in D$ となる y の範囲を、

$$J_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D\}$$

と表わしました。

そこで、まず、与えられた積分を、

$$\int_0^a \left\{ \int_0^y f(x, y) dx \right\} dy = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2)$$

というように、重積分の形に表わしたときに、その積分領域 D がどのようなものかということを考えてみます。すると、(2) 式から、 $y \in [0, a]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(x, y) \in D$ となる x の範囲は、

$$I_y = [0, y]$$

となることと、 y は $y \in [0, a]$ という範囲を動くということから、積分領域 D は、図 5 のようになることが分かります。よって、図 5 から、 $x \in [0, a]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(x, y) \in D$ となる y の範囲は、

$$J_x = [x, a]$$

となることと、 x は $x \in [0, a]$ という範囲を動くことが分かりますから、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^a \left\{ \int_x^a f(x, y) dy \right\} dx$$

というように書き直せることが分かります。

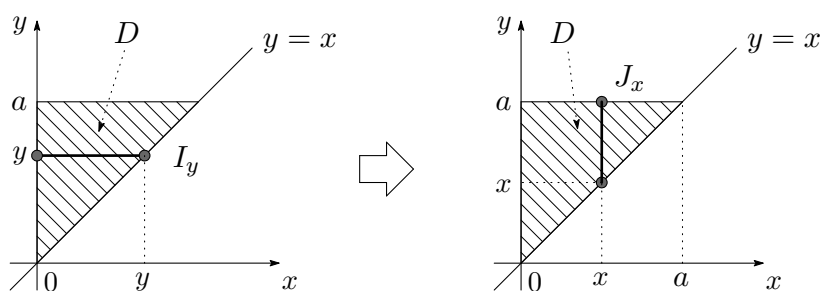


図 5: 積分領域 D の様子

(2) (1) と同様に, まず, 与えられた積分を,

$$\int_0^{2a} \left\{ \int_0^{2ax-x^2} f(x, y) dy \right\} dx = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (3)$$

というように, 重積分の形に表わしたときに, その積分領域 D がどのようなものかということを考えてみます. すると, (3) 式から, $x \in [0, 2a]$ を, 勝手にひとつ固定したときに, $(x, y) \in D$ となる y の範囲は,

$$J_x = [0, 2ax - x^2]$$

となることと, x は $x \in [0, 2a]$ という範囲を動くということから, 積分領域 D は, 図 6 のようになることが分かります. よって, 図 6 から, $y \in [0, a^2]$ を, 勝手にひとつ固定したと

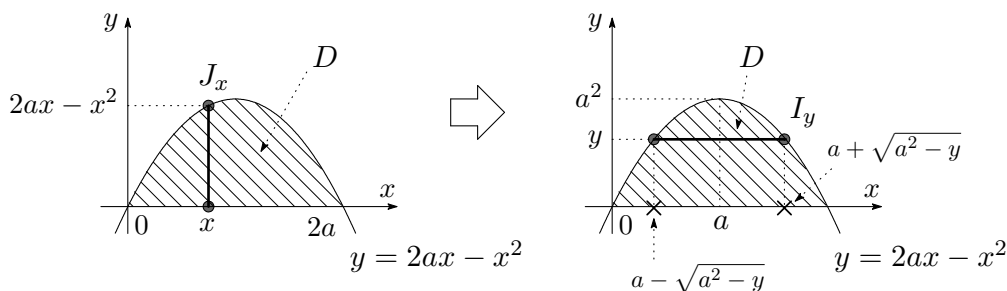


図 6: 積分領域 D の様子

きに, $(x, y) \in D$ となる x の範囲は,

$$I_y = [a - \sqrt{a^2 - y}, a + \sqrt{a^2 - y}]$$

となることと, y は $y \in [0, a^2]$ という範囲を動くことが分かりますから,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{a^2} \left\{ \int_{a-\sqrt{a^2-y}}^{a+\sqrt{a^2-y}} f(x, y) dx \right\} dy$$

というように書き直せることが分かります.

