

数学 IB 演習の進め方について (冬学期)

1 毎回の演習問題について

皆さんから、特に強い要望や不満がなければ、冬学期も夏学期と同様の形式で、微積分学の演習を進めて行こうと思います。講義の方では、「一変数関数の微積分」と「多変数関数の微積分」という形で夏学期と冬学期を分けているクラスもありますので、演習と講義の進度が若干ずれてしまうことがあります。一年間を通して、皆さんに微積分学の基本的な考え方に一通り触れていただく方が良いでしょうと思いますので、取りあえず、講義の進度とは関係なしに、この演習を続けたいと思います。

この演習の始めに注意したように、数学を学ぶ上では、自分のペースでじっくりと取り組むことが大切です。ですから、私が毎回出題する問題に必ずしも捕らわれずに、講義や、いま自分で勉強していることに合わせて、自由に勉強していただいても構いません。例えば、夏学期に学ばれた事柄をもう一度きちんと考えてみたいと思われる方は、それに合わせて、夏学期に配った演習の対応する部分の問題を問いていただいても構いません。

夏学期にも注意しましたが、毎回の演習問題は、皆さんの現在の知識を確認することを目的として出題しているというよりは、皆さんが現在持っている知識をもとにして、あれこれ思考錯誤することにより、微積分学における基本的な考え方を具体例を通してより良く理解する助けになれば良いと考えて出題しています。ですから、その場で時間内に解けなかったというようなことは気にせずに、じっくりと取り組んでいただければと思います。また、微積分学の基本的な考え方に一通り触れていただくという点でも、時間内に解けなかった問題でも、演習が終わった後で一通り触れる機会を持ていただけると、理解の助けになることもあるのではないかと思います。

また、この演習では「どのようなことを問題にして、それをどのようなアイデアで解決しようとしているのか」ということを、なるべくハッキリとした形で説明したいと考え、そのような目的で毎回の問題を選んでいるのですが、二週間に一度という演習時間の制約の中でそれを行なおうとすると、基本的な計算練習を多く取り入れるということは、どうしても難しくなってしまいます。ですから、もっと基本的な計算練習から入りたいと思われる方は、自分で適当な教科書や演習書を用意して、そうした計算練習を行なって下さい。そのようにして、少し微積分学に対する感覚が付いてきたと思われる頃に、毎回お配りする演習問題に取り組んでいただいて、基本的な問題点や、それを解決するアイデアは何であるのかということを反省していただくと、より理解が進むこともあるのではないかと思います。

それから、基本的なアイデアを説明するという観点から、演習問題に対する解説の中で、必ずしも一年生の微積分学の範囲に捕らわれずに、少し進んだ話題に触れた部分もありま

す。そのような部分の解説は、最初は少し難しいというような印象を与えるかもしれませんが、あまり気にせず読み飛ばしてもらえればと思います。こうした部分の解説は、皆さんに数学におけるものの見方を紹介してみようと思ったのと、将来、皆さんが、それぞれの道に進まれた後で、もう一度、微積分学についてじっくり考え直してみたいと思われたときに、何らかのヒントになれば良いと考えて付け加えました。ですから、一読してよく分からないということがあってもあまり気にしないで下さい。そして、もし、そのよう進んだ事柄の中にもっと知ってみたいと思う部分があれば、皆さん自身で適当な教科書を用意して、どんどん先へ進めると良いのではないかと思います。

2 微積分学における基本的な考え方 (積分に関するもの)

夏学期に引き続き、「微積分学の基本的な考え方」として、どのようなものがあって、それをどの回の演習で取り上げる予定なのかということを少しだけ説明しておく、皆さんの中にも演習問題に取り組みやすくなるように感じる方があるかもしれません。そこで、ここでは、冬学期の演習で取り上げようと考えている内容について少し説明してみることにします。この演習では、前半の第1回から第7回までで「微分」に関する基本的な考え方を、また、後半の第8回から第13回までで「積分」に関する基本的な考え方を取り上げることにしていますので、ここでは、後半で取り上げる予定である「積分」に関する基本的な考え方について少し説明してみることにします。

微積分学において、積分に関する部分の大きな目標は「積分の概念をより良く理解して、例えば、曲線の長さや図形の面積や体積、あるいは、物の重心など、いろいろな量を積分で正しく表わして調べられるようになる」ということにあります。ただし、実際の数学の講義や教科書では、「いろいろな量を積分で正しく表わして調べられるようになる」という部分については、将来、皆さんがそれぞれの分野に進まれたときの課題として残して、そのための基礎として、「Riemann 和の極限として積分の値を定義するという Riemann 積分の考え方」を説明することや、「そうして定義された積分の値を具体的に求める方法」などについて説明することに重点が置かれていることが多いです。言葉の説明は後回しにして、積分に関する基本事項を図にまとめるとおおよそ次のようになります。

— 変数関数の積分に関する基本事項 —

— Riemann 和の極限としての積分の概念 —

有界閉区間上の積分の値を, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の極限として定義する Riemann 積分の考え方を理解する.

- Riemann 積分の定義

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta x_i\end{aligned}$$

↓
積分の値を求めるための方法

— 微積分学の基本定理 —

積分の値を求めるためには, 被積分関数の原始関数を求めればよいことを理解する.

- 微積分学の基本定理

↓
積分の値を求めるための補助的な手段

— 置換積分と部分積分 —

置換積分や部分積分の公式を正しく理解して, 具体的な積分の計算に役立てる.

- 置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- 部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

↓
系統的に原始関数を求めることができる場合

— できる積分 —

系統的に原始関数を求めることができる場合について, その仕組みをより良く理解して, 原始関数を求めることができるようになる.

- 有理関数の積分と部分分数展開
- 三角関数や指数関数の有理式の積分
- x と $\sqrt{x}$ の二次式の有理式の積分

↓
積分の応用

— 積分の概念の応用 —

Riemann 和の極限としての Riemann 積分の考え方をを用いて, 曲線の長さや回転体の体積・表面積など, 様々な量が積分を用いて表わせることを理解する.

- 曲線の長さ, 回転体の体積・表面積など

↓
積分の概念の拡張

— 広義積分 —

有界閉区間上の積分の概念の拡張として, 積分区間が無限に伸びている場合や, 積分区間の端っこで被積分関数が定義できない場合の積分の値をどのように定義することができるのかを理解する. また, このような広義積分の値がいつきちんと定まるのかということを判定できるようになる.

- 広義積分
- 絶対収束と優関数による収束判定法

— 多変数関数の積分に関する基本事項 —

— Riemann 和の極限としての積分の概念 —

有界閉区間上の積分の値を, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の極限として定義する Riemann 積分の考え方を理解する.

- Riemann 積分の定義

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\gamma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

↓ 積分領域を一般化する

— 有界閉領域上の積分 —

有界閉区間上の積分の概念をもとにして, 有界閉領域上の積分の値をどのように定義することができるのかを理解する.

- 有界閉領域上の積分

↓ 積分の値を求めるための方法

— Fubini の定理 —

多変数関数に対する積分の値を, 一変数関数に対する積分を繰り返すことで求めることができることを理解する.

- Fubini の定理

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

↓ 積分の値を求めるための補助的な手段

— 変数変換の公式 —

一変数関数の積分の場合の置換積分の公式が, 多変数関数の積分の場合にどのような形で拡張されるのかを理解する.

- 変数変換の公式

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \cdot |J(s,t)| ds dt$$

↓ 積分の概念の拡張

— 広義積分 —

有界閉領域上の積分の概念の拡張として, 積分区間が無限に伸びている場合など積分の値をどのように定義することができるのかを理解する. また, このような広義積分の値がいつきちんと定まるのかということを判定できるようになる.

- 広義積分
- 絶対収束と優関数による収束判定法

理論的には少し進んだ話題なので, 上の図の中には含めませんでした, 実際に積分の値を求めるときには, 置換積分や部分積分といった方法以外にも, 被積分関数を Taylor 展開して考えるという方法や, 被積分関数が積分変数以外のパラメータを含む場合には, そのパラメータに関して微分してみるという方法なども有効です. そのためには, 「積分をす

る操作」と「極限を取る操作」がいつ交換できるのかということを一度きちんと考える必要がありますが、こうした問題を考えるときの基本的な概念として「一様収束」という概念があります。この演習でも、そうした概念や方法について少し触れようと思っていますので、上の図の「積分の値を求めるための補助的な手段」という部分に、

—— 極限と積分の順序交換 ——

「積分をする操作」と「極限を取る操作」がいつ交換できるのかということをきちんと理解して、具体的な積分の計算に役立てる。

- 一様収束
- 極限と積分の交換

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} dx$$

- パラメータに関する微分

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x; \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) dx$$

という項目を付け加えて考えていただけると、より良く全体像を理解していただけるのではないかと思います。

皆さんにも、上で挙げた基本事項のつながりや登場するキーワードに注意して学んでいただけると、微積分学に対する理解が深まるのではないかと思います。以下、順番に、これらのキーワードについて少しだけ説明してみることになります。

3 一変数関数の積分をどのように理解するのか

一変数関数の積分については、皆さんもある程度慣れ親しんでいるのではないかと思います。が、「Riemann 和の極限として積分の値を解釈するという Riemann 積分の考え方を理解する」ということと、「実際に積分の値を計算する技術を身につける」ということを通して、一変数関数の積分に対する理解を深めるということが、主な目標となります。すなわち、Riemann 積分の考え方をより良く理解することにより、例えば、曲線の長さや立体の体積などを、あるいは、将来、皆さんが、それぞれの分野に進まれたときに扱われるような量を、積分を用いて表わすにはどうしたらよいのかということが納得できるようになると思いますし、積分を計算する技術を磨くことにより、多くの場合、実際にそうした量を求めることができるようになると期待されるわけです。

(あ) 一変数関数に対する Riemann 積分の考え方 (第 10 回 : 9 節, 10 節)¹

積分に対する理解を深める上で、そもそも「積分の値とは何か」ということを理解することが大切になります。そのためには、まず、積分領域の性質に起因する問題の

¹皆さんの参考のために、関連事項の説明が「数学 IB 演習の解説」の中のどの節で行なわれているのかということと一緒に記すことにしました。

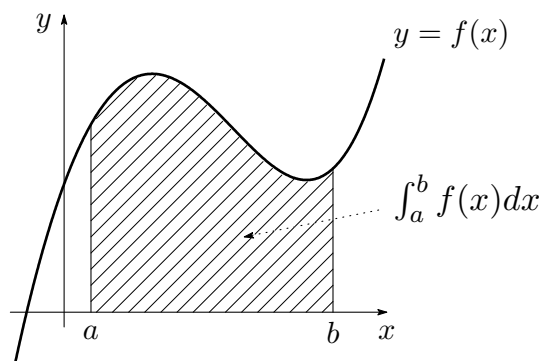


図 1: 積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ とは, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積のことである.

起こらない「有界閉区間上の積分の値とは何か」ということを理解することが基本になります.

いま, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ となる実数として, 関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上での積分の値

$$\int_a^b f(x)dx$$

とは, 皆さん良くご存知のとおり, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積のことです (図 1 を参照).

ただし, 一般に, 「曲がった図形」を考えたときには, 「その面積の値がいくつになるのか」ということや, 「そもそも面積が定まるのか」ということは, それほど明らかなことではなくなってしまいます. そこで, 積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ を考えるにあたって, 「長方形であれば, その面積についてハッキリしたことが言える」ということに注目して, 以下で見るように, 「短冊の面積の極限值」として積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ を定義するのが普通です.

