数学 IB 演習問題

問 1. 逆三角関数について, $S = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y$ とするとき, 次のことを示せ.

$$-\frac{\pi}{2} \leq S \leq \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad S = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

問 2. 次の関数を微分せよ.

(1) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}$

(3) $(\sin ax)^b(\cos bx)^a$　　(4) $\cos^{-1}(2\sin x)$

(5) $\log\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$　　(6) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

問 3. $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}\right)$$

を求めよ.

問 4. n 回微分可能な関数 f, g に対して, ライプニッツの公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}f}{dx^{n-k}}\cdot\frac{d^k g}{dx^k}$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, 二項係数を $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ と表わした.

問 5*. 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

問 **6.** 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}}$$

問 **7.** $\sqrt{1+x}$ の $x=0$ のまわりでの *Taylor* 展開を求めよ.

問 **8.** 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

問 **9.** $e^x\sqrt{1-x}$ の原点における *Taylor* 展開を x^3 の項まで求めよ.

問 **10.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(e^x-\frac{1+ax}{1+bx}\right)$ が存在するとき, a, b の値と, この極限値を求めよ.

問 **11.** $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて,

$$\sin^{-1}x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

を示せ. また, これを用いて,

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{\pi}{6}$$

を示せ.

問 **12.** 次の関数の $x=0$ のまわりでの *Taylor* 展開を x^6 の項まで求めよ.

(1) $\log(\cos x)$
(2) $\tan x$

問 **13.** $(1+x)^x$ の原点における *Taylor* 展開を x^6 の項まで求めよ.

問 14*. 正の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ について, 次の極限を計算せよ.

$$(1)\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}$$

問 15. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - 1} - \sqrt{1-x}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x}\right)$

問 16. 次の式が成り立つように, 係数 $a_n (n = 0, 1, \ldots)$ を定めよ.

$$\log(x^3 + 2x^2 + x + 2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

問 17*. 関数 $\log(x + \sqrt{1 + x^2}\,)$ をベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表わせ.

問 18*. *Taylor* の定理より,

$$e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する. これを用いて e が無理数であることを証明せよ.

問 19. *Taylor* の定理により, $y = \cos x$ の近似多項式を求め, それを利用して $\cos 1$ の値を少数点以下 3 桁まで正確に求めよ.

問 20. ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot z^n$ の表わす関数を求めよ. それを用いて, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ を求めよ.

問 21. 次のベキ級数で表わされる関数を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}z^n$

問 22. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ.

問 23*. 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\log n)^p}$ が収束する実数 p の範囲をもとめよ.

問 24*. 調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するが, 自然数 n の十進表示において数字 9 が現われる項 $\dfrac{1}{n}$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ から全て取り除いて得られる級数は収束することを証明せよ.

問 25. 次の級数の収束, 発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-1-\frac{1}{n}\right)$

問 26*. 次の級数の収束, 発散を調べよ. 但し, x は実数とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\log n}}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+n}\quad(a>0)$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2-n+1}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\log(1+n)}{3^n}\cdot x^n$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx-\cos nx}{n^{3/2}}$

問 27. 次のベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}x^n$

問 **28.** 次のベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad (\alpha\neq0,1,2,\cdots)$

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n$ (7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}x^n, \quad (|q|<1)$

問 **29*.** $c_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ とする. このとき, ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ の収束半径を求めよ.

問 **30.** 以下の関数の原点における *Taylor* 展開を求め, その収束半径を求めよ.

$$\log\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}$$

問 **31.** 次の関数 f に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ (2) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

問 **32.** $f(x,t)=\dfrac{e^{-(x^2/4t)}}{\sqrt{t}}$, $(x,t\in\mathbb{R},t>0)$ は,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial t}$$

を満たすことを示せ.

問 **33.** $f(x,y)=\sin(x^2+xy)$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

問 **34.** $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき, 次の式を極座標 r, θ を用いて表わせ. すなわち, 関数 $f(x,y)$ に対して, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とするとき, 次の式を, $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ などを用いて表わせ.

(1) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (2) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (3) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (5) $y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

問 **35.** 次のような $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ が極値を取る点を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - y + 2y^3$
(2) $f(x,y) = xy(a - x - y), \quad (a \neq 0)$
(3) $f(x,y) = x^5 - x^2y + y^2$

問 **36.** (x,y) が円盤 $x^2 + y^2 \leq 5$ を動くとき,

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

の最小値を求めよ.

問 **37.** $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ における,

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

の最大値を求めよ.

問 **38.** 次の関数の極値点を求め, 極大, 極小を判定せよ.

