数学 IB 演習の進め方について (夏学期)

1　はじめに

これから一年間, 皆さんと一緒に微積分学の演習を行なうことになりましたが, **どのような意図で毎回の問題を選んでいるのか**ということや, **どのような態度で毎回の演習に取り組んでいただきたいのか**ということをお話しておくと, 毎回の演習に取り組みやすくなる方がいるかもしれません. そこで, そうした点について少しご説明しておこうかと思います.

2　毎回の演習問題について

さて, 数学の教科書や大学における数学の講義では, ページ数の制約や講義時間の制約などから, 定義や定理を述べて, それを順番に証明してゆくという**「教える側にとって」最も効率的な方法**が取られるのが普通です. しかし, こうした方法は, 学ぶ側にとって必ずしも理解しやすいものであるとは限りません. この演習の第 1 回の解説の中でも書いたことですが, 数学を理解する上では**「どのようなことを問題にして, それをどのように考えて解決しようとしているのか」という「考え方のアイデア」をしみじみと理解する**ということが何よりも大切です.

そこで, 個人的な実験として, **「考え方のアイデア」を全面に出して説明する**というような形で演習を進めていこうと考えました. おそらく, 講義の方では一般論という形で数学的な事項に関する説明が進んでゆくことが多いのではないかと思いますが, 演習の方では**具体的な問題にもとづいて, なるべく「考え方のアイデア」がはっきりするような形で微積分学の基本的な考え方を説明してみよう**と思っています. したがって, 毎回の問題の選択にあたっても, 講義で習った定理や公式を当てはめることで解けるような問題を選んでいるというよりも, **微積分学における基本的な考え方を具体例にもとづいて説明するための助けになるような問題**を選んでいます.

このような方針なので, 毎回の演習問題は**皆さん自身の「知識を確認する」**ということより, それぞれの問題について**皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらう」**ということを目的として出題しています. すなわち, 具体的な問題についてあれこれ考えてみることで,「どのようなことを問題にして, それをどんなアイデアで解決しようとしているのか」という基本的な考え方を, 皆さん自身がしみじみと理解できるようになるための助けになればと良いと思って問題を選択しているわけです.

これまで, 皆さんは, 最初に, 教科書を読んだり講義を聞いたりして数学的な事柄を学び, 次に, そこで理解した「考え方」や「公式」などを当てはめて問題を解いてみるという形

で問題演習をすることが多かったのではないかと思います．ところが, 大学の数学では, 内容が少し抽象的になってくることに加えて, 残念なことに, 教科書を読んでみても, 何を考えているのかとか, それをどのようにして解決しようとしているのかといった「考え方」や「アイデア」が全面に出されて説明されていることも少なかったりするために, **そもそも「数学的な事柄」を理解するという最初の段階で著しく困難を感じる**ということがしばしば起こりえます．

そこで, この演習では, 順番を逆にして, **最初に, 皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらう」**ということをしていただき, **次に, 毎回解答とともにお配りする解説を合わせて読んでいただく**ことにより,「数学的な事柄」をより良く理解する助けにしていただくということを考えました．ですから, 皆さんもその場で「できた」とか「できない」とかいうことに一喜一憂したりせずに, むしろ**「新しい考え方をより良く理解できるようになるために問題を考えてみる」**というスタンスで, 毎回の演習に取り組んでもらえたらと思います．

私の方の心づもりとしては, 毎回の問題には「ヒント」も付ける予定ですので, 問題を見てすぐに諦めたり, 答えを見たりなどせずに, 必要に応じて「ヒント」を参考にするなどして, とにかく皆さん自身の頭であれこれと「思考錯誤してもらう」と良いのではないかと思います．その後で解説を合わせて読んでいただければ, たとえ問題が最後まで解けなかった場合でも, そもそも何を問題にしているのかという微積分学における「基本的な考え方」がより良く理解できるようになるのではないかと思います．そのようにして「数学的な事柄」の理解が進むと, 今度は**自分の理解を確かめるために問題を解いてみたい**と思う方も出てくるのではないかと思いますが, そのような方のために, 毎回の問題とは別に「数学 IB 演習問題」として, 毎回１ページ問題を付けようと思います.[1] その意味で,「数学 IB 演習問題」の方が, 毎回の問題より少し難し目になっています.[2]

本当は, もう少し「基本的な計算練習」になるような問題も, 例えば,「数学 IB 基本演習問題」として, もう１ページ付けることができたら良いのですが, 現時点ではなかなかその時間が取れませんので, そうした「基本的な計算練習」をしたい方は, 申し訳ありませんが, ご自分でそうした基本的な問題の載っている教科書や演習書を用意していただけると助かります．

私としては, 上に述べたような意図の下で演習を行なおうと思っているのですが, これから演習の回数を重ねていく中で,「問題を解く時間が足りないので問題数を減らして欲しい」とか「もっと基本的な問題も入れて欲しい」というような感想を持たれる方も出てこられるのではないかと思います．私も**こうした感想はもっともなことである**と思うのですが, **微積分学における基本的な物の見方や考え方を具体的な問題を通して一年間で一通り説明しよう**と思うと, 演習の時間というのは一年間で十三回しかないのでどうしても毎回三題は問題を出題する必要があります．もちろん基本的な考え方をすべて説明するというのは諦めて, 十三回で進めるところまでゆっくり進むという選択肢もあるわけですが, 取り上げなかった基本的な考え方が皆さんにとって将来必要になってくるかもしれません．上で述べたように, 毎回の演習では, 問題の解答だけでなく, 出題した問題にもとづいて基本

[1]ただし, 第 1 回の解説では, まだ余り新しい数学的な内容がありませんから, 実際には, 第 2 回から「数学 IB 演習問題」を付けようと思います．

[2]特に,「問 12*」というように $*$ 印を付けた問題は「力試し」のつもりで出題していますので, できなくとも余り気にしないで下さい．

的な考え方を説明した解説もお配りする予定ですが, 一通り基本的な考え方を網羅したものをお配りする方が, 将来, 皆さんが勉強するときの助けになるのではないかなと思っています.

以上のような考えで毎回の問題を選択していますので, 回によっては**問題を解く時間が全然足りない**ということや, **必ずしも講義と進度が合わない**ということが出て来るかもしれません. あるいは, **問題が難しすぎて全く手が出ない**ということもあるかもしれません. 最初の演習の時間にも説明しましたが, この演習の目的は, **皆さん自身のペースで勉強を進めていただいて, 微積分学に関する基本的な考え方に対する理解を深めていただく**ということですから, 必ずしも毎回お配りする問題に取り組んでいただかなくとも**どのような問題に取り組んでいただいても構いません.** 数学を身に付けるためには, 周りの人や講義や演習のペースに惑わされずに**自分のペースでじっくり取り組む**ことが大切ですから, もう少し基本的な事柄から取り組みたいと思われる方は, 毎回お配りする問題にとらわれずに, **自分にあった教科書や問題集を用意して取り組んでみて下さい.** また, 演習のペースが自分の勉強のペースより速いなと思われる方は, 例えば, 第 4 回の演習のときに, すでにお配りしている第 2 回の問題に取り組んでみるというように, **自分の理解度に合わせたペースで毎回の演習問題に取り組んでいただいても構いません.** また, **毎回の問題を予め家で解いてきて, 演習の時間にはひたすら解説を読む**ということでも構いません. とにかく, 演習の時間を有意義に使っていただければと思っています.

3　微積分学における基本的な考え方 (微分に関するもの)

前節で述べたように, この演習で取り上げる予定の問題は, **微積分学における基本的な考え方を具体的な問題を通して一年間で一通り説明しよう**という目的に合わせて選択しています. そこで, **微分積分学の基本的な考え方**としてどのようなものがあって, それをどの回の演習で取り上げる予定なのかということを少しだけ説明してみることにします.

実際の講義では, 夏学期と冬学期の講義を**「一変数関数の微積分」と「多変数関数の微積分」**という形で分ける方もいますが, **「微分」と「積分」**という形で分けて説明した方が, **「一変数関数の微積分」における考え方をどのような形で「多変数関数」の場合に拡張しようとしているのか**という対比がはっきりするのではないかと思いますので, この演習では, 前半の第 1 回から第 7 回までで**「微分」に関する基本的な考え方**を, また, 後半の第 8 回から第 13 回までで**「積分」に関する基本的な考え方**を取り上げることにしました.[3]

そこで, ここでは前半で取り上げる予定である**「微分」に関する基本的な考え方**について少し説明してみることにします. 微積分学において, 微分に関する部分の大きな目標は**「関数の様子をより良く理解できるようになる」**ということにあります. また, そのための方法が**「一般の関数を「多項式の姿」に化かして, 多項式の力を借りて関数の様子を理解する」**ということです. 言葉の説明は後回しにして, 微分に関する基本事項を図にまとめると, おおよそ, 次のようになります.