そこで, まず, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域である「曲がった図形」を短冊で近似することを考えます. そのために,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

となるような実数 $x_i \in [a, b]$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) を, 勝手にひとつずつ選んで, 区間 $[a, b]$ を,

区間 $[a, b]$ の分割

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

というように細かい区間に分割してみることにします. ただし, このような分割をいちいち書いていくと大変ですので, (1) 式を満たすような実数 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ を与えることを区間 $[a, b]$ の分割と呼び, 分割点の集合を考えることで, このような分割を,

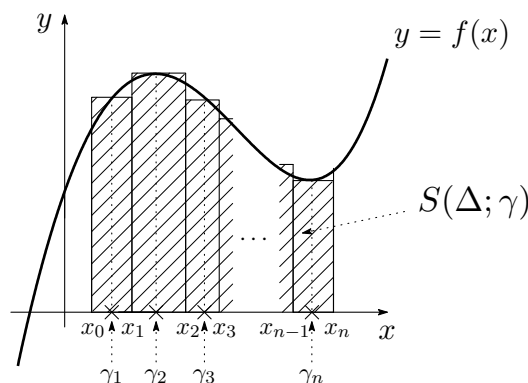


図 2: 各小区間から代表点 $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を、勝手にひとつずつ選んできたときの Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ は、上のような短冊の面積として与えられる。

—— 区間 $[a, b]$ の分割 (分割点による表示) ——

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

と表わすことにします。² また、各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における x の増分を、

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

と表わし、

—— 分割 Δ の分割の幅 ——

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$$

を分割 Δ の分割の幅と呼ぶことにします。さらに、短冊に現われるそれぞれの長方形の高さを定めるために、各小区間の代表点 $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を勝手にひとつずつ選んできて、 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ と表わすことにします。このとき、各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ を底辺とし、 $f(\gamma_i)$ を高さとする長方形からなる短冊を考えると、その面積は、

—— Riemann 和の定義式 ——

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta x_i$$

となりますが、 $S(\Delta; \gamma)$ のことを分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x)$ の Riemann 和と呼びます (図 2 を参照)。

以上の言葉の準備のもとで、区間 $[a, b]$ の分割 Δ や代表点 γ の取り方に依らずに、分割の幅 $|\Delta|$ が小さくなりさえすれば、Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の値が共通の

²このとき、それぞれの分割 Δ によって、分割点の数 $n+1$ は異なっても良いと考えることにします。

極限に近づくとき、この極限値を「関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上での積分の値」であると定義します。すなわち、

—— 積分の定義 ——

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta x_i\end{aligned}$$

と定めます。すると、いつ積分の値がきちんと定まるのかということが問題になりますが、例えば、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数であれば、勝手な有界閉区間 $[a, b]$ 上で、 $\int_a^b f(x)dx$ という値がきちんと定まることが分かります。

(い) 微積分学の基本定理 (第 8 回 : 2 節 ; 第 10 回 : 11 節)

多項式関数の場合など、特別な場合を除いては、定義にもとづいて積分の値を求めることは不可能ですから、実際に積分の値を求めるためには「別な工夫」が必要になります。そのための基礎を与えてくれるのが微積分学の基本定理です。

いま、 $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、例えば、積分区間の上端を変数であると考えて、

—— 関数 $F(x)$ の定義 ——

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

という関数を考えてみます。このとき、関数 $F(x)$ は、 $\mathbb{R}$ 上の各点で微分可能であり、

—— 関数 $F(x)$ と被積分関数 $f(x)$ の間の関係 ——

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \tag{2}$$

となることが分かります。この事実を微積分学の基本定理と言います。

一般に、与えられた関数 $f(x)$ に対して、

—— 関数 $f(x)$ の原始関数の定義 ——

$$\frac{dG}{dx}(x) = f(x) \tag{3}$$

となるような関数 $G(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数と呼びます。すると、(2) 式から、

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

は、関数 $f(x)$ の原始関数 (のうちのひとつ) であることが分かります。そこで、いま、(3) 式を満たすような関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ が何でも良いからひとつ見つかっ

たします。このとき、一般には、

$$F(x) = G(x)$$

となるとは限りませんが、次のようにして、 $F(x)$ を求めることができます。

いま、 $F(x) - G(x)$ という関数を微分してみると、(2) 式、(3) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) &= \frac{dF}{dx}(x) - \frac{dG}{dx}(x) \\ &= f(x) - f(x) \quad ((2) \text{ 式}, (3) \text{ 式より}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となることが分かります。よって、 $C \in \mathbb{R}$ を定数として、

$$F(x) - G(x) = C \quad (4)$$

となることが分かります。そこで、

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

となることに注意して、(4) 式の両辺で、 $x = a$ としてみると、

$$\begin{aligned}C &= F(a) - G(a) \\ &= -G(a)\end{aligned} \quad (5)$$

となることが分かります。よって、(4) 式、(5) 式から、

$$\begin{aligned}F(x) &= G(x) + C \quad ((4) \text{ 式より}) \\ &= G(x) - G(a) \quad ((5) \text{ 式より})\end{aligned}$$

というように表わせることが分かります。すなわち、

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a) \quad (6)$$

と表わせることが分かります。

ここで、改めて、積分の上端を $x \rightsquigarrow b$ と書き直し、積分変数を $t \rightsquigarrow x$ と書き直すことにすると、以上の議論から、

—— 原始関数を用いた積分の計算法 ——

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad (7)$$

と表わせることが分かりました。すなわち、関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ を何でもよいからひとつ見つけることができれば、後は、積分区間の端っこでの $G(x)$ の値を引き算することで、関数 $f(x)$ の積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ が計算できることが分かりました。こうして、「関数 $f(x)$ の積分を求める問題」が「関数 $f(x)$ の原始関数を求める問題」に帰着することが分かります。

(う) 置換積分と部分積分 (第9回: 7節)

与えられた関数 $f(x)$ に対して, その原始関数がすぐに分かるとは限りません. このような場合, 与えられた積分 $\int_a^b f(x)dx$ を何らかの方法で変形して, より見やすい形に帰着する「工夫」が必要になります. そのための工夫の代表例が, 置換積分と部分積分です.

いま, $x = \varphi(t)$ という関数によって, 積分変数を x から t に変数変換してみると,

置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (8)$$

となることが分かります. ただし, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ となる数を α, β と表わしました. この (8) 式を置換積分の公式と呼びます.³

また,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

という関数の積に対する微分の公式である Leibniz 則の両辺を a から b まで積分して, 適当に移項すると,

部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

という式が得られますが, これを部分積分の公式と呼びます.

(え) 曲線の長さや回転体の体積・表面積など (第11回: 7節, 8節, 9節, 10節)

分割の幅を小さくしていったときの Riemann 和の極限として積分の値を定義するという Riemann 積分の考え方を応用すると, 色々な量が積分を用いて表わせることになります. その代表的な例が, 曲線の長さや回転体の体積・表面積などです.

いま, 写像 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が, $c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ というように, 二つの滑らかな関数 $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ によって表わされているとします.⁴ このとき, 例えば, $A = c(0)$, $B = c(1) \in \mathbb{R}^2$ として, 曲線 c 上の点 A から点 B に至る曲線の長さ l が,

曲線の長さ

$$l = \int_0^1 \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$$

という式で与えられることが分かります. 特に, 曲線 c が, 偏角 θ をパラメータとして, 極座標を用いて, $r = r(\theta)$ のように表わされているときには, 一周の曲線の長さ l が,

³多変数関数の積分の場合も考えると, 変数変換の公式と呼ぶほうがよいかもしれません.

⁴このようなものを, パラメータ t によりパラメータ付けられた $\mathbb{R}^2$ 内の滑らかな曲線と呼びます.

閉曲線の長さ (極座標による表示)

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{r(\theta)\}^2 + \{r'(\theta)\}^2} d\theta$$

という式で与えられることが分かります。

また、例えば、関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸の周りで回転させることによって得られる図形を考えると、この図形の $x = a$ から $x = b$ に至る部分の体積 V や表面積 S が、

回転体の体積と表面積

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

という式で与えられることが分かります。

4 「できる積分」

さて、3 節の (い) の項で見たように、あるいは、皆さんも良くご存じのように、与えられた関数 $f(x)$ の積分を求めるためには、関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ を何でも良いからひとつ見つければよいということになります。ところが、関数 $f(x)$ が良く知られた関数で表わされていたとしても、一般には、 $f(x)$ の原始関数を求めることができるとは限らないということが起こりえます。その意味で「積分は微分ほど甘くない」わけです。ただし、例えば、多項式関数のように、系統的に原始関数を求める方法が知られている関数もいくつか存在しています。そこで、皆さんにとって大切なことは、まずは、このような「できる積分」の場合に、「原始関数が求まる仕組み」をしっかりと理解して、原始関数を確実に求めることができるようになるということではないかと思います。

(あ) 有理関数の部分分数展開 (その 1) (第 8 回 : 3 節, 4 節, 5 節, 6 節)

いま、実数係数の多項式全体の集合を、

実数係数の多項式全体の集合

$$\mathbb{R}[x] = \{ p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

と表わすことにします。このとき、二つの多項式 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を用いて、

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

というように多項式の商の形に表わせるような関数を有理関数と呼びます。有理関数は「原始関数を系統的に求めることのできる関数」の代表的な例ですが、そのとき

のアイデアは「部分分数展開」を考えるということです。ただし、(i)の項で見ると、「実数の世界」にだけこだわって部分分数展開を考えることにすると、部分分数展開の形が少し複雑になったり、部分分数展開の各項として登場する関数の原始関数を求めるために「更なる工夫」が必要になったりと、少し状況が難しくなってしまいます。そこで、こうした困難を避けるためにも、また、有理関数の部分分数展開をより良く理解するためにも、「実数の世界」だけにこだわらずに、「複素数の世界」に考察を広げて考えることが大切になります。

そこで、いま、複素数の世界に考察を広げて考えていることを強調するために、変数を $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow z \in \mathbb{C}$ と表わすことにして、複素数係数の多項式全体の集合を、

——— 複素数係数の多項式全体の集合 ———

$$\mathbb{C}[z] = \{ p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

と表わすことにします。このとき、二つの多項式 $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ を用いて、

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

というように多項式の商の形に表わせるような関数を(複素数係数の)有理関数と呼びます。このように、複素数の世界に考察を広げて考えてみると、勝手な多項式 $q(z) \in \mathbb{C}[z]$ に対して、 $q(z) = 0$ の相異なる根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ とし、 $z = \alpha_i$ という根の重複度を $m_i \in \mathbb{N}, (i = 1, 2, \dots, N)$ とするとき、

——— 代数学の基本定理 ———

$$\begin{aligned} q(z) &= a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i} \\ &= a_n (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_N)^{m_N} \end{aligned} \quad (9)$$

というように、 $q(z)$ は、 $\mathbb{C}[z]$ の中で一次式の積の形に分解することが分かります。この事実を代数学の基本定理と呼びます。例えば、

$$q(z) = z^2 + 1$$

という二次式を考えると、 $q(z)$ は $\mathbb{R}[z]$ の中では、これ以上、因数分解することができないわけですが、 $\mathbb{C}[z]$ の中では、⁵

$$q(z) = (z - \sqrt{-1})(z + \sqrt{-1})$$

というように、一次式の積の形に因数分解できるわけです。全く同様に、勝手な多項式 $q(z) \in \mathbb{C}[z]$ は、 $\mathbb{C}[z]$ の中で考えると、必ず一次式の積の形に分解できるということを、(9)式は主張しているわけです。

⁵すなわち、多項式の式の中に、係数として複素数が現われることも許すということです。

そこで、いま、有理関数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

が、勝手にひとつ与えられているとして、有理関数 $f(z)$ の分母である $q(z)$ という多項式が、

—— 有理関数 $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ の分母 $q(z)$ の因数分解 (「複素数の世界」) ——

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^N (z - \alpha_i)^{m_i}$$

というように因数分解できるとします。このとき、

—— 有理関数 $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ の部分分数展開 (「複素数の世界」) ——

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \frac{A_{m_i-1}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(z - \alpha_i)} \right\} + r(z) \quad (10)$$

となるような複素数 $A_j^{(i)} \in \mathbb{C}$, ($i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, m_i$) と多項式 $r(z) \in \mathbb{C}[z]$ が一意的に存在することが分かります。この (10) 式を、有理関数 $f(z)$ の部分分数展開と呼びます。複素数の世界で部分分数展開を考えると、(10) 式の右辺には原始関数がすぐに分からないような項は登場しないことに注意して下さい。

(い) 有理関数の部分分数展開 (その2) (第8回：7節)

さて、(あ) の項では、複素数の世界で部分分数展開を考えましたが、ここでは、実数の世界で部分分数展開を考えるとどうなるのかということを考えてみることにします。

そこで、まず、実数係数の多項式 $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して、実数の世界での多項式 $q(x)$ の「素因数分解」がどのようになるのかということを考えてみます。いま、(9) 式から、 $q(x) = 0$ の相異なる根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ とし、 $x = \alpha_i$ という根の重複度を $m_i \in \mathbb{N}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) とするとき、 $q(x)$ は、 $\mathbb{C}[x]$ の中では、

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^N (x - \alpha_i)^{m_i} \quad (11)$$

というように、一次式の積の形に分解することが分かります。ここで、 $q(x)$ は実数係数の多項式であることに注意して、(11) 式の両辺の複素共役を考えると、

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^N (x - \bar{\alpha}_i)^{m_i} \quad (12)$$

となることが分かります。よって、(11) 式と (12) 式を見比べることで、 $x = \alpha_i$ が $q(x) = 0$ の重複度 m_i の根であるとする、 $x = \bar{\alpha}_i$ も $q(x) = 0$ の重複度 m_i

の根となることが分かります. すなわち, $q(x) = 0$ の根のうち, 虚数根 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対しては, α と $\bar{\alpha}$ が常に対になって現われることが分かります.

そこで, $q(x) = 0$ の相異なる実数根を,

$$b_1, b_2, \dots, b_{N_1} \in \mathbb{R}$$

として, b_i の重複度を $l_i \in \mathbb{N}$, ($i = 1, 2, \dots, N_1$) と表わし, $q(x) = 0$ の相異なる虚数根を,

$$\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_{N_2}, \bar{\zeta}_{N_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

として, $\zeta_j, \bar{\zeta}_j$ の重複度を $n_j \in \mathbb{N}$, ($j = 1, 2, \dots, N_2$) と表わすことにします. すると, $q(x)$ は,

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \{(x - \zeta_j)(x - \bar{\zeta}_j)\}^{n_j}$$

と表わされることが分かります. ここで,

$$(x - \zeta_j)(x - \bar{\zeta}_j) = x^2 + c_j x + d_j$$

と表わすことにすると,

$$c_j = -(\zeta_j + \bar{\zeta}_j) = -2\operatorname{Re}\zeta_j, \quad d_j = |\zeta_j|^2 \in \mathbb{R}$$

となることが分かりますから,

$$x^2 + c_j x + d_j = (x - \zeta_j)(x - \bar{\zeta}_j) \in \mathbb{R}[x]$$

となることが分かります. 以上より,

—— 実数係数の多項式 $q(x)$ の素因数分解 ——

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} (x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}$$

というように, 実数係数の多項式 $q(x)$ は, $\mathbb{R}[x]$ の中で, 一次式と (判別式が負の) 二次式の積の形に分解することが分かります. このとき, 一次式の因子は $q(x) = 0$ の実数根に, 二次式の因子は $q(x) = 0$ の虚数根に対応していることも分かります.