(1) $xye^{-x^2-y^2}$
(2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx - 2xy$
(3) $(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2$

問 **39.** 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $3x^2 + 2xy + y^2$ の極値を求め, 極大, 極小を判定せよ.

問 **40.** 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $2x^3 + y$ の最大値を求めよ.

問 **41.** 条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで, xyz の最大値を求めよ.

問 **42.** $\mathbb{R}^3$ における曲面 $2xy+z^2-1=0$ と, 点 $(1,1,2)$ との最短距離を求めよ.

問 **43*.** 条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで, $x^2+y^2-z^2+4xz+4yz$ の最大値, 最小値を求めよ.

● 以下の問では, 与えられた条件式の定める曲線が, $(x,y)=(0,0)$ で, 特異点 (= 陰関数定理が成り立たないような点) を持っている. これらの場合に, Lagrange の未定乗数法を試みることと, 与えられた条件式を, y について解いてしまい, それぞれ,

$$\begin{cases} (x-1)^2+\frac{x^3}{1-x} & (0 \le x < 1) \\ \pm x^2\sqrt{x+1} & (-1 \le x) \end{cases}$$

という関数の極値を直接求めることを試み, Lagrange の未定乗数法だけでは, 特異点での様子を知ることはできず, 特異点のある場合には, 特異点での考察を別個に行わないといけないことを認識せよ.

問 **44*.** 条件 $x^3=(1-x)y^2$ のもとで, $(x-1)^2+y^2$ の極値を求めよ.

問 **45*.** 条件 $x^2(x+1)=y^2$ のもとで, xy の極値を求めよ.

問 46. 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{x^2+6x+8}$ (2) $\dfrac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}$ (3) $\dfrac{3x}{x^2-x-2}$

(4) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)}$ (5) $\dfrac{x}{x^2+2x-3}$ (6) $\dfrac{x}{x^4-1}$

(7) $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$

問 47. 原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1-x^3}$ (2) $\dfrac{1}{x^4+1}$ (3) $\dfrac{1}{1-x^4}$

(4) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$ (5) $\dfrac{1}{1-x^6}$ (6) $\dfrac{x^7}{x^{12}-1}$

(7) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^3)}$ (8) $\dfrac{x^5}{(1+x^2)^3}$ (9) $\dfrac{x}{1+x+x^2+x^3}$

(10) $\dfrac{1-x^2}{x(1+x^2+x^4)}$

問 48. $x_0^2-y_0^2=R^2$ のとき, 次の定積分の値を x_0 と y_0 で表わせ.

$$A=\int_0^{y_0}\frac{dy}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

ただし, $R>0, x_0>0, y_0>0$ とする.

問 49. 問 *48* と同じ条件のもとで,

$$B=\int_0^{y_0}\sqrt{R^2+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\left(x_0y_0+R^2\log\frac{x_0+y_0}{R}\right)$$

を示せ.

問 50.

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(x-t)^2}{1+t^2}dt$$

とする. このとき, $F(x)$ の $x=0$ における *Taylor* 展開を求めよ. また, 積分を実行して, $F(x)$ を求めよ.

問 51. 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $x^\alpha \log x, \quad (\alpha \neq -1)$
(2) $x^n e^x \quad (n \in \mathbb{N})$
(3) $(\log x)^n \quad (n \in \mathbb{N})$
(4) $\sin^{-1} x$
(5) $\cos^2 x$
(6) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$
(7) $\dfrac{(x^2+2)}{(x+1)^3}$
(8) $\sin^3 x \cos^2 x$
(9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
(10) $e^{ax}\cos bx, \quad (a^2+b^2 \neq 0)$

問 52. 次の不等式が成り立つことを示せ.

(1) $\log(1+\sqrt{2}) \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1, \quad (n \geq 2)$

(2) $\dfrac{\pi}{2} \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{1}{R}(1-e^{-\frac{\pi}{2}R}) \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}dx \leq \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), \quad (R>0)$

問 53. 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$
(2) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
(3) $\dfrac{1}{a\sin x + b\cos x}, \quad (b \neq 0)$
(4) $\dfrac{1}{a+b\cos x}$
(5) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

問 54. 次の積分 I_n に関する漸化式を作れ.