[3]ちなみに, 数年前から, 多変数を含めた「微分」の部分を夏学期に終わらせ,「積分」の部分を冬学期に終わらせるということが, 教官向けのシラバスで正式に指定されるようになったのですが, 実際の講義でこの指示が守られるのかどうかということは, 現時点では不明です.

一変数関数の微分に関する基本事項

級数

いつ「無限和」$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が意味があるのかを理解する.

- 絶対収束と条件収束の違い
- 級数の収束判定法

$\downarrow$ $a_n = c_n x^n$ のとき

ベキ級数

どのような x に対して「無限次の多項式」の値に意味があるのかを理解する.

- ベキ級数の収束半径
- 項別微分, 項別積分
- Taylor 展開

  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dfrac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$

$\uparrow$ $n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となるとき

Taylor の定理

一般の関数 $f(x)$ を「多項式もどき」の姿に化かす.

- Taylor の定理

  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ($P_n(x)$: n 次の近似多項式, $R_n(x)$: 剰余項)

  $$\begin{cases} P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{cases}$$

$\downarrow$ 一次式の近似を考える

関数の大まかな様子（その１）

$f(x) \fallingdotseq P_1(x)$ と近似して, $x = a$ のまわりでの $f(x)$ の様子を理解する.

- 単調性

  $$\begin{cases} f'(a) > 0 \implies & x = a \text{ のまわりで } f(x) \text{ は単調増加.} \\ f'(a) < 0 \implies & x = a \text{ のまわりで } f(x) \text{ は単調減少.} \end{cases}$$

  特に, $x = a$ のまわりで $f(x)$ には逆関数が存在する.

- 臨界点

  $f'(a) = 0 \iff x = a$ が極値点の候補.

$\downarrow$ さらに, 二次式の近似を考える

関数の大まかな様子（その２）

$f'(a) = 0$ のとき, さらに, $f(x) \fallingdotseq P_2(x)$ と近似して, $x = a$ のまわりでの $f(x)$ の様子を理解する.

- 極値判定

  $$\begin{cases} f''(a) > 0 \implies & x = a \text{ で } f(x) \text{ は極小値 } f(a) \text{ を取る.} \\ f''(a) < 0 \implies & x = a \text{ で } f(x) \text{ は極大値 } f(a) \text{ を取る.} \end{cases}$$

多変数関数の微分に関する基本事項

微分の概念の一般化

多変数関数に対して「微分」の概念を一般化する.

- 偏微分, 方向微分, 全微分の違いとそれぞれの概念の関係

$\downarrow$

Taylor の定理

一般の関数 $f(x)$ を「多項式もどき」の姿に化かす.

- Taylor の定理
  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ($P_n(x)$: n 次の近似多項式, $R_n(x)$: 剰余項)

$\downarrow$ 一次式の近似を考える

関数の大まかな様子（その１）

$f(x) \fallingdotseq P_1(x)$ と近似して, $x = p_0$ のまわりでの $f(x)$ の様子を理解する.

- 臨界点
  $(df)_{p_0} = 0 \iff x = p_0$ が極値点の候補.

$\downarrow$ さらに, 二次式の近似を考える

関数の大まかな様子（その２）

$(df)_{p_0} = 0$ のとき, さらに, $f(x) \fallingdotseq P_2(x)$ と近似して, $x = p_0$ のまわりでの $f(x)$ の様子を理解する.

- 極値判定

少し進んだ話題

写像の微分

一変数関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の概念を,

$$
\begin{tikzcd}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \arrow[r, "\text{ベクトル値}"] \arrow[d, "\text{多変数化}"] & f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m \arrow[d, "\text{多変数化}"] \\
f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \arrow[r, "\text{ベクトル値}"] & f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

というように一般化し, 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対して, Taylor の定理を一般化する.

- Jacobi 行列
- 合成写像の微分則

$\downarrow$ 一次式の近似を考える

関数の大まかな様子

$f(x)\fallingdotseq P_1(x)$ と近似して, $x=p_0$ のまわりでの写像 $f(x)$ の大まかな様子を理解する.

- 逆関数定理

$f(x)\fallingdotseq P_1(x)$ と近似して, $M_f=\{x\in\mathbb{R}^n|\,f(x)=0\}$ なる集合の $x=p_0\in M_f$ のまわりでの大まかな様子を理解する.

- 陰関数定理

$\downarrow$ 曲がった空間上での微分

条件付き極値問題

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対して, 曲がった空間 $M_g\subset\mathbb{R}^n$ 上での関数 $f:M_g\to\mathbb{R}$ の大まかな様子を理解する.

- 陰関数の微分
- Lagrange の未定乗数法

皆さんにも, 上で挙げた基本事項のつながりや登場するキーワードに注意して学んでいただけると, 微積分学に対する理解が深まるのではないかと思います. 以下, 順番に, これらのキーワードについて少しだけ説明してみることにします.

4 一変数関数の様子をどのように理解するのか

接線の傾きを調べて増減表を書いてみることで, $\mathbb{R}$ 上の一変数関数の様子を調べることができるということは, 皆さんも良くご存じのことと思います. ところが, 多変数関数の場合には増減表を書くということができませんから, 一変数関数の場合と同様な形で多変数関数の様子を理解しようと試みるためには, こうした手法を多変数関数の場合にも拡張できる形で再解釈する必要があります. そのための最も基本的な「アイデア」が**「Taylor 展開」を考える**ということになります. したがって, まずは, **Taylor 展開という考え方を通して一変数関数に対する理解を深める**ということが主な目標となります.

(あ) Taylor 展開という考え方 (第 2 回 : 3 節, 4 節)[4]

例えば, 指数関数 e^x を,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

という形に「化かす」というように, $\mathbb{R}$ **上の滑らかな関数** $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **を,**

($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

というように「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことができないかということ, あるいは, より一般に, **勝手な点** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ **のまわりで,**

($x = a$ のまわりでの) Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

というように「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことができないかということが基本的な問題意識です. ただし, 実際の計算に当たっては, $z = x - a$ と文字を置き直して考えれば良いので, (1) 式のように, $a = 0$ のときが基本的であると考えることもできます.

このとき, 大切なことは, (1) 式や (2) 式という公式を単純記憶に任せて覚えることではなく, 例えば, (3) 式の両辺を何度か微分してから, $x = 0$ としてみるなどして, **もし, 滑らかな関数** $\boldsymbol{f(x)}$ **が,**

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{3}$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすれば, その係数は,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

となることがもっともらしいということをしみじみと納得することです.

多項式関数は比較的理解が容易な関数ですから, **一般の関数** $\boldsymbol{f(x)}$ **も「多項式の姿」に「化かす」ことができれば,** $\boldsymbol{f(x)}$ **の様子も「多項式の姿」を通して理解する**

[4] 皆さんの参考のために, 関連事項の説明が「数学 IB 演習の解説」の中のどの節で行なわれているのかということを一緒に記すことにしました.

ことができるのではないかということが, 微積分学における最も基本的な考え方になっています.

(い) **Taylor の定理** (第 2 回 : 6 節, 8 節, 10 節, 11 節 ; 第 3 回 : 13 節, 15 節)

$\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数 $f(x)$ に対して, 一般には, **(1) 式 (あるいは, (2) 式) の右辺の「無限和」の値がきちんと定まらない**ということや, **(1) 式 (あるいは, (2) 式) の左辺と右辺で値が食い違ってしまう**ということが起こり得ます. こうした事態をきちんと理解するためには, (1) 式 (あるいは, (2) 式) のように, **いきなり「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことを考えるのではなく,**

($x = 0$ のまわりでの) Taylor の定理

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n(x) + R_n(x)} \tag{4}$$

あるいは, より一般に,

($x = a$ のまわりでの) Taylor の定理

$$\boldsymbol{\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}} \tag{5}$$

というように「剰余項付き」で「有限次の多項式の姿」に「化かす」ことを考えることが大切です. 実際, $\mathbb{R}$ **上の滑らかな関数 $f(x)$ に対して, (4) 式, あるいは, (5) 式のような形であれば, いつでも「多項式の姿」に「化かす」ことができる**ということが分かり, この事実を **Taylor の定理**と言います. ここで, 剰余項 $R_n(x)$ に対しては,

剰余項 $R_n(x)$ の表示 (積分形)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{6}$$

というような積分形の表示を用いることもできますし,[5]「展開の中心点」a と「値を考えたい点」x の間に存在する実数 $\theta \in \mathbb{R}$ を上手く選んでやることで,

剰余項 $R_n(x)$ の表示 (Lagrange の剰余)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{7}$$

というように表わすこともできることが分かります.