次に, 実数の世界での有理関数の部分分数展開がどのような形になるのかということを考えてみます. そこで, いま, $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ として, 実数係数の有理関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

が, 勝手にひとつ与えられているとして, 有理関数 $f(x)$ の分母である $q(x)$ という多項式が,

— 有理関数 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ の分母 $q(x)$ の因数分解 (「実数の世界」) —

$$\begin{aligned} q(z) &= a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \{(x - \zeta_j)(x - \bar{\zeta}_j)\}^{n_j} \\ &= a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} (x^2 + c_j x + d_j)^{n_j} \end{aligned}$$

というように因数分解できるとします. このとき, (10) 式から, 有理関数 $f(x)$ は, 複素数の世界で,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \frac{A_{l_i}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i}} + \frac{A_{l_i-1}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(x - b_i)} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{B_{n_j}^{(j)}}{(x - \zeta_j)^{n_j}} + \frac{B_{n_j-1}^{(j)}}{(x - \zeta_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{B_1^{(j)}}{(x - \zeta_j)} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{C_{n_j}^{(j)}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j}} + \frac{C_{n_j-1}^{(j)}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{C_1^{(j)}}{(x - \bar{\zeta}_j)} \right\} + r(x) \end{aligned} \quad (13)$$

というように部分分数展開されることが分かります. ここで, 前と同様に, $f(x)$ は実数係数の有理関数であることに注意して, (13) 式の両辺の複素共役を考えてみると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \frac{\overline{A_{l_i}^{(i)}}}{(x - b_i)^{l_i}} + \frac{\overline{A_{l_i-1}^{(i)}}}{(x - b_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{\overline{A_1^{(i)}}}{(x - b_i)} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{\overline{B_{n_j}^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j}} + \frac{\overline{B_{n_j-1}^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{\overline{B_1^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{\overline{C_{n_j}^{(j)}}}{(x - \zeta_j)^{n_j}} + \frac{\overline{C_{n_j-1}^{(j)}}}{(x - \zeta_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{\overline{C_1^{(j)}}}{(x - \zeta_j)} \right\} + \overline{r(x)} \end{aligned} \quad (14)$$

となることが分かります. よって, (13) 式と (14) 式を見比べることで,

$$\begin{cases} A_k^{(i)} = \overline{A_k^{(i)}}, (i = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, l_i) \\ B_{k'}^{(j)} = \overline{C_{k'}^{(j)}}, (j = 1, 2, \dots, N_2, k' = 1, 2, \dots, n_j) \\ r(x) = \overline{r(x)} \end{cases}$$

となることが分かりますから, $A_k^{(i)} \in \mathbb{R}$, $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ であり, 有理関数 $f(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \frac{A_{l_i}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i}} + \frac{A_{l_i-1}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(x - b_i)} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{B_{n_j}^{(j)}}{(x - \zeta_j)^{n_j}} + \frac{B_{n_j-1}^{(j)}}{(x - \zeta_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{B_1^{(j)}}{(x - \zeta_j)} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_2} \left\{ \frac{\overline{B_{n_j}^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j}} + \frac{\overline{B_{n_j-1}^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)^{n_j-1}} + \cdots + \frac{\overline{B_1^{(j)}}}{(x - \bar{\zeta}_j)} \right\} + r(x) \quad (15)$$

という形に表わせることが分かります. ここで, 一般に, $n \in \mathbb{N}$, $\zeta, B \in \mathbb{C}$ として,

$$\frac{B}{(x - \zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x - \bar{\zeta})^n}$$

という形の関数を考えてみます. このとき,

$$\begin{cases} \lambda(x) = \bar{B}(x - \zeta)^n + B(x - \bar{\zeta})^n \\ \mu(x) = (x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) \end{cases}$$

と定めると, $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{R}[x]$ であり,

$$\frac{B}{(x - \zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x - \bar{\zeta})^n} = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)^n} \quad (16)$$

と表わすことができますから, この有理関数は実数係数の有理関数であることが分かります. また, 分子に現われる多項式を二次式 $\mu(x)$ で割り算することを繰り返すことにより, 適当な一次式以下の多項式 $\nu_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{B}{(x - \zeta)^n} + \frac{\bar{B}}{(x - \bar{\zeta})^n} &= \frac{\lambda(x)}{\mu(x)^n} \\ &= \frac{\nu_1(x)}{\mu(x)^n} + \frac{\nu_2(x)}{\mu(x)^{n-1}} + \cdots + \frac{\nu_n(x)}{\mu(x)} \end{aligned}$$

と表わされることが分かります. よって, (15) 式の二行目と三行目に現われる各項に対して, このような書き換えを行なうことで, 勝手な実数係数の有理関数 $f(x)$ に対して, 有理関数 $f(x)$ の分母である $q(x)$ という多項式が,

—— 有理関数 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ の分母 $q(x)$ の因数分解 (「実数の世界」) ——

$$q(z) = a_n \prod_{i=1}^{N_1} (x - b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_2} (x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}$$

というように因数分解できるとき,

—— 有理関数 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ の部分分数展開 (「実数の世界」) ——

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \frac{A_{l_i}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i}} + \frac{A_{l_i-1}^{(i)}}{(x - b_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(i)}}{(x - b_i)} \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \frac{D_{n_j}^{(j)} x + E_{n_j}^{(j)}}{(x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}} + \cdots + \frac{D_1^{(j)} x + E_1^{(j)}}{(x^2 + c_j x + d_j)} \right\} + r(x) \quad (17) \end{aligned}$$

となるような実数 $A_k^{(i)}, D_{k'}^{(j)}, E_{k'}^{(j)} \in \mathbb{R}$ と多項式 $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在することが分かります.

(う) 有理関数の原始関数を求めるには (第 8 回 : 8 節)

(い) の項で見たように, 勝手な有理関数 $f(x)$ は, (17) 式のように部分分数展開されることが分かりますから, 有理関数 $f(x)$ の原始関数を求めるためには, $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として,

$$(イ) \frac{a}{(x-b)^n}$$

$$(ロ) \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, (c^2-4d < 0)$$

(ハ) 実数係数の多項式

という三つのタイプの関数の原始関数が分かれば良いことになります. このうち, (イ) と (ハ) のタイプの関数については原始関数が簡単に分かりますから, (ロ) のタイプの関数だけが問題になりますが, 実数の世界だけで考えたときには, (ロ) のタイプの関数の原始関数を求めるためには「更なる工夫」が必要となります.

そこで, (ロ) のタイプの関数の原始関数を実数の世界の中だけで求めるための一番目の工夫は,

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} = a \cdot \frac{x}{(x^2+cx+d)^n} + b \cdot \frac{1}{(x^2+cx+d)^n}$$

というように, x と 1 をもとにして分解して考えるのではなく,

(ロ) のタイプの関数の原始関数を求めるための工夫 (その 1)

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} + \left(b - \frac{ac}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x^2+cx+d)^n} \quad (18)$$

というように, $(2x+c)$ と 1 をもとにして分解して考えるということです. 実際, このように分解して考えることで, (18) 式の右辺の第一項に現われる関数の原始関数を,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx &= \int \frac{(x^2+cx+d)'}{(x^2+cx+d)^n} dx \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+cx+d)^{n-1}}, & n \neq 1 \text{ のとき} \\ \log(x^2+cx+d), & n = 1 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

というように簡単に求めることができます. したがって, 後は,

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} \quad (19)$$

という積分を求めることができれば良いということになりますが, (19) 式の右辺に部分積分を試みることにより, I_n 達の間の漸化式を導くことができます. ただし, 漸化式をなるべく簡明な形にするためには, 次のように, 分母に現われる二次式を標準形に書き直してから考える方が便利です.

いま、分母に現われる二次式を平方完成してみると、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^n} &= \int \frac{dx}{\left\{ \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{c^2}{4}\right) \right\}^n} \\
 &= \int \frac{dx}{\left\{ \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \alpha^2 \right\}^n} \quad (\alpha^2 = d - \frac{c^2}{4} > 0 \text{ とした}) \\
 &= \frac{1}{\alpha^{2n}} \cdot \int \frac{dx}{\left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + 1 \right\}^n} \\
 &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \cdot \int \frac{ds}{(s^2 + 1)^n} \quad (s = \frac{1}{\alpha} \left(x + \frac{c}{2}\right) \text{ とした})
 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

—— (口) のタイプの関数の原始関数を求めるための工夫 (その2) ——

$$\int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^n} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \cdot \int \frac{ds}{(s^2 + 1)^n}$$

というように書き直せることが分かります。よって、後は、

$$\int \frac{ds}{(s^2 + 1)^n}$$

という積分が求まれば良いことが分かります。そこで、

—— J_n の定義式 ——

$$J_n = \int_0^x \frac{ds}{(s^2 + 1)^n} \quad (20)$$

として、(20) 式の右辺に部分積分を試みると、

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^x \frac{ds}{(s^2 + 1)^n} \\
 &= \int_0^x \frac{(s)' ds}{(s^2 + 1)^n} \\
 &= \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^n} \right]_0^x - \int_0^x s \cdot \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^n} \right\}' ds \\
 &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \int_0^x s \cdot \frac{(-n) \cdot 2s}{(s^2 + 1)^{n+1}} ds \\
 &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int_0^x \frac{s^2}{(s^2 + 1)^{n+1}} ds \\
 &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int_0^x \frac{(s^2 + 1) - 1}{(s^2 + 1)^{n+1}} ds \\
 &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int_0^x \frac{ds}{(s^2 + 1)^n} - 2n \int_0^x \frac{ds}{(s^2 + 1)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1}$$

となることが分かりますから、

————— J_n に対する漸化式 —————

$$2nJ_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1)J_n \quad (21)$$

となることが分かります。よって、

$$J_1 = \int \frac{ds}{s^2 + 1} = \tan^{-1} x$$

となることと、(21) 式から、 J_n が順番に求まることになります。

(え) 三角関数の有理式の積分について (第9回：2節, 3節)

上で見たきたように、「系統的に原始関数を求めることのできる関数」の代表的な例は、二つの多項式の商の形で表わされる「有理関数」です。このことを用いると、何らかの形で有理関数の積分に帰着できるような積分も (原理的に) 原始関数を求めることができる積分ということになります。そのような「できる積分」の代表的な例が三角関数の有理式の積分です。

以下の項目で見ると、三角関数の有理式の積分以外にも「できる積分」は知られているのですが、これらの「できる積分」の共通の特徴は積分変数の変数変換⁶により有理関数の積分に帰着できるということにあります。したがって、これらの「できる積分」をより良く理解するためには、「どのような変数変換をすれば有理関数の積分に帰着できるのか」ということをじっくりと理解することが大切になります。そのためのアイデアは、それぞれの「できる積分」の「裏」に隠れている (代数) 曲線 C に注目して、「積分変数の変数変換」を「(代数) 曲線 C 上の点のパラメータ付け」と対応させて考察するというところにあります。そこで、ここでは、これらのアイデアを「三角関数の有理式の積分」の場合に説明してみることにします。

いま、 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $p(x, y)$ で、 $p(x, y) = x^2 + xy$ や $p(x, y) = x^5 + x^2y + 3y^8$ のような (実数係数の) 二変数多項式全体の集合を、

————— 実数係数の二変数多項式全体の集合 —————

$$\mathbb{R}[x, y] = \left\{ p(x, y) = \begin{matrix} a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y \\ + \cdots + a_{m,n}x^m y^n \end{matrix} \mid m, n \in \mathbb{N}, a_{0,0}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{R} \right\}$$

と表わすことにします。このとき、二つの二変数多項式 $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ を用いて、

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

⁶すなわち、置換積分することです。

というように、多項式の商の形で表わされる関数 $f(x, y)$ を (実数係数の) 二変数有理関数と呼びます。

さて、二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて、

—— 三角関数の有理式 ——

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) \quad (22)$$

という形で表わせるような一変数関数 $g(\theta)$ を三角関数の有理式と呼びます。⁷ いま、勝手な実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、 $(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ は、単位円

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (23)$$

上の点を表わしていますから、(22) 式より、三角関数の有理式 $g(\theta)$ とは「二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を単位円 C 上に制限したもの」であると解釈できることが分かります。⁸ このように、「有理関数という簡単な形をした二変数関数を単位円 C 上に制限したもの」として一変数関数 $g(\theta)$ を解釈するということが、「できる積分」の変数変換を考える上での出発点となります。すなわち、三角関数の有理式の積分の「裏」には、(23) 式で与えられる単位円 C が隠れていると考えるということが議論の出発点となります。すると、上で述べたアイデアとは、三角関数の有理式の積分 $\int g(\theta) d\theta$ を、

—— 変数変換を考えるためのアイデア (その 1) ——

$$\int g(\theta) d\theta = \int f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

というように、「単位円 C 上の積分を θ というパラメータを用いて表わしたもの」であると考えて、「単位円 C 上の点のパラメータ付けを取り換えたときに、積分の姿がどのように変わるのか」という観点から積分変数の変数変換を考察することになります。