(1) $I_n = \displaystyle\int \tan^n x dx$
(2) $I_n = \displaystyle\int \sin^n x \cos^m x dx, \quad (n+m \neq 0)$
(3) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n dx$
(4) $I_n = \displaystyle\int x^m (\log x)^n dx$
(5) $I_n = \displaystyle\int (\sin^{-1} x)^n dx$

問 **55.** 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{ax-x^2}},\ (a>0)$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(4) $\sqrt{\dfrac{x+a}{x+b}}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}$ (6) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

(7) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ (8) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}},\quad (\alpha<\beta)$ (9) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(10) $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (11) $\sqrt{\dfrac{a+x}{b-x}}$ (12) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

(13) $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

問 **56.** 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2+x+1}}$ (2) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

(4) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ (5) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ (6) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

(7) $\dfrac{1}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$ (8) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ (9) $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$

問 **57.** パラメータに関する微分を用いて, 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^2},\quad (a,b>0)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta,\quad (r\in\mathbb{R},\ r^2\neq 1)$

(3) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^a-1}{\log x}dx,\quad (a\geq 0)$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(r-\cos x)^2},\quad (r>1)$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1+r\cos x)dx,\quad (|r|<1)$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\log(1+\cos\theta\cos x)}{\cos x}dx,\quad (0<\theta<\pi)$

問 **58.**

(1) $a,b\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ として, $Q(x)$ を $(n-1)$ 次の多項式, $F(x)$ を $2n$ 次の多項式とする. このとき,

$$\int_a^b Q(x)F^{(n)}(x)dx=\Big[Q(x)F^{(n-1)}(x)-Q'(x)F^{(n-2)}(x)+\cdots+(-1)^{n-1}Q^{(n-1)}(x)F(x)\Big]_a^b$$

となることを示せ.

(2) $(n-1)$ 次以下のすべての多項式 $Q(x)$ に対して, $\displaystyle\int_a^b Q(x)P_n(x)dx=0$ となるような n 次の多項式 $P_n(x)$ は,

$$P_n(x)=C\frac{d^n}{dx^n}\{(x-a)^n(x-b)^n\},\quad C\in\mathbb{R}$$

と書けることを示せ.

(3) $a=-1, b=1, C=\frac{1}{2^n n!}$ として, $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とする. このとき, $m,n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2dx=\frac{2}{2n+1},\quad \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx=0,\quad (m\neq n)$$

となることを示せ.

問 **59.** $a>0$ として, 次の式で与えられる曲線の長さを求めよ.

$$\begin{cases} x(\theta)=a(\theta-\sin\theta) \\ y(\theta)=a(1-\cos\theta)\end{cases},\quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

また, この曲線を x 軸の周りに回転させて得られる立体図形の体積を求めよ.

問 **60.** $a>0$ として, 極方程式

$$r(\theta)=a\theta$$

で与えられる曲線の $0\le\theta\le\omega$ の部分の長さを求めよ.

問 **61.** $a>0$ とするとき, 次の曲線の長さを求めよ.

(1) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

(2) $y=\log x,\quad (\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8})$

(3) $y=a\cosh\dfrac{x}{a},\quad (0\le x\le b)$

(4) $r=a(1+\cos\theta),\quad (0\le\theta\le 2\pi)$

(5) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ct\end{cases},\quad (0\le t\le b)$

問 **62.** $a > 0$ とする．このとき，曲線 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ の概形を描き，それが囲む部分の面積を求めよ．

問 **63.** $a > 0$ とする．このとき，曲線 $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2)$ の円 $x^2+y^2-ax = 0$ の外部にある部分の曲線の長さ，および，この曲線の囲む部分の面積を求めよ

問 **64.** 以下の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^n} \quad (n > 1)$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$

問 **65.** 以下の広義積分が収束することを示し，その値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}}$ (4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\ dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}, \quad (a > 0)$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

問 **66.** 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\ dx$$

が存在することを示せ．

問 **67.** $p > 0, q > 0$ とするとき，広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ dx$$

が存在することを示せ．

問 **68.** 自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B(m+1, \frac{1}{2})$$

となることを示せ．

問 69. $f(x,y)$ は連続関数を表わすものとして, 以下の累次積分の順序を交換せよ. ただし, a,m,n は, $a>0, n>m>0$ なる定数とする.

(1) $\displaystyle\int_0^a \left\{\int_0^y f(x,y)dx\right\} dy$ (2) $\displaystyle\int_0^{2a} \left\{\int_0^{2ax-x^2} f(x,y)dy\right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^a \left\{\int_{mx}^{nx} f(x,y)dy\right\} dx$ (4) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left\{\int_{\sin\theta}^{2} f(r,\theta)dr\right\} d\theta$

問 70. $a>0$ とするとき, 積分

$$\int_0^a \left\{\int_y^a e^{-x^2}dx\right\} dy$$

の値を求めよ.

問 71. 累次積分

$$\int_0^1 \left\{\int_1^2 x^y dy\right\} dx$$

の値を求めよ.

問 72. 以下の二重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq a^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\}$

問 73. $a>0$ とし, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq a^2\}$ とする. このとき, 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2+x^2+y^2}}\,dxdy$

問 74. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq x\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$