---

[5](4) 式の場合には, (6) 式において, $a = 0$ とすることで,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

という表示が対応する積分表示ということになります.

(う) いつ Taylor 展開が可能であるかということ (第 2 回 : 9 節 ; 第 3 回 : 3 節, 4 節 ; 第 4 回 : 8 節)

いま, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, (4) 式を順番に書き下してみると,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + R_0(x) \\
f(x) &= f(0) + f'(0)x + R_1(x) \\
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_2(x) \\
&\ \ \vdots \\
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

となりますが, **これらの式は, n が段々大きくなるたびに, 関数 $f(x)$ が段々と「多項式の姿」に「化けて」いく様子を表わしている**と解釈できます. したがって, こうした操作を続けてゆくときに, $R_n(x)$ という「おつりの項」の値がいくらでも小さくなって, 最終的には無視できるということが分かれば, すなわち,

Taylor 展開可能であるための条件

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{8}$$

となることを確かめることができれば, このような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対しては, こうした操作の極限として,

($x = 0$ のまわりでの) Taylor 展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{9}$$

という Taylor 展開の式が正当化できることが分かります.

一般には, **勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, いつでも (8) 式が成り立つとは限りません**し, **与えられた滑らかな関数 $f(x)$ に対して, (8) 式が成り立つような実数 x の範囲を決定するということも甚だ困難です**. しかしながら, 指数関数 e^x や三角関数 $\cos x, \sin x$ などの基本的な関数に対しては, 例えば, (7) 式の表示を用いて, 剰余項 $R_n(x)$ の大きさを評価することで, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

となることを確認することができます. すなわち, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{10}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \cdots \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots \tag{12}$$

という式が成り立つことが分かります. このような考察により, 皆さんが良くご存じの多くの関数に対して, (9) 式のように「次数が無限大の多項式の姿」に「化かす」ことができるということを確かめることができます.

(え) Taylor 展開, あるいは, Taylor の定理の利点 (第 3 回 : 4 節, 11 節 ; 第 4 回 : 2 節)

Taylor 展開, あるいは, Taylor の定理を用いて,「多項式の姿」に「化かし」て考えることにより, 例えば,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

というように, **特別なアイデアなしに, 比較的簡単に極限の計算を行なうことができます**. また, 例えば, $f(x) = e^x$ に対して, Taylor の定理を適用すると, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq |R_n(1)|$$

となることが分かりますから, 後は, **剰余項 $\boldsymbol{R_n(1)}$ の大きさを評価する**ことで,

$$e = 2.71828\cdots$$

となることが分かったりします. このように, **Taylor の定理を用いることで, 関数の値の近似計算をすることもできます**.

さて, 指数関数 e^x や三角関数 $\cos x, \sin x$ のように, 特定の関数が「次数が無限大の多項式の姿」に「化ける」ことが分かると, **(9) 式の右辺の $\boldsymbol{x}$ のところには, 実数でなくとも「掛け算」や「足し算」ができるような「数」であれば何でも代入して考えることができる**という「利点」が現われます. 例えば, (10) 式の両辺に「複素数」$\sqrt{-1}\theta$ を代入して, その結果を, (11) 式, (12) 式などと比べてみることで,

Euler の公式

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

というように, **指数関数と三角関数は本質的に同じ関数である**ということが分かったりします. また, 行の数と列の数が等しい正方行列 X も「足し算」や「掛け算」ができるような「数」ですから, こうした正方行列 X も (10) 式の両辺に代入して考

えてみることができます. **このような「行列の指数関数」e^X を考えることは, 定数係数の線型微分方程式を線型代数学の立場から見直す上でとても役立ちます**し, **「量子力学」の世界では「サイズが無限大の行列に対する指数関数」が活躍する**ことになります.

(お) 近似多項式としての Taylor 展開 (第 3 回 : 7 節, 12 節)

さて, Taylor の定理から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{R}$ と勝手な実数 $x, a \in \mathbb{R}$ に対して,

($x = a$ のまわりでの) Taylor の定理

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \tag{13}$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が x と a の間に存在することが分かります. そこで, $n \in \mathbb{N}$ を勝手にひとつ固定して, $x \to a$ という状況を考えてみます. いま, 関数 $f(x)$ の Taylor 展開から得られる n 次の多項式を,

($x = a$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表わすことにします. すると, (13) 式から,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{14}$$

となることが分かりますから, **$f(x)$ から n 次の多項式 $P_n(x)$ を引き算した「余り」は $(x-a)^{n+1}$ で括れるような式になっている**ことが分かります.

この (14) 式を用いると, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

Taylor 多項式を特徴付ける式

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^k} = 0 \tag{15}$$

となることが分かりますが, 逆に, **$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,**

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^k} = 0}$$

となるような n 次の多項式 $Q_n(x)$ は Taylor 多項式 $P_n(x)$ しか存在しないということが分かります. その意味で, **(15) 式は, 数ある n 次の多項式の中で, 関数 $f(x)$ の ($x = a$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式を特徴付ける式である**ことが分かります. また, この事実を用いると, **数ある n 次の多項式の中で, $P_n(x)$ は**

「 $|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ を最も良く近似する多項式」であることが分かります. すなわち, **「$x = a$ の近くだけを考える」ときに, 数ある n 次の多項式の中で, $P_n(x)$ は「関数 $f(x)$ に最も「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります.

(か) Taylor 展開を求めるには (第 3 回 : 8 節, 9 節)

例えば, $f(x) = e^{x \sin x}$ という例を考えてみると分かるように, 一般に, 与えられた滑らかな関数 $f(x)$ に対して, 直接 $f^{(k)}(0)$ を計算することで, Taylor 多項式

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を求めようとすると, **大抵の場合, すぐに「大変なこと」になってしまいます**. そこで, まずは,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

などの例のように, **直接, $f^{(k)}(0)$ という値を求めることができる場合に, Taylor 展開を具体的に書き下せるようになる**ということが何よりも大切になりますが, さらに進んで, 直接 $f^{(k)}(0)$ を計算することが困難な一般の滑らかな関数 $f(x)$ に対して, Taylor 多項式 $P_n(x)$ を求めることができるようになるためには, 単に, Taylor 展開の公式を納得するだけでなく, **「Taylor 展開が計算できる関数たちの組み合わせ」として表わされる関数の Taylor 展開が, それぞれの関数の Taylor 展開からどのようにして計算することができるのかという「計算規則」を理解する**ことが大切になります.

そこで, いま, $g(x), h(x)$ という二つの関数の Taylor 展開は計算できると仮定して, それぞれの関数の Taylor 展開を,

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \tag{16}$$

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{17}$$

と表わすことにします.[6] このとき, $C \in \mathbb{R}$ として, $g(x) + h(x), Cg(x), g(x)h(x)$ などの関数の Taylor 展開は, (16) 式, (17) 式を用いて, それぞれ,

[6] ここで, $b_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました.

Taylor 展開の計算規則 (その 1)

$$
\begin{aligned}
g(x)+h(x) &= (b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)+(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \\
&= (b_0+c_0)+(b_1+c_1)x+(b_2+c_2)x^2+\cdots \qquad (18) \\
Cg(x) &= C(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots) \\
&= (Cb_0)+(Cb_1)x+(Cb_2)x^2+\cdots \qquad (19) \\
g(x)h(x) &= (b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \\
&= (b_0c_0)+(b_0c_1+b_1c_0)x+(b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0)x^2+\cdots \qquad (20)
\end{aligned}
$$

というように計算できることが分かります. 例えば, (18) 式から, e^x+e^{-x} の Taylor 展開が,

$$
\begin{aligned}
e^x+e^{-x} &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right) \\
&= 2\cdot\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

というように計算できることが分かります. また, (19) 式から, $2\sin x$ の Taylor 展開が,

$$
\begin{aligned}
2\sin x &= 2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right) \\
&= 2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{60}+\cdots
\end{aligned}
$$

というように計算できることが分かります. さらには, (20) 式から, $e^x\sin x$ の Taylor 展開が,

$$
\begin{aligned}
e^x\sin x &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right) \\
&= x+x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots \\
&= x+x^2+\frac{x^3}{3}+\cdots
\end{aligned}
$$

というように計算できることが分かります.