そこで、いま、 $\mathbb{R}^2$ 内の単位円 C 上の点 $P \in C$ が、

$$P = (\cos \theta, \sin \theta)$$

というパラメータ付けとは別に、パラメータ $t \in \mathbb{R}$ と二つの関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて、

$$P = (\varphi(t), \psi(t))$$

というようにパラメータ付けできたとします。このとき、積分変数を θ から t に変数変換してみることで、三角関数の有理式の積分は、

⁷すなわち、三角関数の有理式 $g(\theta)$ とは、 $\cos \theta \rightsquigarrow x, \sin \theta \rightsquigarrow y$ と書き直したときに、二変数の有理関数 $f(x, y)$ になるような関数のことです。

⁸本当は、 $q(x, y) = 0$ となるような点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ では有理関数 $f(x, y)$ の値はきちんと定まりませんが、以下の議論には影響がありませんので、状況がイメージしやすいように、ここでは、有理関数 $f(x, y)$ の定義域が $\mathbb{R}^2$ であるかのような書き方をしました。

変数変換を考えるためのアイデア (その2)

$$\int f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = - \int f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt \quad (24)$$

というように姿を変えることが分かります. ここで, $f(x, y)$ が (二変数の) 有理関数であったことに注意すると, 「 $\varphi(t), \psi(t)$ という関数が, 両方とも変数 t に関する有理関数である」とすると, $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$ という関数も変数 t に関する有理関数になる」ことが分かります. したがって, もし, 単位円 C 上の点 P が, 二つの有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C$$

というようにパラメータ付けできることが分れば, (24) 式によって, 「三角関数の有理式の積分」は「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.⁹

このようなパラメータ付けは, 単位円 C が,

$$x^2 + y^2 = 1$$

という二次式によって定義されているという事実に着目すると幾何学的に構成することができ, 例えば,

有理関数によるパラメータ付けを与えるパラメータの例

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

と取れることが分かります. 実際, (25) 式のように変数変換することにより,

$$\int f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

となることが分かりますから,

「三角関数の有理式の積分」の「有理関数の積分」への帰着

「三角関数の有理式の積分」

$\downarrow t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換

「有理関数の積分」

というように, 「三角関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.

⁹一方, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ や単位円 C を持ち出さずに, 単に, 三角関数の有理式 $g(\theta)$ の積分を $\theta \rightsquigarrow t$ と変数変換したときの公式

$$\int g(\theta) d\theta = \int g(\theta(t)) \theta'(t) dt$$

をもとにして考えた場合には, 「 $\theta(t)$ がどのような関数であれば $g(\theta(t))\theta'(t)$ が変数 t に関する有理関数になるのか」ということは, 全く手掛かりのない問題になってしまうことに注意して下さい.

(お) 指数関数の有理式の積分について (第9回: 4節)

さて, (え) の項では「三角関数の有理式の積分」について考えてみましたが, 「指数関数の有理式の積分」についても全く同様の考察をすることができます.

三角関数の場合と同様に, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて,

—— 指数関数の有理式 ——

$$g(s) = f(e^s, e^{-s}) \quad (26)$$

という形で表わせる一変数関数 $g(s)$ を指数関数の有理式と呼びます.¹⁰ いま, 勝手な実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して, $(e^s, e^{-s}) \in \mathbb{R}^2$ は, 双曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad (27)$$

上の点を表わしていますから, (26) 式より, 指数関数の有理式 $g(s)$ とは「二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を双曲線 C 上に制限したもの」とであると解釈できることが分かります. すなわち, 指数関数の有理式の積分の「裏」には, (27) 式で与えられる双曲線 C が隠れていることが分かります. 実際には, 双曲線 C は,

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0, y > 0\}$$

$$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x < 0, y < 0\}$$

という二つの成分からなり, 双曲線 C 上の点 P は, C_+ 上では,

$$P = (e^s, e^{-s}) \in C_+$$

というように, C_- 上では,

$$P = (-e^s, -e^{-s}) \in C_-$$

というようにパラメータ付けできることが分かります.

そこで, 前と同様に, 指数関数の有理式の積分 $\int g(s)ds$ を,

—— 変数変換を考えるためのアイデア (その1) ——

$$\int g(s)ds = \int f(e^s, e^{-s})ds$$

というように, 「双曲線 C_+ 上の積分をパラメータ s を用いて表わしたもの」であると考えて, 双曲線 C_+ 上の点のパラメータ付けを取り換えたときに, 積分の姿がどのように変わるのかということを考えてみます. いま, 双曲線 C_+ 上の点 $P \in C_+$ が,

$$P = (e^s, e^{-s})$$

¹⁰すなわち, 指数関数の有理式 $g(s)$ とは, $e^s \rightsquigarrow x, e^{-s} \rightsquigarrow y$ と書き直したときに, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ になるような関数のことです.

というパラメータ付けとは別に, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ と二つの関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t))$$

というようにパラメータ付けできたとします. このとき, 積分変数を s から t に変数変換してみることで, 指数関数の有理式の積分は,

変数変換を考えるためのアイデア (その 2)

$$\int f(e^s, e^{-s}) ds = \int f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt \quad (28)$$

というように姿を変えることが分かります. したがって, 三角関数の有理式の積分のときと同様に, 双曲線 C_+ 上の点 P が, 二つの有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C_+$$

というようにパラメータ付けできることが分かれば, (28) 式によって, 「指数関数の有理式の積分」は「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.

今の場合, このようなパラメータ付けはすぐに見つかって, 例えば,

$$P = \left(t, \frac{1}{t} \right)$$

というパラメータ付けが取れることが分かります. したがって, 例えば,

有理関数によるパラメータ付けを与えるパラメータの例

$$t = e^s$$

と変数変換することで,

$$\int f(e^s, e^{-s}) ds = \int f\left(t, \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} dt$$

となることが分かりますから,

「指数関数の有理式の積分」の「有理関数の積分」への帰着

「指数関数の有理式の積分」

$\downarrow t = e^s$ と変数変換

「有理関数の積分」

というように「指数関数の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.

(か) 双曲線関数とは (第 11 回 : 3 節)

皆さんよくご存じのように, 単位円

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

上の点 P には,

$$P = (\cos \theta, \sin \theta) \in C \quad (29)$$

という三角関数を用いた自然なパラメータ付けが存在します. 全く同様に, 双曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \quad (30)$$

に対しても, (29) 式に対応するような「自然なパラメータ付け」が存在することが分かり, 双曲線上の点の「自然なパラメータ付け」を与える関数が,

双曲線関数

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (31)$$

という双曲線関数です.¹¹ ここで, (30) 式で与えられる双曲線は, $x \geq 1$ であるか, あ
るいは, $x \leq -1$ であるかに応じて,

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \geq 1\}$$

$$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \leq -1\}$$

という二つの成分からなることが分かりますが, それぞれの成分上の点が, 双曲線関数を用いて,

双曲線上の点の双曲線関数を用いた「自然なパラメータ付け」

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_+$$

$$P = (-\cosh t, -\sinh t) \in C_-$$

というようにパラメータ付けできることが分かります.

いま, (31) 式を, 指数関数 e^t, e^{-t} について, 逆に解いてみると, 指数関数 e^t, e^{-t} は, 双曲線関数 $\cosh t, \sinh t$ を用いて,

Euler の公式 (「双曲線関数版」)

$$\begin{cases} e^t = \cosh t + \sinh t \\ e^{-t} = \cosh t - \sinh t \end{cases} \quad (32)$$

と表わせることが分かります. すると, 何やら, (32) 式は, 三角関数と指数関数を結びつける Euler の公式

Euler の公式 (「三角関数版」)

$$\begin{cases} e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta \\ e^{-\sqrt{-1}\theta} = \cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta \end{cases} \quad (33)$$

に似ています. また, (33) 式を, 三角関数 $\cos \theta, \sin \theta$ について, 逆に解いてみると,

¹¹英語で双曲線関数のことを「hyperbolic function」と呼びます.

三角関数の指数関数による表示式

$$\cos \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2\sqrt{-1}} \quad (34)$$

となることが分かりますが, これは, (31) 式という双曲線関数の定義式とそっくりです.

そこで, いま, Taylor 展開を利用して, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

複素関数としての指数関数の定義式

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

と定めることにします. また,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (35)$$

というように, 双曲線関数も複素関数に拡張して考えてみることにします. すると, (31) 式, (35) 式から, (複素) 双曲線関数 $\cosh z, \sinh z$ の実数軸上の点 $z = t \in \mathbb{R}$ の値が, それぞれ, $\cosh t, \sinh t$ であることが分かります. 一方, (34) 式, (35) 式から, (複素) 双曲線関数 $\cosh z, \sinh z$ の虚数軸上の点 $z = \sqrt{-1}\theta \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ での値は, それぞれ, $\cos \theta, \sqrt{-1} \sin \theta$ となることが分かります. すなわち, 複素数の世界にまで関数を拡張して考えてみると, $t, \theta \in \mathbb{R}$ として,

双曲線関数と三角関数の間の関係

$$\begin{array}{ccc} \cosh t & \xleftarrow{z=t} & \cosh z \xrightarrow{z=\sqrt{-1}\theta} \cos \theta \\ \sinh t & \xleftarrow{z=t} & \sinh z \xrightarrow{z=\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \sin \theta \end{array} \quad (36)$$

というように, 本質的に双曲線関数と三角関数は同じ関数であることが分かります.

このことは, 例えば,

三角関数の持つ基本的な性質

- (1) $(\cos \theta)' = -\sin \theta, (\sin \theta)' = \cos \theta$
- (2) $\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$
- (3) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

というような三角関数の持つ基本的な性質は双曲線関数にも受け継がれるということを示唆していますが, 実際, 双曲線関数に対しても,

—— 双曲線関数の持つ基本的な性質 ——

$$\begin{aligned} (1) & (\cosh t)' = \sinh t, (\sinh t)' = \cosh t \\ (2) & \begin{cases} \cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \\ \sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \end{cases} \\ (3) & \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \end{aligned}$$

となることが分かります.

(き) x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分について (第 11 回 : 2 節, 4 節)

いま, $a, b, c \in \mathbb{R}$ として, x の二次式 $ax^2 + bx + c$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, 二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて,

—— x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式 ——

$$g(x) = f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

という形に表わせるような一変数関数 $g(x)$ を x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式, あるいは, 二次の無理関数と呼びます. そこで, ここでは,

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (37)$$

という「 x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分」について考えてみることにします.

さて, このような「 x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分」の場合にも, 「三角関数の有理式の積分」や「指数関数の有理式の積分」の場合と同様に, 積分の「裏」に隠れている代数曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = ax^2 + bx + c\}$$

に注目して, 曲線 C 上の点の有理関数を用いたパラメータ付け

$$P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C$$

を見つけることで, 「有理関数の積分」に帰着できることが分かります. 実際, 微積分学の教科書でも, このようなパラメータ付けの具体例を挙げて, 「有理関数の積分」に帰着できることを述べているものも多いです. ただし, この場合には, 「三角関数の有理式の積分」や「指数関数の有理式の積分」の場合とは違って, 変数変換の式があまり記憶に易しい形はしていません.

そこで, ここでは, いきなり「有理関数の積分」に帰着することを考えるのではなく, 「 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の有理式の積分」が「三角関数の有理式の積分」, あるいは, 「指数関数の有理式の積分」に帰着できることを順番に見てゆくことにします. そのためのアイデアは, 「二次式を見やすい形に変換する」ということと, 「単位円や双曲線の自然なパラメータ付けに注目する」ということです.

以下では、本当の二次式の場合を問題としたいので、 $a \neq 0$ であると仮定することにしします。¹² また、二次式が重根を持つ場合、すなわち、 $D = b^2 - 4ac = 0$ となる場合には、 $ax^2 + bx + c = 0$ の根を $\alpha \in \mathbb{R}$ として、

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

と表わすことができますから、

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot |x - \alpha|$$

となることが分かります。よって、この場合には、 $x \leq \alpha$ となる場合と $x \geq \alpha$ となる場合とで、場合分けをして考えることで、(37) 式の積分は初めから有理関数の積分に帰着していることが分かります。

そこで、以下では、 $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac \neq 0$ であると仮定することにしします。このとき、必要なら、二次式を平方完成してから、定数項が 1 になるように定数を含り出してみると、適当な実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて、 $X = \alpha(x + \beta)$ と変数変換することで、

二次式を見やすい形に変換する

「 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の有理式の積分」

$\downarrow X = \alpha(x + \beta)$ と変数変換

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

(ロ) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

(ハ) 「 X と $\sqrt{1 - X^2}$ の有理式の積分」

というように「見やすい形」の二次式の場合に帰着できることが分かります。実際には、

$$\alpha = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}, \quad \beta = \frac{b}{2a} \quad (38)$$

となることが分かりますが、個々の具体的な積分に対して上のような式変形を行なってみれば、 α, β の値をどう取るべきかということは自然に分かりますから、(38) 式のような値を覚える必要は全くありません。

そこで、後は、上の (イ), (ロ), (ハ) の三つのタイプの積分が計算できれば良いということになります。そのためのアイデアは、それぞれの積分の「裏」に隠れている双曲線や単位円の自然なパラメータ付けに注目するということです。いま、上に、二次式を「見やすい形」に帰着して考えると、(イ), (ロ), (ハ) の三つのタイプの積分の「裏」には、それぞれ、

¹²興味のある方は、 $a = 0$ のときには、(37) 式の積分の「裏」に隠れている代数曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = bx + c\}$$

上の点が、 y というパラメータを用いて有理関数によるパラメータ付けができることを確かめてみて下さい。また、 $x \rightsquigarrow y = \sqrt{bx + c}$ と変数変換することで、実際に、(37) 式の積分が有理関数の積分に帰着することを確かめてみて下さい。

$$(イ) C_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1\}$$

$$(ロ) C_2 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y^2 - X^2 = 1\}$$

$$(ハ) C_3 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 = 1\}$$

という双曲線や単位円が隠れていることが分かります. また, (か) の項で見たように, これらの双曲線や単位円には「双曲線関数や三角関数を用いた自然なパラメータ付け」が存在します. そこで, それぞれの積分を, 対応する双曲線や単位円の「自然なパラメータ」を用いて表わすとうなるかということを順番に見てみることにします.