(3) (1) と同様に、まず、与えられた積分を、

$$\int_0^a \left\{ \int_{mx}^{nx} f(x, y) dy \right\} dx = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (4)$$

というように、重積分の形に表わしたときに、その積分領域 D がどのようなものかということを考えてみます。すると、(4) 式から、 $x \in [0, a]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(x, y) \in D$ となる y の範囲は、

$$J_x = [mx, nx]$$

となることと、 x は $x \in [0, a]$ という範囲を動くということから、積分領域 D は、図 7 のようになることが分かります。よって、図 7 から、 $y \in [0, na]$ を、勝手にひとつ固定したとき

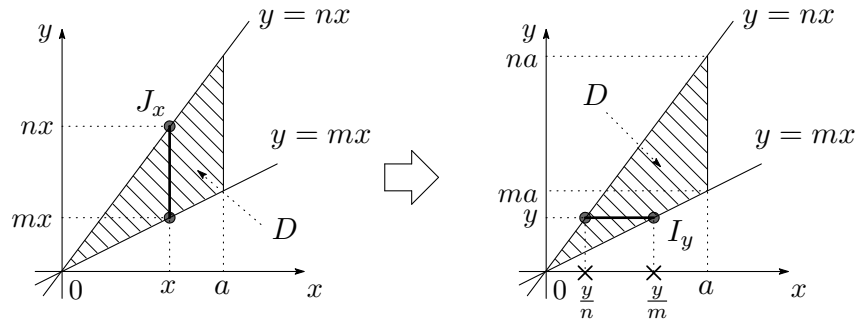


図 7: 積分領域 D の様子

に、 $(x, y) \in D$ となる x の範囲は、 $0 \leq y \leq ma$ のとき、

$$I_y = \left[\frac{y}{n}, \frac{y}{m} \right]$$

となり、 $ma \leq y \leq na$ のとき、

$$I_y = \left[\frac{y}{n}, a \right]$$

となることが分かりますから、 y の積分範囲を、

$$[0, na] = [0, ma] \cup [ma, na]$$

というように二つに分けて考えることで、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{ma} \left\{ \int_{y/n}^{y/m} f(x, y) dx \right\} dy + \int_{ma}^{na} \left\{ \int_{y/n}^a f(x, y) dx \right\} dy$$

というように書き直せることが分かります。

(4) (1) と同様に、まず、与えられた積分を、

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left\{ \int_{\sin \theta}^2 f(r, \theta) dr \right\} d\theta = \iint_D f(r, \theta) dr d\theta \quad (5)$$

というように、重積分の形に表わしたときに、その積分領域 D がどのようなものかということを考えてみます。すると、(5) 式から、 $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ を、勝手にひとつ固定したときに、 $(r, \theta) \in D$ となる r の範囲は、

$$J_\theta = [\sin \theta, 2]$$

となることと, θ は $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ という範囲を動くということから, 積分領域 D は, 図 8 のようになることが分かります. よって, 図 8 から, $r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 2]$ を, 勝手にひとつ固定したと

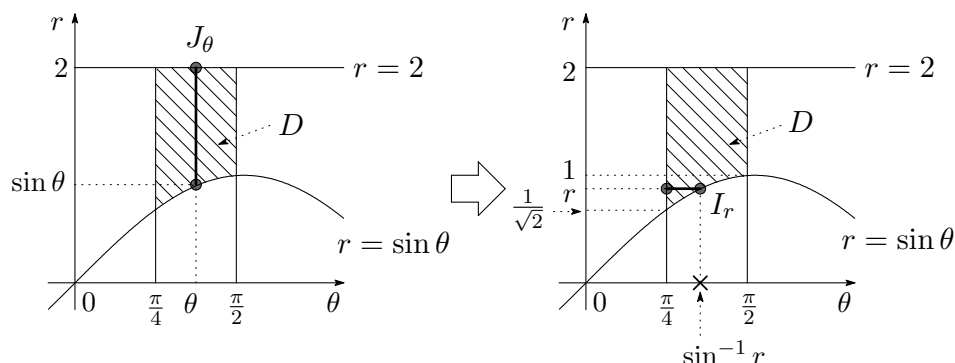


図 8: 積分領域 D の様子

きに, $(r, \theta) \in D$ となる θ の範囲は, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1$ のとき,