次に, $h(0)\neq 0$ として,

$$
f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}
$$

という関数の Taylor 展開について考えてみることにします. このとき, $f(x)$ は,

$$
f(x)=g(x)\cdot\frac{1}{h(x)}
$$

というように表わすことができますから, (20) 式と合わせると, 結局, $\frac{1}{h(x)}$ という関数の Taylor 展開が計算できればよいということになります. そこで, いま, 関数 $\frac{1}{h(x)}$ の Taylor 展開を,

$$
\frac{1}{h(x)}=d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots \qquad (21)
$$

と表わすことにします.[7] ここで, (21) 式を

$$1 = h(x) \cdot (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots) \tag{22}$$

というように書き直した上で, (17) 式を (22) 式に代入すると,

$1 = h(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$ という式に注目する

$$\begin{aligned}1 &= h(x) \cdot (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots) \\ &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots) \\ &= (c_0 d_0) + (c_0 d_1 + c_1 d_0) x + (c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0) x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

となることが分かりますから, (23) 式の両辺の $x^n, (n \in \mathbb{N})$ の係数を順番に比較することで,

$$\begin{cases} c_0 d_0 = 1 \\ c_0 d_1 + c_1 d_0 = 0 \\ c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0 = 0 \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{24}$$

となることが分かります. いま, $c_0 = h(0) \neq 0$ と仮定していたことに注意すると, (24) 式の連立一次方程式を順番に解くことで, $c_0, c_1, c_2, \cdots$ から, $d_0, d_1, d_2, \cdots$ を求めることができることが分かります. すなわち, 関数 $h(x)$ の Taylor 展開から, 関数 $\frac{1}{h(x)}$ の Taylor 展開を求めることができることが分かります.

最後に, $h(x)$ を $h(0) = 0$ となる関数として, $g(y), h(x)$ という二つの関数の Taylor 展開は計算できると仮定して, それぞれの関数の Taylor 展開を,

$$\begin{cases} g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots \\ h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \end{cases} \tag{25}$$

と表わすことにします.[8] このとき, $g(y)$ と $h(x)$ の合成関数 $f(x) = g(h(x))$ の Taylor 展開は, (25) 式を用いて,

Taylor 展開の計算規則 (その 2)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \\ &= b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots \\ &= b_0 + b_1(c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) + b_2 (c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)^2 + \cdots \\ &= b_0 + b_1 c_1 x + (b_1 c_2 + b_2 c_1^2) x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{26}$$

というように計算できることが分かります. 例えば, $e^{x \sin x}$ という関数を考えると,

[7] ここで, $d_k = \frac{\hat{h}^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました.

[8] ここで, $b_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$, $c_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$ と表わしました. 上で注意したように, 我々は, $h(0) = 0$ と仮定して議論を進めているので, **$\mathbf{c_0 = 0}$ となっている**ということに注意して下さい.

(20) 式から, $x\sin x$ の Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} x\sin x &= x\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right) \\ &= x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \end{aligned}$$

というように計算できることが分かりますから, (26) 式と合わせて, $e^{x\sin x}$ の Taylor 展開が,

$$\begin{aligned} e^{x\sin x} &= 1 + x\sin x + \frac{1}{2!}(x\sin x)^2 + \cdots \\ &= 1 + x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 - \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \cdots\right) + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \cdots\right) + \cdots \\ &= 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

(き) 関数の大まかな様子を調べるには (第 3 回 : 14 節)

さて, (お) の項で述べたように, 滑らかな関数 $f(x)$ の $x = a$ における Taylor 多項式を,

($x = a$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

とすると, **Taylor 多項式 $P_n(x)$ は n 次の多項式の中で,「 $|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります. このことから, **$x = a$ のまわりでの関数 $f(x)$ の大まかな様子を理解するためには, 近似多項式 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\cdots$ などの様子を調べれば良いのではないか**という戦略が立ちます. すなわち, $x = a$ の近くで, 関数 $f(x)$ は,

$$f(x) \fallingdotseq P_n(x)$$

というように, 近似的に「多項式の姿」$P_n(x)$ に「化ける」ことが分かりますから, 後は, **近似的に「化けた」多項式 $P_n(x)$ の様子を眺めることで, $x = a$ の近くでの関数 $f(x)$ の大まかな様子も理解できるのではないか**と考えられるというわけです.

そこで, まず, $n = 1$ として,

$$f(x) \fallingdotseq P_1(x) \tag{27}$$

というように近似して考えてみます. このとき, (27) 式を具体的に書き表わすと,

($\boldsymbol{x = a}$ のまわりで) $\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq P_1(x)}$ と近似して考える

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) \tag{28}$$

となりますが, これは**関数 $\boldsymbol{f(x)}$ のグラフにおいて, $\boldsymbol{x = a}$ における接線を考えている**ことに他なりません. ここで, 例えば, $f'(a) > 0$ であったと仮定してみます. このとき, $y = P_1(x)$ という直線の傾きは正であるということになりますから, 特に, $P_1(x)$ という一次関数は単調増加関数であることが分かります. すると,「$|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ は $P_1(x)$ という単調増加な一次関数のように見える」のですから, **関数 $\boldsymbol{f(x)}$ の方も $\boldsymbol{x = a}$ において単調増加になっているのではないか**と「当たり」がつきます. さらに, **Taylor の定理を用いて,「$\fallingdotseq$」を「$=$」に置き換えて議論する**ことで, 実際に, この予想が正しいということをきちんと確かめることができます. すなわち,

関数 $\boldsymbol{f(x)}$ の (局所的な) 単調性

$$\begin{cases} f'(a) > 0 \implies & x = a \text{ のまわりで } f(x) \text{ は単調増加.} \\ f'(a) < 0 \implies & x = a \text{ のまわりで } f(x) \text{ は単調減少.} \end{cases}$$

となることが分かります.

さて, 接線の傾きが 0 となるような点, すなわち,

臨界点の条件

$$f'(a) = 0$$

となる点は, 関数 $f(x)$ の様子が変わる特別な点であると考えられますが, このような点を関数 $f(x)$ の**臨界点** (critical point) と呼びます. **「臨界点」のまわりでは,**

$$P_1(x) = f(a)\,(= P_0(x)\,)$$

というように, $P_1(x)$ が定数関数になってしまっているので, 例えば, x が a からズレたときに関数 $f(x)$ の値が $f(a)$ という値より増えるのか減るのかといった問題は,

$$f(x) \fallingdotseq P_1(x)$$

という近似を用いたのでは分からないことになります. そこで, この場合, **$\boldsymbol{f(x)}$ の様子をより詳しく調べるためには, $\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq P_2(x)}$ というように, さらに $\boldsymbol{P_2(x)}$ まで「近似を上げて」考える必要があります.** すると, 臨界点 $x = a$ のまわりで, 関数 $f(x)$ は,

臨界点 $\boldsymbol{x = a}$ のまわりで, $\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq P_2(x)}$ と近似して考える

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \tag{29}$$

という二次関数のように見えることが分かります. ここで, (29) 式の右辺に現われる

二次関数のグラフは, $f''(a) > 0$ であるか, $f''(a) < 0$ であるかに応じて, 下に凸, あるいは, 上に凸の放物線になりますから, $P_2(x)$ という二次関数は, $x = a$ において, $f(a)$ という最小値, あるいは, 最大値を持つことが分かります. すると,「$|x-a| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ はこのような二次関数のように見える」のですから, **関数 $f(x)$ も $f''(a) > 0$ であるか, $f''(a) < 0$ であるかに応じて, $x = a$ において $f(a)$ という極小値, あるいは, 極大値を持つのではないか**と「当たり」がつきます. さらに, **Taylor の定理を用いて,「$\fallingdotseq$」を「$=$」に置き換えて議論する**ことで, 実際に, この予想が正しいということをきちんと確かめることができます. すなわち,

極値判定法

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \implies & x = a \text{ で } f(x) \text{ は極小値 } f(a) \text{ を取る.} \\ f''(a) < 0 \implies & x = a \text{ で } f(x) \text{ は極大値 } f(a) \text{ を取る.} \end{cases}$$

となることが分かります. これは, 皆さんが良くご存じの**「極値判定法」**を Taylor 展開の立場から見直したものに他なりません.

このように,**「増減表を書いて関数の大まかな様子を理解する」ということを, Taylor 展開の立場から再解釈できる**ことが分かります.

5 「無限和」をどのように理解するのか

(あ) 「無限和」の値がいつきちんと定まるのか (第 1 回 : 7 節)

微積分学では, 例えば, Taylor 展開を通してというように, しばしば,「無限和」が現われます.「有限和」のときには, その値がきちんと定まっているということは明らかなことですが, 例えば,

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = +\infty \\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2 \\ \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2 \end{cases}$$

という例が示すように,「無限和」の場合には, その値がきちんと定まっているのかどうかということは,「無限和」の式をパッと見ただけではなかなか分かりません. そこで, **考えている「無限和」が, 値がきちんと定まる「意味のある無限和」なのか, あるいは, 式は書いてみたものの値がきちんと定まらない「意味のない無限和」なのかということをしっかりと理解する**必要があります.