まず, (イ) のタイプの積分について考えてみます. すると, (か) の項で見たように, 双曲線 C_1 は,

$$C_{1,+} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1, X \geq 1\}$$

$$C_{1,-} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1, X \leq -1\}$$

という二つの成分を持ち, 双曲線 $C_{1,+}$ 上の点 P は,

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_{1,+} \quad (39)$$

というように「双曲線関数を用いた自然なパラメータ付け」を持つのでした. したがって, この場合,

$$X = \cosh t \quad (40)$$

というように変数変換することは自然なことに思えます. 実際, $X = \cosh t$ という変数変換のもとで,

$$\int f(X, \sqrt{X^2 - 1}) dX = \int f(\cosh t, \sinh t) \sinh t dt$$

と姿を変えることが分かります. よって, $X = \cosh t$ と変数変換することで,

—— (イ) のタイプの積分の「双曲線関数の有理式の積分」への帰着 ——

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

↓ $X = \cosh t$ と変数変換

「双曲線関数の有理式の積分」

というように, (イ) のタイプの積分は「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります.

次に, (ロ) のタイプの積分について考えてみます. すると, 前と同様に, 双曲線 C_2 は,

$$C_{2,+} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y^2 - X^2 = 1, Y \geq 1\}$$

$$C_{2,-} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y^2 - X^2 = 1, Y \leq -1\}$$

という二つの成分を持ち, 双曲線 $C_{2,+}$ 上の点 P は,

$$P = (\sinh t, \cosh t) \in C_{2,+} \quad (41)$$

というように「双曲線関数を用いた自然なパラメータ付け」を持つのでした. したがって, この場合,

$$X = \sinh t \quad (42)$$

というように変数変換することは自然なことに思えます. 実際, $X = \sinh t$ という変数変換のもとで,

$$\int f(X, \sqrt{X^2 + 1}) dX = \int f(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt$$

と姿を変えることが分かります. よって, $X = \sinh t$ と変数変換することで,

—— (口) のタイプの積分の「双曲線関数の有理式の積分」への帰着 ——

(口) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

$\downarrow X = \sinh t$ と変数変換

「双曲線関数の有理式の積分」

というように, (口) のタイプの積分も「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります.

以上から, (イ), (口) の二つのタイプの積分の場合には, 双曲線上の自然なパラメータに変数変換することにより, 「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かりました. (か) の項で見たように, 双曲線関数と指数関数は,

—— 双曲線関数と指数関数の間の関係 ——

$$\begin{cases} \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} e^t = \cosh t + \sinh t \\ e^{-t} = \cosh t - \sinh t \end{cases}$$

というように, 互いに相手の関数を用いて表わすことができますから,

「双曲線関数の有理式」= 「指数関数の有理式」

となることが分かります. したがって, (イ), (口) の二つのタイプの積分は,

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

(口) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

(イ) $X = \cosh t$ と変数変換 $\downarrow$ (口) $X = \sinh t$ と変数変換

「双曲線関数の有理式の積分」

= 「指数関数の有理式の積分」

というように「指数関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります。(お)の項で見たように、「指数関数の有理式の積分」は、 $T = e^t$ と変数変換することにより、

「指数関数の有理式の積分」

$$\downarrow T = e^t \text{ と変数変換} \quad (43)$$

「有理関数の積分」

というように「有理関数の積分」に帰着できますから、必要であれば、さらに、(43)式の変数変換を施すことで、(イ)、(ロ)の二つのタイプの積分も「有理関数の積分」に帰着できることが分かります。

最後に、(ハ)のタイプの積分について考えてみます。すると、皆さん良くご存じのように、単位円 C_3 上の点 P は、

$$(X, Y) = (\cos \theta, \sin \theta) \in C_3$$

というような「三角関数を用いた自然なパラメータ付け」を持ちます。したがって、この場合、

$$X = \cos \theta \quad (44)$$

というように変数変換することは自然なことに思えます。実際、 $X = \cos \theta$ という変数変換のもとで、

$$\int f(X, \sqrt{1-X^2}) dX = - \int f(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

と姿を変えることが分かります。よって、 $X = \cos \theta$ と変数変換することで、

—— (ハ)のタイプの積分の「三角関数の有理式の積分」への帰着(その1) ——

(ハ)「 X と $\sqrt{1-X^2}$ の有理式の積分」

$$\downarrow X = \cos \theta \text{ と変数変換}$$

「三角関数の有理式の積分」

というように、(ハ)のタイプの積分は「三角関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります。

また、上では、 $X = \cos \theta$ という変数変換を考えましたが、積分変数を $X \rightsquigarrow Y$ と書き換えて、(ハ)のタイプの積分を

$$\int f(\sqrt{1-Y^2}, Y) dY$$

というように表わしてみると、今度は、

$$Y = \sin \theta$$

というように変数変換することが自然であるように見えてきます。実際、 $X = \sin \theta$ と変数変換してみても、

— (ハ) のタイプの積分の「三角関数の有理式の積分」への帰着 (その 2) —

(ハ) 「 X と $\sqrt{1-X^2}$ の有理式の積分」

↓ $X = \sin \theta$ と変数変換

「三角関数の有理式の積分」

というように, (ハ) のタイプの積分は「三角関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります. (え) の項で見たように, 「三角関数の有理式の積分」は, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換することにより,

「三角関数の有理式の積分」

↓ $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換

(45)

「有理関数の積分」

というように「有理関数の積分」に帰着できますから, 必要であれば, さらに, (45) 式の変数変換を施すことで, (ハ) のタイプの積分も「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.

5 広義積分

さて, 3 節の (あ) の項では, Riemann 和の極限として積分の値を理解するという Riemann 積分の考え方について述べ, $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ は勝手な有界閉集合 $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能となるということを注意しました. ところが, 例えば,

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot dx = +\infty$$

という例や,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$$

という例のように, 被積分関数 $f(x)$ が連続関数であったとしても, 積分区間が無限に伸びている場合や, 積分区間の端っこで被積分関数が定義できない場合などには, 積分の値がきちんと定まるとは限りません. また, 例えば,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

という例や,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

という例のように, 積分の値がきちんと定まるように思われる場合でも, 積分区間が無限に伸びている場合や, 積分区間の端っこで被積分関数が定義できない場合などには, そもそも Riemann 和自体の値が定まるとは限らないなどの問題が起こってしまい, Riemann 和の極限として積分の値を理解することができなくなります.

そこで、こうした場合には、積分の概念を少しだけ拡張して、Riemann 和の極限とは違った形で積分の値を理解する必要がありますが、皆さんにとって大切なことは、「広義積分」という考え方をしっかりと理解した上で、与えられた積分の式が (広義積分の意味で) きちんと値が定まる「意味のある積分の式」なのか、式では表わされているものの、(広義積分の意味でも) きちんと値が定まらない「意味のない積分の式」なのかということをきちんと判定できるようになるということではないかと思います。

(あ) 広義積分 (第 12 回 : 2 節)

上でも注意したように、積分区間が無限に伸びている場合や、積分区間の端っこで被積分関数が定義できない場合などには、一般には、Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ 自体の値がきちんと定まるとは限らないので、このような場合には積分の値の定義を拡張して理解する必要があります。

そこで、いま、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数であるとして、例えば、

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad (46)$$

という積分の値をどのように定めたらよいのかということを考えてみます。すると、この場合、そもそも Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ 自体の値が定まるとは限らなくなってしまうから、(46) 式の積分の値を、直接、Riemann 和の極限として定義することはできなくなってしまう。しかしながら、勝手な正の実数 $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して、

$$I(R) = \int_0^R f(x) dx$$

という有界閉区間 $[0, R]$ 上の積分の値 $I(R)$ はきちんと定まるということに注目すると、

—— 広義積分 (積分区間が無限に伸びている場合) ——

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} I(R) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \end{aligned} \quad (47)$$

というように、 $R \rightarrow \infty$ としたときの $I(R)$ の極限として、無限区間 $[0, \infty)$ 上の積分の値を定義することができそうです。このように、有界閉区間上の積分の値 $I(R)$ を考えた上で、 $R \rightarrow \infty$ としたときの $I(R)$ の極限として積分の値を定義することを広義積分と呼びます。3 節で見たように、 $I(R)$ という値自身は、

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_0^R f(x) dx \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

というように, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の極限として定義されますが, 広義積分の値は,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} I(R) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \right\}\end{aligned}$$

というように, 「Riemann 和の極限として得られた値 $I(R)$ 」の極限值として理解することができます. その意味で, このような積分は, 「Riemann 和の極限」+「積分区間の極限」という二段階の極限操作として理解できるので, 「Riemann 和の極限」という一段階の極限操作として理解できる Riemann 積分と区別して, 広義積分と呼ばれます.

ただし, 例えば,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

という例が示すように, 実際の計算に当たっては, Riemann 積分を扱っているのか, 広義積分を扱っているのかということは余り意識せずに計算を進めることができます.¹³ したがって, わざわざ, (47) 式のように広義積分の定義を書き下してみることの意味は, 馴染みのない積分概念を新しく導入して, 皆さんを混乱させようということにあるのではなく, 上のような積分も, 正確には,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{R} - (-1) \right\} \\ &= 1\end{aligned}$$

というように, 積分区間に関する極限操作も同時に行っているのだということを確認するということにあります.

(い) 絶対収束と条件収束 (第 12 回 : 3 節)

さて, (あ) の項では, 積分区間が無限に伸びている場合や, 積分区間の端っこの点で関数の値が定義できないような場合の積分の値を, 広義積分という考え方で理解できることを見ました. そこでも注意しましたが, 例えば,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty$$

¹³ 実際, 皆さんも, 高校以来, このような計算に慣れ親しんでいるのではないかと思います.

という例が示すように、広義積分の場合には、被積分関数が連続関数であったとしても、積分の値がきちんと定まるとは限りません。したがって、与えられた積分が、(広義積分の意味で)きちんと値が定まる「意味のある積分」なのか、式は書かれているものの、(広義積分の意味でも)きちんと値が定まらない「意味のない積分」なのかを判定できるようになるということが大切になります。(う)の項では、そうした「広義積分の収束判定法」について触れようと思いますが、級数のときと同様に、「広義積分の収束判定法」の意味をきちんと理解するためには、広義積分の値がきちんと定まるパターンには「絶対収束」と「条件収束」という二つのパターンがあるということをしかりと理解しておくことが大切になります。以下では、(あ)の項と同様に、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数であるとして、

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

という広義積分の場合に説明することにします。

皆さん良くご存知のように、関数 $f(x)$ の積分 (の値)

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

とは、直感的には、区間 $[0, \infty)$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の (符号付きの) 面積を表わすのでした。そこで、級数のときと同様に、「総面積」

$$S = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

を、 $f(x) \geq 0$ となっている部分から得られる「正の面積」 S^+ と、 $f(x) \leq 0$ となっている部分から得られる「負の面積 (の絶対値)」 S^- に分解して考えてみることにします。すなわち、関数 $f(x)$ を、

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & f(x) < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \text{ のとき} \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

というように、正の値を取る部分と負の値を取る部分 (の絶対値) に分解して、

——「正の面積の寄与」と「負の面積の寄与」——

$$S^+ = \int_0^{\infty} f_+(x)dx, \quad S^- = \int_0^{\infty} f_-(x)dx$$

と定めることにします。このとき、「総面積」

$$S = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

は、

「総面積」を「正の面積の寄与」と「負の面積の寄与」に分解する

$$S = S^+ - S^-$$

というように、「正の面積の寄与」 S^+ と「負の面積の寄与」 S^- に分解できることが分かります.

そこで、 S^+ や S^- が、どのような値を取りうるのかということを考えてみます.
いま、勝手な正の実数 $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して、

$$I_+(R) = \int_0^R f_+(x)dx, \quad I_-(R) = \int_0^R f_-(x)dx$$

と定めることにします. このとき、 $I_+(R)$ は単調増加関数となることが分かりますから、「正の面積の寄与」

$$\begin{aligned} S^+ &= \int_0^\infty f_+(x)dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f_+(x)dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} I_+(R) \end{aligned}$$

の可能性としては、「有限の値に落ち着く」か「無限大になる」かの二通りの可能性しか存在しないことが分かります. 全く同様に、 $I_-(R)$ も単調増加関数となることが分かりますから、「負の面積の寄与」

$$\begin{aligned} S^- &= \int_0^\infty f_-(x)dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f_-(x)dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} I_-(R) \end{aligned}$$

の可能性も、「有限の値に落ち着く」か「無限大になる」かの二通りの可能性しか存在しないことが分かります. したがって、「総面積」

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty f(x)dx \\ &= S^+ - S^- \end{aligned}$$

の可能性としては、次の四つのパターンが考えられるということになります.