$$I_\theta = \left[\frac{\pi}{4}, \sin^{-1} r \right]$$

となり, $1 \leq r \leq 2$ のとき,

$$I_\theta = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

となることが分かりますから, r の積分範囲を,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \cup [1, 2]$$

というように二つに分けて考えることで,

$$\iint_D f(r, \theta) dr d\theta = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left\{ \int_{\pi/4}^{\sin^{-1} r} f(r, \theta) d\theta \right\} dr + \int_1^2 \left\{ \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(r, \theta) d\theta \right\} dr$$

というように書き直せることが分かります.

問 70. $\frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})$

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

積分の順番を交換してみると,

$$\int_0^a \left\{ \int_y^a e^{-x^2} dx \right\} dy = \int_0^a e^{-x^2} \left\{ \int_0^x dy \right\} dx = \int_0^a x e^{-x^2} dx$$

となることが分かります.

問 71. $\log \frac{3}{2}$

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

積分の順番を交換してみると,

$$\int_0^1 \left\{ \int_1^2 x^y dy \right\} dx = \int_1^2 \left\{ \int_0^1 x^y dx \right\} dy = \int_1^2 \frac{dy}{y+1}$$

となることが分かります.

問 72. (1) $\frac{a^3}{3}$, (2) $2\pi a$, (3) $\frac{\pi^2 a^2}{16}$

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

極座標に変数変換してみると, それぞれの積分は次のようになることが分かります.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \iint_D x \, dx dy = \left\{ \int_0^a r^2 dr \right\} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right\} \\ (2) \quad & \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \left\{ \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} \\ (3) \quad & \iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} \, dx dy = \left\{ \int_0^a r dr \right\} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

問 73. (1) $\pi a^2(2 \log a - 1)$, (2) $\frac{\pi a^2}{2}(\pi - 2)$

これらの値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

(1) 極座標に変数変換してみると,

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) \, dx dy = \left\{ \int_0^a r \log r^2 dr \right\} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\}$$

となることが分かります. また, $r = \left(\frac{r^2}{2}\right)'$ と考えて, 部分積分してみると,

$$\int_0^a r \log r dr = \left[\frac{r^2}{2} \log r \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a r dr$$

となることが分かります.

(2) 極座標に変数変換してから, θ に関して積分してみると,

$$I = \iint_D \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2 + x^2 + y^2}} \, dx dy = 2\pi \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}} r dr$$

となることが分かります. そこで, $R = r^2$ と変数変換してみると,

$$I = \pi \int_0^{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - R}{a^2 + R}} dR$$

となることが分かりますが, さらに, $t = \sqrt{\frac{a^2 - R}{a^2 + R}}$ と変数変換してみると,

$$I = 4\pi a^2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt$$

となることが分かります.

問 74. $\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}$

この値は, 例えば, 次のようにして求めることができます.

いま, 被積分関数, 及び, 積分領域は, x 軸に関して対称なので,

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$$

として,

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy = 2 \iint_{D'} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy \quad (1)$$

と表わせることが分かります. また, D' という領域を極座標を用いて表わすと,

$$0 \leq r \leq \cos \theta, \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

という条件で表わせることが分かります. したがって, (1) 式, (2) 式から,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\cos \theta} \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr \right\} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[-\frac{1}{3} (1 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\cos \theta} \right\} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \end{aligned}$$

となることが分かります.