数学では, 一般に,

級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$$

という形の「無限和」を**級数**と呼びます. このとき, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

部分和

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_N$$

という「部分和」を考えて, **$\{S_N\}_{N=1,2,\ldots}$ という「部分和」からなる数列の極限 $\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在するときにのみ, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は意味を持ち, その値は,**

級数の値の定義

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N} \tag{30}$$

であると考えます. また, (30) 式の極限が存在するとき, すなわち, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が「意味のある無限和」のとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**と呼び, (30) 式の極限が存在しないとき, すなわち, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が「意味のない無限和」のとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**と呼びます. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するときには,

級数が収束するための必要条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

とならなければいけないことが分かります.[9]

(い) 「絶対収束」と「条件収束」という違い (第 4 回 : 11 節, 12 節)

前項のように, 級数の値は「部分和」からなる数列の極限 $\lim_{N\to\infty} S_N$ として定義されますが, このことは, **「無限和」の「和を取る順番」は $\{S_N\}_{N=1,2,\ldots}$ という数列により指定されてしまっている**ということを意味しています. そこで,「和を取る順番を取り換えたらどうなるのか」ということが気になりますが, 例えば,

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2 \\ \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2 \end{cases}$$

という例が示すように,**「無限和」では和を取る順番を取り換えると「総和」の値が変わるという「変なこと」が起こり得ます.** そこで, どのような場合にこうした「微妙なこと」が起こり得て, どのような場合には「有限和」のように安直に扱って良いのかということを理解する必要がありますが, それが,**「絶対収束」**と**「条件収束」**という**「無限和」の値の定まり方の違い**として理解できます.

いま, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ という「総和」のうち,「正の項だけの寄与」と「負の項だけの寄与 (の絶対値)」を, それぞれ,

[9] 例えば, $a_n = \frac{1}{n}$ という場合が示すように, 一般には, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限りません.

「正の項だけの寄与」と「負の項だけの寄与 (の絶対値)」

$$S^+ = \sum_{a_n > 0} a_n, \quad S^- = \sum_{a_n < 0} |a_n|$$

と表わすことにすると,「総和」は,

「総和」を「正の項だけの寄与」と「負の項だけの寄与」に分ける

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^+ - S^-$$

というように表わすことができます.[10] ここで,「正の項だけの寄与」S^+ を考えると, $\boldsymbol{S^+}$ **の部分和** $\boldsymbol{S_N^+}$ **は,**

$$\boldsymbol{S_1^+ \leq S_2^+ \leq \cdots \leq S_N^+ \leq S_{N+1}^+ \leq \cdots}$$

というように, だんだん大きくなってゆくだけですから, 起こり得る可能性は二通りしか存在しなくて,

(イ) $\boldsymbol{S_N^+}$ **は「頭打ち」になる.**

(ロ) $\boldsymbol{S_N^+}$ **はいくらでも大きくなる.**

ということになります. したがって, $S^+ = \lim_{N\to\infty} S_N^+$ の可能性は,

(イ) $\boldsymbol{S^+ = \lim_{N\to\infty} S_N^+}$ **は有限の値に収束する.**

(ロ) $\boldsymbol{S^+}$ **は** $\boldsymbol{+\infty}$ **に発散する.**

という二通りの可能性のみ起こりうるということになります. 全く同様に, $S^- = \lim_{N\to\infty} S_N^-$ の可能性も,

(イ) $\boldsymbol{S^- = \lim_{N\to\infty} S_N^-}$ **は有限の値に収束する.**

(ロ) $\boldsymbol{S^-}$ **は** $\boldsymbol{+\infty}$ **に発散する.**

という二通りの可能性のみ起こりうるということになります. 以上から,「総和」S の可能性としては, 次の四つのパターンが考えられるということになります.

	S^- が有限	$S^- = +\infty$
S^+ が有限	$S = S^+ - S^-$	$S = S^+ - \infty$
$S^+ = +\infty$	$S = \infty - S^-$	$S = \infty - \infty$

このうち, $\boldsymbol{S = \lim_{N\to\infty} S_N}$ **という極限が存在しうるのは, 最初と四番目のパターンである**

[10] すなわち,「全財産」S は「全儲け」S^+ と「全借金」S^- を用いて, $S = S^+ - S^-$ と表わせるというわけです.

(イ) $S^+ = \lim_{N\to\infty} S_N^+$, $S^- = \lim_{N\to\infty} S_N^-$ という極限が両方とも存在する.

(ロ) $\lim_{N\to\infty} S_N^+$, $\lim_{N\to\infty} S_N^-$ が両方とも $+\infty$ に発散する.

という二つの場合だけであることが分かりますが, (イ) のパターンで「総和」S の値がきちんと定まるときに, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**すると呼び, (ロ) のパターンで「総和」S の値がきちんと定まるときに, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**条件収束**すると呼びます.

いま, (イ) の条件は,

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する条件

$$S^+, S^- < +\infty \tag{31}$$

ということですが,

$$S^+, S^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S^+ + S^-$$

となることに注意すると, (31) 式の条件は,

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する条件の言い換え

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \tag{32}$$

というように言い換えることができることが分かります.[11] また, 級数が絶対収束している場合には, **「総和」$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は a_n という項を「足す順番」によらない**ことが分かります. その意味で, 級数が絶対収束している場合には,「有限和」のように安直に扱っても, あまり「困ったこと」にはならないことが分かります.

一方, (ロ) の場合には, 形式的には意味をなさない

$$\begin{aligned} S &= S^+ - S^- \\ &= \infty - \infty \end{aligned}$$

という式が**「上手いこと」有限の値になっている**という**「微妙な場合」**であることが分かります. すなわち, この場合には, S_N^+ と S_N^- というそれぞれの部分和の大きさが, **どちらかがもう一方を圧倒してしまう**ということのないように,**「上手いこと」a_n の順番が選ばれている結果として, 部分和 S_N の極限が存在している**のだと理解することができます. したがって, この場合には**「足す順番」が本質的である**ことが分かります. 実際, **級数が条件収束している場合には,「足す順番」を変えることにより, どのような実数にでも収束させることができる**ということが分かります. すなわち, この場合には,「足す順番」を変えることで,「総和」を我々の好きな値に「でっち上げる」ことができるわけです. その意味で, 級数が条件収束している場合

[11] $S^+, S^- < +\infty$ という二つの条件を考えるより, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ というひとつの条件を考える方が, 議論が簡明になることも多いので, 微積分学の教科書では, 絶対収束の定義として, (31) 式ではなく, (32) 式の方を採用していることが多いです.

には,「有限和」のように安直に扱ってしまうと,「奇妙なこと」が起こりうるので, 少し注意して考える必要が出てきます.

(う) 級数の収束判定法 (第 5 回 : 10 節)

与えられた級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が「絶対収束という形できちんと値が定まる」ための判定条件が知られています. すなわち,

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \tag{33}$$

となることを保証する, 比較的チェックが容易で, かつ, 適用範囲も広い十分条件が知られています. このときの「アイデア」は**等比級数と比較する**ということです. すなわち, **$n \gg 1$ のとき,**

$$|a_n| \ \fallingdotseq \ M^n \tag{34}$$

となるような, 数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\cdots}$ の「仮想的な公比」M に注目するということです.

いま, **一般項 $|a_n|$ の大きさが,**

$$|a_n| \ \fallingdotseq \ M^n$$

というように, M^n とほぼ等しいと仮定してみます. このとき, **それらの和である $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の大きさも,**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \ \fallingdotseq \ \sum_{n=1}^{\infty} M^n$$

というように, $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ の大きさとほぼ等しいはずです. したがって,**「$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するか, または, 発散するか」ということは「$\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ が収束するか, または, 発散するか」ということと「ほぼ等しい」はず**です. ここで, **$\sum_{n=1}^{\infty} M^n$ という等比級数は $0 \leq M < 1$ のとき収束し, $M \geq 1$ のとき発散する**ことが分かりますから, **このような「仮想的な公比」M が見つかれば, 後は, M が 1 より大きいか小さいかを見ることにより, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ という級数が収束するか発散するかが分かるだろう**というわけです.