	S^- が有限	$S^- = +\infty$
S^+ が有限	$S = S^+ - S^-$	$S = S^+ - \infty$
$S^+ = +\infty$	$S = \infty - S^-$	$S = \infty - \infty$

よって、級数のときと同様に、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx \end{aligned}$$

という極限が存在しうるのは、最初と四番目のパターンである

(イ) S^+, S^- が両方とも有限の値に落ち着く.

(ロ) S^+, S^- が両方とも $+\infty$ に発散する.

という二つの場合のみであることが分かります. すなわち、この二つの場合においてのみ、広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値がきちんと定まりうることが分かります.

級数のときと同様に、(イ) のパターンで広義積分の値がきちんと定まるときに、広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ は絶対収束すると言い、(ロ) のパターンで広義積分の値がきちんと定まるときに、広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ は条件収束と言います. ここで、(イ) という条件は、

—— 広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ が絶対収束する条件 ——

$$S^+, S^- < +\infty \quad (48)$$

ということですが、

$$S^+, S^- \leq \int_0^{\infty} |f(x)|dx = S^+ + S^-$$

となることに注意すると、(48) 式の条件は、

—— 広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ が絶対収束する条件の言い換え ——

$$\int_0^{\infty} |f(x)|dx < +\infty \quad (49)$$

というように言い換えることができることが分かります.¹⁴

(う) 広義積分の収束判定法 (第 12 回 : 3 節)

さて、級数のときと同様に、与えられた広義積分が「絶対収束」していることを判定できるような方法が知られています. 前項までと同様に、以下では、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数であるとして、

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

という広義積分の場合に説明することにします. すると、問題は、

¹⁴ $S^+, S^- < +\infty$ という二つの条件を考えるより、 $\int_0^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$ というひとつの条件を考える方が、議論が簡明になることも多いので、微積分学の教科書では、絶対収束の定義として、(48) 式ではなく、(49) 式の方を採用していることが多いです.

—— 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ が絶対収束する条件の言い換え ——

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < +\infty \quad (50)$$

となることを保証する (十分) 条件を求めたいということになります.

このとき, アイデアはとても簡単で, 勝手な有界閉区間上の積分の値が具体的に計算できるような関数と比べてみるということです. すなわち, 積分区間内の勝手な点 $x \in [0, \infty)$ に対して,

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (51)$$

となるような関数 $g(x)$ で,

$$\int_0^\infty g(x)dx < +\infty \quad (52)$$

となることを具体的に確かめることができるようなものを見つけてくるということです. 実際, このような関数 $g(x)$ が見つければ, (51) 式, (52) 式から,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \leq \int_0^\infty g(x)dx < +\infty$$

となることが分かりますから, 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は絶対収束することが分かるというわけです. このような関数 $g(x)$ を区間 $[0, \infty)$ における関数 $f(x)$ の優関数と呼びます.

具体的な優関数としては, 適当な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $g(x) = x^\alpha$ というように, x のべきで与えられる関数 (の定数倍) を考えることができる場合が多いです. 例えば, $\alpha \in \mathbb{R}$ として,

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

という関数を考えると, $0 < b \in \mathbb{R}$ として, $\alpha > 1$ のとき,

$$\int_b^\infty g(x)dx = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{b^{\alpha-1}} < +\infty$$

となり, $\alpha \leq 1$ のとき,

$$\int_b^\infty g(x)dx = +\infty$$

となることが分かりますから, $x = \infty$ の近くでの積分の値を考察する場合には,

—— 優関数の例 ($x = \infty$ の近くの場合) ——

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha}, (\alpha > 1)$$

という関数 (または, その定数倍) が優関数の候補として取れることが分かります.

全く同様にして, 例えば, 積分区間が $(a, b]$ で, $x = a$ で被積分関数の値が定義できないような場合には, $x = a$ の近くでの積分の値を考察するための優関数の候補として, 例えば,

— 優関数の例 ($x = a$ の近くの場合) —

$$g(x) = (x - a)^\alpha, (\alpha > -1)$$

というような関数 (または, その定数倍) を取ることができます. 実際には, Taylor 展開を用いて適当に被積分関数の大きさを評価してみることで, 優関数の候補を見つけることができることが多いです.

6 積分に関する少し進んだ話題*

さて, 2 節でも触れたように, 実際に積分の値を求めるときには, 置換積分や部分積分といった方法以外にも, 被積分関数を Taylor 展開して考えるという方法や, 被積分関数が積分変数以外のパラメータを含む場合には, そのパラメータに関して微分してみるという方法なども有効です. こうした方法を正当化するためには, 「積分をする操作」と「極限を取る操作」がいつ交換できるのかということを一度きちんと考える必要がありますが, この問題を考えるときの基本的な概念として「一様収束」という概念があります.

(あ) 一様収束とは (第 10 回 : 4 節, 5 節 ; 第 5 回 : 13 節)

さて, 「数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する」ということは, 直感的には, 「 n が大きくなるときに a_n が a に近づく」ということでした. これを, 「 a_n と a との間の距離が 0 に近づく」というように解釈すると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$$

というように表現することもできます. このように数列の収束については, ただ一通りの定義に落ち着くわけですが, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の収束については, 「収束の仕方」に応じていくつかの「収束のパターン」を考えることができます. その中で, 最も都合の良い収束の仕方というのが一様収束というものです. 例えば, 微積分学においては, 極限をとる操作「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」と積分を考える操作「 $\int$ 」とが, いつ交換するのかということをきちんと考えておくことが大切になりますが, 「一様収束」はこうした操作が交換することを保証してくれます.

そこで, まず, 関数列が収束するとはどういうことであるのかということを考えてみることにします. 例えば, 勝手な連続関数に対して積分の値がきちんと定まるのかなど, 細かい点を気にする場合には, 関数の定義域 $I \subset \mathbb{R}$ が $[0, 1]$ のような有界閉区間かどうかということが大切になるのですが, 一様収束という概念自体を考える上では関係ないので, 一般的な形で説明することにします. そこで, $I \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の勝手な部分集合であるとして, I 上の関数

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が勝手にひとつ与えられているとします. このとき, $f_1, f_2, f_3, \dots$ という関数の列が考えられますが, 数列との類推で, $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ のことを関数列と呼びます. ただし, f_n という表記では, 数列と紛らわしいと思われる方もあるかもしれないので, 関数

であることをハッキリさせるために、以下では、変数 x を明示して関数 f_n のことを $f_n(x)$ と表わすことにします。

そこで、いま、このような関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が、勝手にひとつ与えられているとします。このとき、 $x_0 \in I$ を勝手にひとつ取ってきて、関数 $f_n(x)$ たちの $x = x_0$ だけでの値を考えると $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ という数列ができます。これはただの数列ですから、この数列の極限を問題にすることができます。そこで、勝手にひとつ取ってきた点 $x_0 \in I$ に対して、数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ が存在すると仮定してみます。このとき、それぞれの点 $x_0 \in I$ に対して、この極限値を対応させる

$$f_\infty : x_0 \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

という関数 $f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$ を考えることができますが、こうして定まる関数 $f_\infty(x)$ が関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の極限であると考えることができます。このように、それぞれの点 $x_0 \in I$ に対して、 x_0 での値を集めてできる数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ が収束するときに、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ は各点収束と呼びます。これが最も素朴な関数列の収束の概念ですが、このような素朴な収束の仕方だけを考えたのでは、一般には、

——「極限」と「積分」の交換——

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \quad (53)$$

という「極限」と「積分」の交換は必ずしも成り立たないことが分かります。

そこで、どのような状況のときに、(53) 式が成り立ちそうかということを考えてみます。いま、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が各点収束しているとして、その極限の関数を、

——関数 $f_\infty(x)$ の定義式——

$$f_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

と表わすことにします。このとき、(53) 式が成り立つということは、 $n \in \mathbb{N}$ が十分大きな自然数のときに、

——(53) 式の言い換え——

$$\int_I f_n(x) dx \doteq \int_I f_\infty(x) dx \quad (54)$$

という見積もりが成り立つことであると言い換えができることに注意します。ここで、もし、 $f_n(x)$ のグラフの形と $f_\infty(x)$ のグラフの形が「ほぼ等しい」と仮定できるとすると、「 I 上で関数 $f_n(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の (符号付きの) 面積」は「 I 上で関数 $f_\infty(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の (符号付きの) 面積」と「ほぼ等しくなる」と考えられますから、(54) 式が成り立つと考えられます。したがって、このような場合には、(53) 式が成り立つと期待できそうなことが分かります。

そこで、 $\mathbb{R}$ の部分集合 I 上で定義された二つの関数 $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 f と g のグラフの形があまり変わらないということを数学的にどのように表現したら良いのかということを考えてみます。すると、「 $f(x)$ のグラフの形と $g(x)$ のグラフの形の近さ」を計る尺度として、

関数 f と関数 g の間の「距離」

$$\|f - g\| = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad (55)$$

という量を考えることができそうです。¹⁵ ここで、 $|f(x) - g(x)|$ という数は、 $f(x)$ という数と $g(x)$ という数の間の距離を表わしているわけですが、同様に、 $\|f - g\|$ という数は関数 f と関数 g の間の「距離」を表わしていると考えられます。¹⁶

以上の準備のもとで、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が、 $\|\cdot\|$ という距離に関して関数 $f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$ に近づくとき、すなわち、

一様収束の条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\| = 0$$

となるときに、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ は関数 $f_\infty(x)$ に一様収束すると言います。積分区間 I が $I = [a, b]$ というように有界な閉区間であり、 I 上で関数列 $f_n(x)$ が $f_\infty(x)$ に一様収束しているときには、

「極限」と「積分」の交換

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx \quad (56)$$

というように「極限」と「積分」が交換できることが分かります。例えば、

$$f_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

というべき級数に対して、

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

という部分和を考えてみると、

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^n c_k x^k \right\} dx$$

¹⁵一般的な状況を考えると、本当は、このような最大値が存在しないこともあり得ますが、ここでは一様収束という概念を説明することが目的なので、この問題は気にしないことにします。気になる方は、 I は $I = [0, 1]$ のような有界な閉区間で、 $f(x), g(x)$ など考える関数はすべて連続関数であると考えてもらっても構いません。

¹⁶議論を行なうときに、実数や複素数など数の世界での絶対値と区別して表わした方が混乱を招くおそれが少なくなるので、関数どうしの間の距離を $\|\cdot\|$ というように二重線にして表わす習慣があります。

$$= \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b x^k dx$$

と書き直せることが分かりますから、(56) 式は、この場合、

——— ベキ級数に対する項別積分定理 ———

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b x^k dx = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right\} dx$$

というベキ級数に対する項別積分定理を表わしていることが分かります。

(い) パラメータに関する微分 (第9回：8節；第10回：7節，8節)

さて、この節の最初にも述べたように、被積分関数が積分変数以外のパラメータを含む場合には、そのパラメータに関して微分してみるということも、積分の値を求めるためにはしばしば有効です。

例えば、いま、

$$I_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

という積分の値を求めることを考えてみます。このとき、被積分関数を「パラメータ α に関して微分してみる」と、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} \right\} = \frac{-(n+1)}{(x^2 + \alpha)^{n+2}}$$

となることが分かりますから、「パラメータ α で微分する」ことにより、基本的に $n \rightsquigarrow n+1$ と「化ける」ことが分かります。したがって、

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

としたときに、

——— 「パラメータ α に関する微分」と「積分」の交換 ———

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} f(x, \alpha) dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx \quad (57)$$

というように、パラメータ α に関する微分「 $\frac{d}{d\alpha}$ 」と積分「 $\int$ 」が交換することが確かめられれば、

$$\frac{d}{d\alpha} I_n(\alpha) = -(n+1) I_{n+1}(\alpha) \quad (58)$$

となることが分かります。したがって、後は、

$$\begin{aligned} I_0(\alpha) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

となることと, (58) 式から, $I_n(\alpha)$ が順番に求まることになります.

さて, 直感的には, 積分とは「連続無限個のものの和」であると解釈することができますから, (57) 式とは, α を変数とする連続無限個の関数 $\{f(x, \alpha)\}_{x \in [0, \infty]}$ たちの「無限和」 $\int_0^\infty f(x, \alpha) dx$ が「項別微分」できるかどうかという問題であることに注意します. 実際, α を変数とする関数列 $\{f_n(\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられていて, それらの総和を,

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) \quad (59)$$

とすると,

「パラメータ α に関する微分」と「無限和」の交換

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{d\alpha}(\alpha) \quad (60)$$

という式が成り立つかどうかということは, (59) 式の右辺が「項別微分」できるかどうかということを表わしているわけです. ここで, 文字が少し紛らわしいですが,

$$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow x \in [0, \infty]$$

と置き換えて,

$$f_n(\alpha) \rightsquigarrow f_x(\alpha) = f(x, \alpha)$$

と表わすことにします. さらに,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cdot = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \times 1 \rightsquigarrow \int_0^\infty \cdot dx$$

と置き換えることにすると, (59) 式, (60) 式は,

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(x, \alpha) dx \quad (61)$$

とすると,

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$$

という式が成り立つかどうかということになりますから, (57) 式とは, 正に, (61) 式の右辺が「項別微分」できるということを表わしていると解釈できることが分かります.