このような**「仮想的な公比」の候補**として, 例えば,

数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\cdots}$ の「仮想的な公比」M

$$M = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, \quad M = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{35}$$

というような数を考えてみることができますが, (35) 式のように, 数列 $\{|a_n|\}_{n=1,2,\cdots}$ の「仮想的な公比」M を定めてみると, 実際に,

級数の収束判定法

(イ) $\boldsymbol{M < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty}$ **となる．すなわち，級数** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ **は絶対収束する．**

(ロ) $\boldsymbol{M > 1 \implies}$ **級数** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ **は発散する．**

となることが分かります．

(え) ベキ級数の収束半径 (第 4 回：8 節；第 5 回：12 節；第 7 回：2 節)

Taylor 展開に現われる「無限和」のように，一般項の形が $c_n x^n$ という x のベキの形をした級数

ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

を**ベキ級数**と呼びます．このとき，$x \in \mathbb{R}$ **を，**$\boldsymbol{x = 1}$ **や** $\boldsymbol{x = 2}$ **など，勝手にひとつ値の定まった実数であると考えて，**$\boldsymbol{a_n = c_n x^n}$ **として，前項で述べた「級数の収束判定」を適用してみる**と，($+\infty$ も含めた) ある実数 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ が存在して，**数列** $\boldsymbol{\{|c_n x^n|\}_{n=1,2,\cdots}}$ **の「仮想的な公比」**$\boldsymbol{M}$ **に対する条件を，**

「仮想的な公比」$\boldsymbol{M}$ に対する条件の書き換え

$$\begin{cases} \boldsymbol{M < 1 \iff |x| < r} \\ \boldsymbol{M > 1 \iff |x| > r} \end{cases}$$

というように書き換えることができることが分かります．したがって，「級数の収束判定法」から，

ベキ級数の収束・発散

(イ) $\boldsymbol{|x| < r \implies}$ **ベキ級数** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}$ **は絶対収束する．**

(ロ) $\boldsymbol{|x| > r \implies}$ **ベキ級数** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}$ **は発散する．**

となることが分かります．このようにして定まる実数 r を，ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ の**収束半径**と呼びます．これより，**関数のベキ級数による表示は収束半径内においてのみ意味を持つ**ことが分かります．

(お) ベキ級数の項別微分，項別積分可能性* (第 5 回：13 節)

さて，一般に，$f(x), g(x)$ を微分可能な関数とするときに，$f(x) + g(x)$ という関数

の微分や積分が,

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \tag{36}$$
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{37}$$

というように計算できることは, 皆さん, 良くご存じのことと思います. また, (36) 式, あるいは, (37) 式を繰り返して用いることで, より一般に, $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_N(x)$ を微分可能な関数とするときに, $\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_N(x)$ という関数の微分や積分が,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{N} f_n'(x) \tag{38}$$
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{N} \int_a^b f_n(x)dx \tag{39}$$

というように計算できることが分かります. ところが, **一般には, (38) 式, あるいは, (39) 式において, $N \to \infty$ として,**

項別微分と項別積分

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \tag{40}$$
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \tag{41}$$

といようような計算ができるとは限らないということが知られています. その意味で, このような計算ができるときに, すなわち, (40) 式, あるいは, (41) 式が成り立つときに, 関数を項とする級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は, それぞれ, **項別微分可能である**とか, **項別積分可能である**とか言います.

上で注意したように, 一般には, (40) 式, あるいは, (41) 式が成り立つとは限らないのですが, **$f_n(x) = c_n x^n$ のとき, すなわち, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ というベキ級数のときには, 実際に, (40) 式, あるいは, (41) 式が成り立つ**ことを確かめることができます. したがって, ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対しては,

ベキ級数に対する項別微分と項別積分

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \tag{42}$$
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n dx \tag{43}$$

というような計算ができることが分かります. このことを用いると, 例えば, $\frac{1}{1+x}$ と

いう関数の Taylor 展開が,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{44}$$

となることに注目して, (44) 式の両辺を 0 から x まで積分することで,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

というように, $\log(1+x)$ の Taylor 展開を求めることができます. 全く同様に, $\frac{1}{1+x^2}$ という関数の Taylor 展開が,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \tag{45}$$

となることに注目して, (45) 式の両辺を 0 から x まで積分することで,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

というように, $\tan x$ の逆関数 $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開を求めることができます.

(か) 交代級数 (第 8 回 : 11 節)

さて, (う) の項では,「級数の収束判定法」ということに触れましたが, この方法は級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することを結論するようなものでした. したがって, この方法では, **条件収束しているような級数に対しては何も言えない**という欠点があります. (い) の項で述べたように, 条件収束は, 見かけ上,「(無限大)$-$(無限大)」が有限になっているような「微妙な場合」なので, **条件収束するような級数の収束を判定するような一般的な判定方法は知られておらず, 個々に対処しないといけない**ということになります.

ところが, 比較的よく目にするような形の級数で, **絶対収束, 条件収束に関わらず「収束していることが立ち所に分かる」というタイプの級数**が存在します. いま,

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

となるような数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が, 勝手にひとつ与えられているとして,

交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

という形の級数を**交代級数**と呼びます. 例えば, $a_n = \frac{1}{n}$ として,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

という級数は, 交代級数の典型的な例です. このとき, 交代級数の部分和 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ が, 数直線 $\mathbb{R}$ 上でどのような位置関係に並ぶのかということを考察することにより, **交代級数は, いつでも収束する**ことが分かります. また, 級数の値を,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \left(= \lim_{N \to \infty} S_N \right)$$

とすると, **「総和」S と部分和 S_N との間の誤差が,**

「総和」S と部分和 S_N との間の誤差評価

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}$$

というように簡単な形で評価できることも分かります.

6 多変数関数の様子をどのように理解するのか.

基本的には, 一変数関数の様子を調べるのと同様にして, 多変数関数の様子を調べることができます. 例えば, 一変数関数の場合に「接線を描いて関数の大まかな様子を調べる」ということは, 二変数関数の場合には「接平面を描いて関数の大まかな様子を調べる」ということになります. 三変数以上の関数の場合には, 実際にグラフを描くことはできませんが, **一変数関数の場合に「接線を描いて関数の大まかな様子を調べる」ということは「Taylor 展開における一次式による近似 $P_1(x)$ の様子を調べる」ということに対応してういる**ということに注意すると, このような場合にも, **Taylor 展開の一次式による近似を調べる**という形で多変数関数の大まか様子を理解することができます. 一般の多変数関数の場合でも, 本質は全く変わりませんから, 皆さんにとっては, まずは, 実際にグラフを描くことで, 直感的な理解を試みることも可能な二変数関数の場合に, **関数の大まかな様子を調べるとはどのようなことなのか**ということを, 直感的にも, 式の上でも,[12] しっかりと理解することが大切ではないかと思います.

(あ) 偏微分, 方向微分, (全) 微分とは (第 5 回 : 2 節, 3 節)

$\mathbb{R}^2$ 上の二変数関数 $f(x, y)$ に対して, 例えば, y をパラメータであると考えて, x についてだけ微分してみることができます. このように, ある変数以外をその変数に関係のない定数であるとみなして微分することを**偏微分する**と言います. 例えば, $f(x, y)$ という二変数関数に対しては, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ という二通りの偏微分を考えることができます.

より正確には, 次のように定義されます. いま, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ として,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

[12]すなわち,「論理的にも」ということです. このように「式の上でもきちんと理解する」ということが, 三変数以上の関数の場合のように, 必ずしも正確な「絵」が描けなくなる場合にも,「確かにこれで良い」と納得できるようになるために, とても強力な「武器」になります.

という極限が存在するときに, 関数 $f(x,y)$ は**点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において, x 方向に偏微分可能である**と呼びます. また, その極限値を,

点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における x 方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

と表わし, **点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における x 方向の偏微分係数**と呼びます. すなわち, **x 方向の偏微分係数**とは**「x 方向に動いたときの関数 $f(x,y)$ の値の変化率」**ということです. さらに, 関数 $f(x,y)$ が, $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ において, x 方向に偏微分可能であるとき, それぞれの点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して, その点における x 方向の偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数を考えることができますが, この関数を,

x 方向の偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

と表わし, 関数 $f(x,y)$ の **x 方向の偏導関数**と呼びます. 全く同様にして, **点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における y 方向の偏微分係数** $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ や **y 方向の偏導関数** $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定義することができます.

さて, 偏微分は, **具体的な計算を進める上ではとても便利な概念**なのですが,「x 方向に動いたときの関数 $f(x,y)$ の値の変化率」, あるいは,「y 方向に動いたときの関数 $f(x,y)$ の値の変化率」というように, 特定の方向に動いたときの変化率しか考えていないために,**「関数 $f(x,y)$ の値の変化率」という視点から眺めた場合に, 概念としてはあまり自然ではない**と思われます.[13] そこで, より一般に, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ として,[14]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

という極限が存在するときに, 関数 $f(x,y)$ は**点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において, $\mathbf{v} = (a,b)$ 方向に方向微分可能である**と呼びます. また, その極限値を,

点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における $\mathbf{v} = (a,b)$ 方向の方向微分係数

$$(df)_{p_0}(\mathbf{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{46}$$

[13] すなわち, この世の中には,「x 軸の方向」とか「y 軸の方向」とか, 特定の方向が存在しているわけではなく, すべての方向が平等に見えるわけですが,「偏微分」という概念は, 特定の方向だけを特別視して扱っているというわけです.

[14] より正確には, 点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を始点とするような $\mathbb{R}^2$ 内のベクトル全体の集合を,

$$T_{p_0}\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ は点 } p_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ を始点とするベクトル }\}$$

として, $\mathbf{v} = (a,b) \in T_{p_0}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ ということです. また, $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ のことを, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ における $\mathbb{R}^2$ の**接空間** (tangent space) と呼んだりします.

と表わし, **点 $\boldsymbol{p_0 = (x_0, y_0)} \in \mathbb{R}^2$ における $\mathbf{v} = (\boldsymbol{a, b})$ 方向の方向微分係数**と呼びます. すなわち, $\mathbf{v} = (\boldsymbol{a, b})$ **方向の方向微分係数**とは**「$\mathbf{v} = (\boldsymbol{a, b})$ 方向に動いたときの関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ の値の変化率」**ということです. また, 点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において, 勝手な方向 $\mathbf{v} = (a, b)$ に対して, $\mathbf{v}$ 方向に方向微分可能であるとき, 関数 $f(x, y)$ は**点 $\boldsymbol{p_0 = (x_0, y_0)} \in \mathbb{R}^2$ において方向微分可能である**と呼びます. このとき, 勝手な方向 $\mathbf{v} = (a, b)$ に対して, $\mathbf{v}$ 方向の方向微分係数 $(df)_{p_0}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数を考えることができますが, この関数を,

点 $\boldsymbol{p_0 = (x_0, y_0)} \in \mathbb{R}^2$ における微分 (係数)

$$(df)_{p_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

と表わし, 関数 $f(x, y)$ の **点 $\boldsymbol{p_0 = (x_0, y_0)} \in \mathbb{R}^2$ における微分 (係数)** と呼びます.[15]

さて, 関数 $f(x, y)$ が点 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において方向微分可能であるとは, 幾何学的には, **点 $\boldsymbol{p_0} \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ のグラフ上で, すべての方向に接線が描ける**ということですが, 例えば,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という (やや人工的な) 関数の例が示すように, このことは, 必ずしも, **点 $\boldsymbol{p_0} \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ のグラフ上で接平面が描ける**ということを意味しません. そこで, こうした場合と区別するために, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $f(x, y)$ のグラフ上で接平面が描けるときに, 関数 $f(x, y)$ は**点 $\boldsymbol{p_0} \in \mathbb{R}^2$ において, (全) 微分可能である**と呼びます.[16]

上で述べたように, 関数 $f(x, y)$ の大まかな様子を調べるためには,「$f(x, y)$ のグラフに接平面を描いて調べる」ということが基本になりますから, 微積分学が考察の対象とする関数は,「単に, 偏微分可能な関数」ではなく,「(全) 微分可能な関数」ということになります. ただし, 実際に, このような「偏微分可能性」,「方向微分可能性」,「(全) 微分可能性」の差が現われるのは, **偏微分した関数が連続関数にならない**ような場合であり, 皆さんが普段扱うような**「滑らかな関数」の場合には, このような微妙なことは起こり得ません**. したがって, 一旦, それぞれの概念の差をきちんと納得できたとすれば, 後は, **それほどこれらの概念の差に神経質になる必要はない**と思います.

(い) 連続微分可能な関数とは (第 5 回 : 4 節)

前節で見たように, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $f(x, y)$ が偏微分可能であるとき, それぞれの点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し

[15] 前と同様, より正確には, $(df)_{p_0}$ は, $(df)_{p_0} : T_{p_0}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ という接空間 $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ 上の関数であると考えることができます.

[16]「(全) 微分可能性」のより正確な定義については, (か) の項で述べようと思います.

て, その点における偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}$, あるいは, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数として, 関数 $f(x,y)$ の (一階の) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, あるいは, $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定義されます. 全く同様に, 関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ や $\frac{\partial f}{\partial y}$ の導関数として, 関数 $f(x,y)$ の二階の偏導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

が定義されます. 以下同様に, 帰納的に関数 $f(x,y)$ の高階の導関数が定義されます.

前節でも少し触れましたが, 一変数関数のときと違って, 二変数以上の多変数関数のときには, 関数の値の変化率を考える場合でも, どの方向の変化率を考えるのかという方向を色々と取り換えて考えることができます. そのことの反映として, **単に, 偏微分可能性だけを仮定する**だけでは, 方向微分できない方向が現われたり, たとえ, すべての方向に方向微分できたとしても接平面が描けるとは限らないなど, 直感に反するような「奇妙なこと」が色々と起こりえます. そこで, このような「奇妙なこと」を排除して, 多変数関数の様子をある程度統一的に理解するためには, **単に, 偏微分可能性を仮定する**だけでなく, **偏微分した結果得られる導関数の連続性まで仮定する**と都合が良いということが知られています.

こうした事実を念頭において, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して, **関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ の一階偏導関数 $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}}$ が存在して, それぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数となる**ときに, 関数 $f(x,y)$ を**一階連続微分可能な関数**とか, 略して, **$\boldsymbol{C^1}$ 級の関数**とか呼びます.[17] 同様にして, 一般に, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, **関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ の $\boldsymbol{n}$ 階までの偏導関数 $\boldsymbol{f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \cdots, \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}}$ などが, すべて存在して, それぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数になる**ときに, 関数 $f(x,y)$ を **$\boldsymbol{n}$ 階連続微分可能な関数**とか, 略して, **$\boldsymbol{C^n}$ 級の関数**とか呼びます. また, **何度でも偏微分でき, すべての偏導関数が $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数となる**ときに, 関数 $f(x,y)$ を**滑らかな関数**とか, 略して, **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級の関数**とか呼びます.

(う) 連続微分可能な関数を考える利点 (第 5 回 : 5 節, 6 節, 7 節)

導関数の連続性までを仮定する方が都合が良いということを示す例としては, 例えば, 関数 $f(x,y)$ が C^1 級の関数であるとすると, 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の各点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ において (全) 微分可能である, すなわち, $\mathbb{R}^2$ 上の各点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $f(x,y)$ のグラフには接平面が描けるということがあります. 実際, C^1 級の関数 $f(x,y)$ に対して, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ として, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ における $\mathbf{v}$ 方向の方向微分係数は,

$\boldsymbol{C^1}$ 級の関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ に対する方向微分係数

$$(df)_{p_0}(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot b \tag{47}$$

[17]「連続」のことを, 英語で「continuous」と言います.

というように, 偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ を用いて表わせることが分かります.[18] いま, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ を,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というように縦ベクトルで表わすことにして, (47) 式の右辺を, 行列の掛け算を用いて,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

というように表わしてみると, (47) 式は,

$$(df)_{p_0}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

と表わすことができますから,

C^1 級の関数 $f(x, y)$ に対する (全) 微分 (係数)

$$(df)_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} \tag{48}$$

というように対応していることが分かります. すなわち, **一変数関数 $f(x)$ に対する微分係数 $f'(x_0)$ という概念の二変数関数 $f(x, y)$ の場合への拡張は, 個々の偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ ではなく, それらを並べた 1 行 2 列の行列**

$$\boldsymbol{(df)_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix}}$$

であると考える方がより自然であることが分かります.[19]

また, (46) 式という方向微分係数の定義に戻って, (47) 式の結果を,「$|h| \ll 1$ のとき,

$$\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b \tag{49}$$

となる」というように書き直してみます. さらに, (49) 式の両辺に h を掛けて,

$$(ha, hb) = (\Delta x, \Delta y)$$

と書き直すことにすると, 結局,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \tag{50}$$

となることが分かります. この (50) 式は,「$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から $\mathbf{u} = (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ だけ離れると, 関数 $f(x, y)$ の値は, 第一近似で,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

[18] ここで, スペースの節約のために, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ を, それぞれ, $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ と表わしました. 以下の議論でも, 必要に応じて, 同様の記法を用いようと思います.

[19] その意味で, **一変数関数 $f(x)$ に対する微分係数 $f'(x_0)$ も, 単なる「数」ではなく, 実は,「1 行 1 列の行列」であると考える方がより自然であった**ということが分ります.

だけ増える」ということを意味していますが, このことは, また, 点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において, $\mathbf{v}$ 方向の接線は, すべて,

点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \in \mathbb{R}^2$ における接平面

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{51}$$

という平面上に乗っているということを意味しています. この平面が, 点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における関数 $f(x, y)$ のグラフの接平面ということになります.

導関数の連続性までを仮定する方が都合が良いということを示すもうひとつ別な例としては, **関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ が $\boldsymbol{C^2}$ 級の関数であるとすると,**

$\boldsymbol{C^2}$ 級の関数に対する偏微分の順序交換

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{52}$$

というように, 関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ の二階導関数の値は偏微分をする順番に依らないということがあります. この (52) 式を繰り返し用いることで, より一般に, **$\boldsymbol{C^n}$ 級の関数に対しては, $\boldsymbol{n}$ 階までの偏導関数は微分をする変数の順番に依らない**ということを確かめることができます.