上の例では始めからパラメータ α が被積分関数に含まれていましたが, 実際には, 例えば,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$$

という積分を求めるために, わざわざ $1 \rightsquigarrow \alpha$ と取り代えて, 上のように $I_n(\alpha)$ を計算してから $I_n(1)$ として答を得るというような方法で積分が計算できることがあ

ります。このような方法には一般的な処方箋はなく、どのようにパラメータを被積分関数に導入するかが「腕の見せどころ」になります。¹⁷

7 多変数関数の積分をどのように理解するのか

多変数関数に対する積分についても、基本的な考え方は一変数関数に対する積分と同じです。ただし、一変数関数の場合と違って、多変数関数の場合には、積分領域に関して色々な可能性を考えることができます。多変数関数の積分といっても、本質的な部分は二変数関数の場合にすべて現われますから、皆さんにとっては、まず、二変数関数の積分の場合をよく理解することが大切ではないかと思います。¹⁸ そこで、以下では、二変数関数の場合について説明することにします。二変数関数の場合にも、「Riemann 和の極限として積分の値を定義するという Riemann 積分の考え方を理解する」ということと、「実際に積分の値を計算する技術を身につける」ということを通して、二変数関数の積分に対する理解を深めるということが、主な目標となります。

(あ) 二変数関数に対する Riemann 積分の考え方 (第 13 回 : 3 節)

二変数関数の場合にも、積分に対する理解を深める上で、「積分の値とは何か」ということを理解することが大切になります。この場合にも、積分領域の性質に起因する問題の起こらない「有界閉区間上の積分の値とは何か」ということを理解することが基本になります。

いま、 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として、

($\mathbb{R}^2$ の) 有界閉区間

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

という式によって定まる $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $I = [a, b] \times [c, d]$ を ($\mathbb{R}^2$ の) 有界閉区間と呼びます。このとき、 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、関数 $f(x, y)$ の有界閉区間 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上での積分の値

$$\iint_I f(x, y) dx dy$$

とは、一変数関数のときと同様に、直感的には、区間 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $z = f(x, y)$ のグラフと xy 平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わすと考えることができます。

ただし、一般に、「曲がった図形」を考えるときには、「その体積の値がいくつになるのか」ということや、「そもそも体積が定まるのか」ということは、それほど明らかなことではなくなってしまいます。そこで、一変数関数のときと同様に、積分の値

¹⁷興味のある方は、微積分学の教科書などに載っているパラメータを含まない様々な形の積分に対して、「隠れたパラメータ」を自分で導入して計算を試みることで「腕を磨いて」みて下さい。

¹⁸この場合が理解できれば、三変数以上の関数の場合にどうすればよいのかということは、容易に理解できるのではないかと思います。

$\iint_I f(x, y) dx dy$ を考えるにあたって、「直方体であれば、その面積についてハッキリしたことが言える」ということに注目して、以下で見るように、「(三次元の) 短冊の体積の極限值」として積分の値 $\iint_I f(x, y) dx dy$ を定義するのが普通です。

そこで、まず、区間 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $z = f(x, y)$ のグラフと xy 平面で囲まれた領域である「曲がった図形」を (三次元の) 短冊で近似することを考えます。そのために、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

となるような実数を勝手にひとつずつ選んで、

区間 $I = [a, b] \times [c, d]$ の分割

$$I = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

というように、有界閉区間 $I = [a, b] \times [c, d]$ を小区間 I_{ij} たちの和に分割してみることになります。このような分割を区間 I の分割と呼ぶことにして、こうして得られる分割を Δ と表わすことにします。また、各小区間 I_{ij} における x 方向の増分、 y 方向の増分を、それぞれ、

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

と表わし、

分割 Δ の分割の幅

$$|\Delta| = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \leq j \leq n}} \{|\Delta x_i| + |\Delta y_j|\}$$

を分割 Δ の分割の幅と呼ぶことにします。さらに、(三次元の) 短冊に現われるそれぞれの直方体の高さを定めるために、各小区間の代表点 $\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij}$ を勝手にひとつずつ選んできて、

$$\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

と表わすことにします。このとき、各小区間 $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ を底辺とし、 $f(\gamma_{ij})$ を高さとする直方体たちからなる (三次元の) 短冊を考えると、その体積は、

Riemann 和の定義式

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\gamma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

となりますが、 $S(\Delta; \gamma)$ のことを区間 I の分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x, y)$ の Riemann 和と呼びます

以上の言葉の準備のもとで、区間 I の分割 Δ や代表点 γ の取り方に依らずに、分割の幅 $|\Delta|$ が小さくなりさえすれば、Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の値が共通の極限に近づくとき、この極限値を「関数 $f(x, y)$ の区間 I 上での積分の値」とであると定義します。すなわち、

—— 積分の定義 ——

$$\begin{aligned}\iint_I f(x, y) \, dx dy &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\gamma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j\end{aligned}$$

と定めます。すると、いつ積分の値がきちんと定まるのかということが問題になりますが、一変数関数のときと同様に、例えば、 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数であれば、勝手な有界閉区間 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上で、 $\iint_I f(x, y) \, dx dy$ という値がきちんと定まることが分かります。

(い) 有界閉領域上の積分 (第 13 回 : 5 節)

二変数関数の場合には、積分領域 D として、色々な可能性を考えることができますが、例えば、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

という円板や、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

という三角形領域のように、積分領域 D が有界閉領域の場合には、 $D \subset I$ となるような有界閉区間 I を勝手にひとつ取ってくることで、次のように、積分領域が有界閉区間 I の場合に帰着させて考えることができます。

いま、被積分関数 $f(x, y)$ に対して、

—— 関数 $f_D(x, y)$ の定義 ——

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) \notin D \text{ のとき} \end{cases}$$

という式により与えられる関数 $f_D(x, y)$ を補助的に考えてみます。このとき、関数 $f(x, y)$ の有界閉領域 D 上での積分の値を、

—— 関数 $f(x, y)$ の有界閉領域 D 上での積分の定義式 ——

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_I f_D(x, y) \, dx dy$$

という式により定義することができます。すると、やはり、いつ積分の値がきちんと定まるのかということが問題になりますが、この場合には、一般には、定数関数に対

してさえ積分の値が定まるとは限らず、「連続関数に対して積分の値がきちんと定まるかどうか」ということは「積分領域 D の境界 ∂D の性質」に関係してきます。

いま、関数 $f(x, y)$ として、特に、

$$f(x, y) = 1$$

という定数関数を考えてみます。すると、定数関数 $f(x, y) = 1$ の領域 D 上での積分の値は、直観的には、

$$\iint_D 1 dx dy = \text{vol}(D) \quad (62)$$

というように積分領域 D の面積 $\text{vol}(D)$ を与えると考えられます。その意味で、(62) 式の積分の値がきちんと定まるとき、 $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を面積確定の領域と呼んだりします。この言葉を用いると、連続関数 $f(x, y)$ は、 $\mathbb{R}^2$ 内の勝手な面積確定の領域 D 上で積分の値がきちんと定まることが分かります。例えば、上で挙げた円板や三角形領域のように、積分領域 D の境界 ∂D が、滑らかな曲線をいくつか繋いだような曲線であるような場合には、領域 D は面積確定の領域となることが分かり、勝手な連続関数に対して、 D 上での積分の値 $\iint_D f(x, y) dx dy$ がきちんと定まることが分かります。

(う) Fubini の定理 (第 13 回 : 4 節)

一変数関数の場合と同様に、特別な場合を除いては、定義にもとづいて積分の値を求めるということは不可能ですから、実際に積分の値を求めるためには「別な工夫」が必要になります。そのための基礎を与えてくれるのが、

Fubini の定理 (積分領域が有界閉区間の場合)

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \quad (63)$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \quad (64)$$

という Fubini の定理です。これにより、「二変数関数に対する積分の値を求める問題」が、「最初に、(y をパラメータであるとみなして) x 方向の積分を計算し、次に、 y 方向の積分を計算するという問題」、あるいは、「最初に、(x をパラメータであるとみなして) y 方向の積分を計算し、次に、 x 方向の積分を計算するという問題」に帰着できることになります。すなわち、「二変数関数の積分を求める問題」が「一変数関数の積分を順番に求めるという累次積分を求める問題」に帰着することになります。

(あ) の項で見たように、関数 $f(x, y)$ の有界閉区間 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上での積分の値

$$V = \iint_I f(x, y) dx dy$$

とは、直感的には、区間 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $z = f(x, y)$ のグラフと xy 平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わすと考えることができます。そこで、

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

という y 方向の区間 $[c, d]$ の分割だけを用いて、「 $y = \text{一定}$ 」という平面で分割することにより、この体積 V を求めることを考えてみます。すると、 $\eta \in [c, d]$ として、 $y = \eta$ という平面で切ったときの「切り口」の表面積 $\sigma(\eta)$ は、

—— $y = \eta$ という平面で切ったときの「切り口」の表面積 ——

$$\sigma(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx$$

という式で与えられることが分かりますから、後は、表面積 $\sigma(y)$ に「厚み」 dy を掛けてから足し上げることにより、体積 V を求めることができるはずです。したがって、体積 V は、

—— Fubini の定理の直感的な意味 ——

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \sigma(y) dy \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

というようにも表わせるはずであるというのが、(63) 式の直感的な意味です。¹⁹

同様にして、積分領域が有界閉領域の場合には、

$$\begin{aligned} I_x &= \{y \in [c, d] \mid (x, y) \in D\} \\ I_y &= \{x \in [a, b] \mid (x, y) \in D\} \end{aligned}$$

として、

—— Fubini の定理 (積分領域が有界閉領域の場合) ——

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left\{ \int_{I_y} f(x, y) dx \right\} dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{I_x} f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

という形で Fubini の定理が成り立つことが分かります。この場合に積分の値をきちんと求めるためには、積分領域 D の図を描いてみるなどして、積分区間 I_x, I_y などをきちんと求めて計算を進めることが大切です。

¹⁹(64) 式についても、全く同様に考えることができます。すなわち、今度は、 $\xi \in [a, b]$ として、 $x = \xi$ という平面で切ったときの「切り口」の表面積を考えればよいわけです。

(え) 変数変換の公式 (第 13 回 : 7 節)

一変数関数の積分の場合には, 置換積分という名で呼ばれる積分変数の変数変換に対する積分の変換公式がありますが, 以下で見るように, 多変数関数の場合にも, この置換積分の公式を拡張した形の変換公式が成り立ちます.

さて, (あ) の項では, Riemann 和の極限として積分の値を定義する Riemann 積分の考え方について触れましたが, Riemann 積分の考え方をよくよく反省してみると, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を考えるのに,

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

という xy 座標から定まるような分割を考えたということが本質的なことなのではなく, 積分区間である $[a, b] \times [c, d]$ を,

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

というように小さな領域

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

達の和に分けて, それぞれの小領域の代表点

$$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij}$$

を選ぶことで,

Riemann 和 (座標によらない表示)

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij}) \quad (65)$$

という形の和を考えたということの方が本質的なことであることが分かります.²⁰ したがって, 例えば, 極座標にもとづく分割のように, xy 座標とは異なる座標系にもとづく積分領域の分割を行なって (65) 式のような形の Riemann 和を考えたとしても, 分割をどんどん細かくしていったときには, やはりそれらの Riemann 和も, (あ) の項で定めたような積分の値に落ち着くはずであることが分かります.²¹

そこで, 話を具体的にするために, $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

²⁰以下での議論の本質が見やすいように, 各小領域 I_{ij} の面積 $\Delta x_i \Delta y_j$ を $\text{vol}(I_{ij})$ と表わすことにしました.

²¹(あ) の項で見たように, 直観的には, $\iint_D f(x, y) dx dy$ という積分の値は, 積分領域 D 上で $z = f(x, y)$ のグラフと xy 平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わしています. このような体積は, どのような座標系を用いて $\mathbb{R}^2$ 上の点を表わすのかということには無関係にきちんと定まっているはずだろうということです.

という半径 R の円板を考えて,

$$\iint_{D_R} f(x, y) dx dy$$

という積分の値を, 極座標から定まるような分割に対する (65) 式という形の Riemann 和の極限であると考えたときに, どのような表示が得られることになるのかということを考えてみることにします.

いま,

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

によって平面 $\mathbb{R}^2$ 上の極座標 (r, θ) を定めることにします. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &= r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{m-1} < r_m = R \\ 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = 2\pi \end{aligned}$$

によって定まる極座標で見たときの区間 $[0, R] \times [0, 2\pi]$ の分割 Δ を考えると, それに応じて, 積分領域 D_R が,

$$\begin{aligned} D_R &= \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij} \\ I_{ij} &= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [r_{i-1}, r_i], \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j] \} \end{aligned}$$

というように, 扇形の小領域 I_{ij} の和に分割されることになります. そこで, 各小領域 I_{ij} の代表点を, $(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \in [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$ を勝手にひとつずつ選んでくることによって,

$$\gamma_{ij} = (\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \in I_{ij}$$

と表わすことにすると, (65) 式により定まる Riemann 和は,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij})$$

と表わすことができます.

さらに, 分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さいと仮定すると, 各小領域 I_{ij} は十分小さな扇形となりますから,

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}, \quad \Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$$

として,

—— 各小領域 I_{ij} の微小面積 $\text{vol}(I_{ij})$ の見積もり ——

$$\text{vol}(I_{ij}) \doteq r_{i-1} \Delta r_i \Delta \theta_j \tag{66}$$

と見積もれることが分かります. また, $\rho_{ij} \in [r_{i-1}, r_i]$ であり, $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ は十分小さいと仮定していましたから,

$$r_{i-1} \doteq \rho_{ij} \tag{67}$$

と置き換えることにすると, 結局, (66) 式, (67) 式から, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の大きさが,

$$S(\Delta; \gamma) \doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \rho_{ij} \Delta r_i \Delta \theta_j \quad (68)$$

と見積もれることが分かります.

ここで, (68) 式の右辺は,

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$$

と定めたときに,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \Delta r_i \Delta \theta_j$$

というように表わすことができますから, これは関数 $g(r, \theta)$ に関する Riemann 和に他ならないということに注意します. いま, (68) 式という見積もりは, 分割の幅を $|\Delta| \rightarrow 0$ としたときに「等号」になると考えられますから, (68) 式より,

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \Delta r_i \Delta \theta_j \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned} \quad (69)$$

となると考えられます. 一方, 上で注意したことから,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \iint_{D_R} f(x, y) dx dy \quad (70)$$

となるとも考えられますから,²² (69) 式, (70) 式から,

変数変換の公式 (極座標の場合)

$$\iint_{D_R} f(x, y) dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

という式が成り立ちそうなが分かります.

そこで, より一般に, $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な (曲線) 座標系を用いて同様の考察を行なうとどうということになるのかということを考えてみます. いま, 何度でも微分できるような二つの滑らかな関数 $\varphi(s, t), \psi(s, t)$ を用いて, $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) が,

$$(x, y) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$$

²²すなわち, (あ) の項で考えたように, 底面が長方形である「小柱」の体積を考えるのではなく, 底面が扇形である「小柱」の体積 $f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij})$ を足し上げることによって, 全体積 $\iint_{D_R} f(x, y) dx dy$ を求めることができるはずであるということです.

というようにパラメータ表示されているとします. こうしたパラメータ表示により,

$$(x, y) \longleftrightarrow (s, t)$$

というように, (x, y) と (s, t) が一対一に対応しているとする, (s, t) も $\mathbb{R}^2$ 上に一つの (曲線) 座標系を定めていると考えることができます.

そこで, いま, (s, t) という座標に関する有界閉区間 $[a, b] \times [c, d]$ に対応する $\mathbb{R}^2$ 内の

$$D = \{(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, t) \in [a, b] \times [c, d]\}$$

という領域を考えて,

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

という積分に対して上と同様の考察を行なうとどういうことになるのかということを考えてみます. すると, 前と同様に,

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{m-1} < s_m = b$$

$$c = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d$$

によって定まる (s, t) という座標に関する区間 $[a, b] \times [c, d]$ の分割 Δ を考えると, それに応じて, 積分領域 D が,

$$D = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

$$I_{ij} = \{(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [s_{i-1}, s_i], t \in [t_{j-1}, t_j]\}$$

というように, 小領域 I_{ij} の和に分割されることになります. そこで, 前と同様に, 各小領域 I_{ij} の代表点を, $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ を指定することによって,

$$\gamma_{ij} = (\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \in I_{ij}$$

と表わすことにすると, (65) 式により定まる Riemann 和は,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \text{vol}(I_{ij}) \quad (71)$$

と表わすことができます.

そこで, さらに, 分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さいと仮定して, 各小領域 I_{ij} の面積 $\text{vol}(I_{ij})$ の大きさを見積もることを考えてみます. いま, 小領域 I_{ij} は, (s, t) という座標を用いて表わすと $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ という長方形に対応していました. よって, この長方形の頂点に対応する $\mathbb{R}^2$ 上の点を, それぞれ,

$$A = (\varphi(s_{i-1}, t_{j-1}), \psi(s_{i-1}, t_{j-1})),$$

$$B = (\varphi(s_i, t_{j-1}), \psi(s_i, t_{j-1})),$$

$$C = (\varphi(s_{i-1}, t_j), \psi(s_{i-1}, t_j)),$$

$$D = (\varphi(s_i, t_j), \psi(s_i, t_j))$$

と表わすことにすると, 小領域 I_{ij} は A, B, C, D を頂点とする「長方形もどき」の形をしていると考えられます. また, 分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さいと仮定すると,

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}$$

という各小領域における s, t の「微小変位」も十分小さいと考えられますから, 点 B の x 座標と y 座標の値を, Taylor 展開を用いて, それぞれ,

$$\begin{aligned} \varphi(s_i, t_{j-1}) &= \varphi(s_{i-1} + \Delta s_i, t_{j-1}) \\ &\doteq \varphi(s_{i-1}, t_{j-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \\ \psi(s_i, t_{j-1}) &= \psi(s_{i-1} + \Delta s_i, t_{j-1}) \\ &\doteq \psi(s_{i-1}, t_{j-1}) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \end{aligned}$$

というように見積もることができます. したがって, 点 A から点 B への変位ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は,

$$\overrightarrow{AB} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \end{pmatrix} \quad (72)$$

というように見積もれることが分かります.²³ 同様に考えると, 点 A から点 C への変位ベクトル $\overrightarrow{AC}$ も,

$$\overrightarrow{AC} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta t_j \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta t_j \end{pmatrix} \quad (73)$$

というように見積もれることが分かります. いま, 分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さいと仮定すると, 各小領域 I_{ij} は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を二辺とする平行四辺形にほぼ等しいと考えられますから, その面積 $\text{vol}(I_{ij})$ も $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を二辺とする平行四辺形の面積にほぼ等しいと考えられます.

ここで, 線型代数学の知識を用いると, このような平行四辺形の面積は行列式で与えられることが分かりますから, (72) 式, (73) 式から, 各小領域 I_{ij} の面積 $\text{vol}(I_{ij})$ は, Jacobi 行列

—— 座標変換の Jacobi 行列 ——

$$J(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|J(s, t)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \end{vmatrix}$$

を用いて,

²³線型代数学の記法と合わせるために, $\mathbb{R}^2$ 内のベクトルを縦ベクトルで表わすことにしました.

—— 各小領域 I_{ij} の微小面積 $\text{vol}(I_{ij})$ の見積もり ——

$$\text{vol}(I_{ij}) \doteq |J(s_{i-1}, t_{j-1})| \cdot \Delta s_i \Delta t_j \quad (74)$$

というように見積もれることが分かります。また、前と同様に、 $\xi_{ij} \in [s_{i-1}, s_i]$, $\eta_{ij} \in [t_{j-1}, t_j]$ であり、 $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ も $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ も十分小さいと仮定していましたから、さらに、

$$s_{i-1} \doteq \xi_{ij}, \quad t_{j-1} \doteq \eta_{ij} \quad (75)$$

と置き換えることにすると、結局、(74) 式、(75) 式から、(71) 式という Riemann 和は、

$$S(\Delta; \gamma) \doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \cdot |J(\xi_{ij}, \eta_{ij})| \cdot \Delta s_i \Delta t_j \quad (76)$$

と見積もれることが分かりました。よって、(76) 式から、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \cdot |J(s, t)| \, ds dt \quad (77)$$

となると考えられます。一方、前と同様に、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \iint_D f(x, y) \, dx dy \quad (78)$$

となると考えられますから、²⁴ (77) 式、(78) 式から、

—— 変数変換の公式 (一般の曲線座標の場合) ——

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \cdot |J(s, t)| \, ds dt$$

という式が成り立ちそうなが分かりました。

(お) 広義積分²⁵

一変数関数に対する広義積分の場合と同様に、積分領域 D が有界閉領域と異なる場合でも、 D を近似する D に含まれる有界閉領域 K を考え、

—— 広義積分 ——

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \lim_{K \rightarrow D} \iint_K f(x, y) \, dx dy$$

というように、有界閉領域上での積分の値 $\iint_K f(x, y) \, dx dy$ の極限として、二変数関数の「広義積分」の値 $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ を定めることができます。すると、いつ

²⁴ 前と同様に、今度は、一般には、歪んだ底面 I_{ij} を持つ「小柱」の体積 $f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \text{vol}(I_{ij})$ を足し上げることににより、全体積 $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ を求めようというわけです。

²⁵ 多変数関数に対する広義積分に関しては、「数学 IB 演習の解説」の中では、特に取り上げて解説することはしませんでした。興味のある方は、一変数関数の場合を参考にして、自分で考えてみるなり、適当な教科書を参照するなどしてみてください。

広義積分の値がきちんと定まるのかということが問題になりますが、一変数の場合と同様に、広義積分の値がきちんと定まることを保証する十分条件として、

—— 広義積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ が絶対収束する条件の言い換え ——

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy < +\infty \quad (79)$$

という条件が知られていて、(79) 式が成り立つときに、広義積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ は絶対収束すると言います。また、絶対収束していることを確かめるための判定方法として、優関数による判定方法も一変数関数の場合と全く同様に考えることができます。

8 微積分学の応用

将来、皆さんがどの分野に進まれたとしても、微積分学や線型代数学を通して現在皆さんが学ばれている数学的な概念が、基本的な言葉として用いられている場面に出会うことになるのではないかと思います。その意味では、皆さんが将来それぞれの分野で学ばれることになるすべての事柄が微積分学の応用と呼べるのではないかと思います。この演習では、より数学的な応用例として、「円周率 π の近似計算」や「 π が無理数であるということ、したがって、 $\pi = 3.14\cdots$ の「 $\cdots$ 」の部分は果てしなく続くということの証明」や「ベキ級数を用いた微分方程式の解法」や「 n 次元球面の表面積の計算」などを取り上げようと考えています。

もちろん、数学においてさえ、微積分学の応用はこれらの事柄に限られるわけではありませんが、演習時間の制約と、どのような分野に進まれるかということには関係なく、皆さんに興味を持っていただけることを期待して、これらの応用例を取り上げることにしました。皆さんは、これらの例に捕らわれずに、皆さん自身の興味に従って、微積分学や線型代数学で培ってきた知識をどんどん使って考えてみることで、皆さん自身の「生きた知識」を増やして行って下さい。

9 演習問題で扱う内容について

最初に述べたように、これらの基本的な事柄を、具体的な問題にもとづいて説明できるように演習問題を選んでみたのですが、実際の演習問題との対応は、おおよそ次のようになっています。

(1) 「無限和」について

第 8 回の問 2：交代級数の値に対する評価式

(2) 一変数関数の積分について

第 8 回の問 1：具体的な積分の計算（有理関数の積分）

第 8 回の問 3：具体的な積分の計算（Taylor 展開を用いた積分の計算例）

第 9 回の問 1：具体的な積分の計算（三角関数の有理式）

第 9 回の問 2 : 具体的な積分の計算 (パラメータに関する漸化式にもとづく方法)
 第 10 回の問 1 : 具体的な積分の計算 (有理関数の積分)
 第 10 回の問 2 : 積分と極限の交換について (一様収束という概念の紹介)
 第 10 回の問 3 : 具体的な積分の計算 (パラメータに関する微分を用いる方法)
 第 11 回の問 1 : 具体的な積分の計算 (x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分)
 第 11 回の問 2 : 具体的な積分の計算 (曲線の長さ)
 第 12 回の問 1 : 具体的な積分の計算 (広義積分の具体例)
 第 12 回の問 2 : (広義積分の具体例も兼ねて) Γ 関数の基本的な性質についての紹介

(3) 二変数関数の積分について

第 13 回の問 1 : 具体的な重積分の計算
 第 13 回の問 2 : 具体的な重積分の計算 (広義積分の具体例)

(4) 微積分学の応用

第 9 回の問 3 : 円周率 π の近似計算
 第 11 回の問 3 : 円周率 π が無理数であることの証明
 第 12 回の問 3 : ベキ級数を用いた微分方程式の解法
 第 13 回の問 3 : n 次元球面の表面積の計算

以上のことを参考にして、時間内に解けなかった場合でも、毎回の問題を一度は自分で解いてみて、皆さんなりに「微積分学における基本的な考え方」を反省してみると、より良く理解できることもあるのではないかと思います。そのような形で、基本的な考え方が分かってきたら、毎回 2 ページ目につけている演習問題をやってみたり、適当な演習書の問題をやってみると、さらに理解が進むのではないかと思います。どんな科目であれ、「生きた知識」を身につけるためには、「自分のペースで主体的に勉強する」ことが、何よりも大切です。ですから、大学の講義や演習の進度とは関係なしに、先の方へ進めると思える方は、自分で教科書などをどんどん読み進めたら良いと思いますし、逆に、今の演習の内容が進み過ぎていると思われる方は、夏学期にお配りした演習問題に取り組んでいただいても構いませんし、本屋や図書館へ行って、自分に合った教科書を見つけて、理解できる部分に立ち返って、じっくりと取り組まれたら良いのではないかと思います。

皆さんが数学に対して、どのような印象を持たれているのか、また、これまで演習を続けてきて、その印象が変り始めているということがあるのかどうか分かりませんが、数学を学ばれてゆく中で、先人たちが重ねてきた「工夫」を、皆さんなりに吸収することで、「物事をしみじみと理解する喜び」をたくさん経験していった欲しいと思っています。そうした努力を重ねることで、皆さん自身の「生きた知識」が身につくのではないかと思いますし、それにより、将来、「皆さん自身が工夫をしてみる助け」になることもあるのではないかと思います。私としては、将来、皆さんがどのような分野に進まれるのかということとは関係なしに、皆さんの中の一人でも多くの方に「数学のよき理解者」となっていたら良いなと思っています。