以下では, **考察の対象とする関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ は滑らから関数である**として, 特に断わらない限り, 関数 $f(x, y)$ の高階の導関数は,

$$\frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}$$

というように, 常に, ∂x を ∂y の左側に書いて表わすことにします.

(え) Taylor の定理 (第 6 回 : 5 節)

一変数関数のときと同様に, $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかな関数 $f(x, y)$ に対して, 関数 $f(x, y)$ を「おつりの項」付きで「有限次の多項式の姿」に「化かす」ことができることが分かります. すなわち, $\mathbb{R}^2$ の原点を $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ と表わすことにして, **勝手な点 $\boldsymbol{p = (x, y)} \in \mathbb{R}^2$ に対して,**

(原点 $o=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ のまわりでの) Taylor の定理

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& \sum_{\substack{0\le k,m\\ 0\le k+m\le n}} \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}(0,0)\, x^k y^m + R_n(x,y)\\
=& f(0,0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y\\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\, x^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\, xy + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\, y^2\\
&+ \cdots + R_n(x,y)\\
R_n(x,y) =& \sum_{\substack{0\le k,m\\ k+m=n+1}} \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^k \partial y^m}(q)\, x^k y^m
\end{aligned}
$$

となるような点 $q\in\mathbb{R}^2$ が原点 o と点 p を結ぶ線分上に存在することが分かります. あるいは, より一般に, **勝手な点 $p=(x,y), p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して,**

(点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ のまわりでの) Taylor の定理

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& \sum_{\substack{0\le k,m\\ 0\le k+m\le n}} \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}(a,b)\, (x-a)^k (y-b)^m + R_n(x,y)\\
=& f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, (x-a) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, (y-b)\\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\, (x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\, (x-a)(y-b)\\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\, (y-b)^2 + \cdots + R_n(x,y)\\
R_n(x,y) =& \sum_{\substack{0\le k,m\\ k+m=n+1}} \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^k \partial y^m}(q)\, (x-a)^k (y-b)^m
\end{aligned}
$$

となるような点 $q\in\mathbb{R}^2$ が点 p_0 と点 p を結ぶ線分上に存在することが分かります. 一変数関数のときと同様に, これらの事実を **Taylor の定理**と呼びます.

(お) 近似多項式としての Taylor 展開 (第 6 回 : 6 節)

一変数関数のときと同様に, 関数 $f(x,y)$ の Taylor 展開から得られる n 次の多項式を,

(点 $p_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式

$$
\begin{aligned}
P_n(x,y) = &\sum_{\substack{0\le k,m \\ 0\le k+m\le n}} \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}(a,b)\,(x-a)^k(y-b)^m \\
=&f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\,(x-a)(y-b) \\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,(y-b)^2 + \cdots \\
&+ \tfrac{1}{n!}\tfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)\,(x-a)^n + \cdots + \tfrac{1}{n!}\tfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)\,(y-b)^n
\end{aligned}
$$

を **(点 $p_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式**と呼びます. また, Taylor の定理を用いると, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

Taylor 多項式を特徴付ける式

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(x,y) - P_n(x,y)|}{||p - p_0||^k} = 0 \tag{53}$$

となることが分かります. ただし, ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ における点 $p = (x,y)$ と点 $p_0 = (a,b)$ の間の距離を,

$$||p - p_0|| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

と表わしました. 逆に, **$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,**

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(x,y) - Q_n(x,y)|}{||p - p_0||^k} = 0$$

となるような n 次の多項式 $Q_n(x,y)$ は Taylor 多項式 $P_n(x,y)$ しか存在しないということが分かります. その意味で, **(53) 式は, 数ある n 次の多項式の中で, 関数 $f(x,y)$ の (点 $p_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式を特徴付ける式である**ことが分かります. また, この事実を用いると, **数ある n 次の多項式の中で, $P_n(x,y)$ は「 $||p - p_0|| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x)$ を最も良く近似する多項式」である**ことが分かります. すなわち, **「点 $p_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ の近くだけを考える」ときに, 数ある n 次の多項式の中で, $P_n(x,y)$ は「関数 $f(x,y)$ に最も「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります.

(か) (全) 微分可能性について* (第 6 回 : 7 節)

さて, (あ) の項では,「関数 $f(x,y)$ に対して, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $f(x,y)$ のグラフ上で接平面が描けるときに, 関数 $f(x,y)$ は**点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ において, (全) 微分可能である**と呼ぶ」というように, 関数の (全) 微分可能性について, 少し直感的な定義をしました. ところが, この定義では, **そもそも, 接平面とは何なのか**ということが余りハッキリしません. そこで, 微積分学の教科書では, これまでの議論を逆転させて, 次のように, (全) 微分可能性を定義するのが普通です.

いま, $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ として, 関数 $f(x, y)$ の点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの 1 次の Taylor 多項式

点 $\boldsymbol{p_0 = (a, b)} \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの 1 次の Taylor 多項式

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b) \tag{54}$$

を考えてみます. ここで, (54) 式と, (う) の項で述べた関数 $f(x, y)$ の点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における接平面の式

点 $\boldsymbol{p_0 = (a, b)} \in \mathbb{R}^2$ における接平面

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{55}$$

を見比べてみると, (55) 式は, $z = P_1(x, y)$ という一次の Taylor 多項式 $P_1(x, y)$ のグラフを与える式になっていることが分かります. すなわち, **点 $\boldsymbol{p_0 = (x_0, y_0)} \in \mathbb{R}^2$ における接平面とは, 一次の Taylor 多項式 $\boldsymbol{P_1(x, y)}$ のグラフに他ならない**ことが分かります.

一方, (お) の項で述べたように, 一次の Taylor 多項式 $P_1(x, y)$ は, $k = 0, 1$ に対して,

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(x, y) - P_1(x, y)|}{||p - p_0||^k} = 0 \tag{56}$$

となるような一次の多項式として, 一意的に特徴付けられるのでした. また, (56) 式をもとにして議論することで,「点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の近くだけを考える」ときに, 数ある一次の多項式の中で, $P_1(x, y)$ は「関数 $f(x, y)$ に最も「姿」が似ている多項式」であることが分かるのでした. そこで, この **「点 $\boldsymbol{p_0 = (a, b)} \in \mathbb{R}^2$ の近くだけを考える」ときに, 数ある一次の多項式の中で「関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ に最も「姿」が似ている一次の多項式」である**という性質が, **「点 $\boldsymbol{p_0 = (a, b)} \in \mathbb{R}^2$ において, 関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ のグラフに接する平面である」**ということを表わしているのだと考えて, **そうした性質を保証する (56) 式を, 逆に, 接平面を定義する式であると解釈してしまおう**ということが考えられました. すなわち, $k = 0, 1$ に対して,

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(x, y) - Q(x, y)|}{||p - p_0||^k} = 0 \tag{57}$$

となる一次の多項式 $Q(x, y)$ が存在するときに, 関数 $f(x, y)$ は**点 $\boldsymbol{p_0}$ において (全) 微分可能である**と定義されます. また, このとき,「一次の多項式 $Q(x, y)$ のグラフとして得られる平面」を**点 $\boldsymbol{p_0}$ における関数 $\boldsymbol{f(x, y)}$ のグラフの接平面**と呼びます.

いま, $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ として, 一次の多項式 $Q(x, y)$ を,

$$Q(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + C \tag{58}$$

という形で表わすことにすると,

$$\lim_{p \to p_0} |f(x, y) - Q(x, y)| = |f(a, b) - C|$$

となることが分かりますから, $k=0$ に対する (57) 式の条件は,

$$C = f(a,b) \tag{59}$$

という式と数学的な内容は同じであることが分かります.[20] そこで, 最初から, $C = f(a,b)$ と選んで, $k=1$ に対する (57) 式の条件だけを考えるのが普通です. すなわち, 普通, 微積分学の教科書では,

点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ における (全) 微分可能性の定義式

$$\lim_{p\to p_0}\frac{|f(x,y)-f(a,b)-A(x-a)-B(y-b)|}{||p-p_0||}=0$$

となる実数 $A, B\in\mathbb{R}$ が存在するとき,「関数 $f(x,y)$ は点 p_0 において全微分可能である」というように定義されています.

ただし, 普段, 皆さんが接するような関数は「式一発」で書けるような滑らかな関数のことが多いでしょうし, 滑らかな関数 $f(x,y)$ に対しては, すでに見たように,「関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の勝手な点 $p_0\in\mathbb{R}^2$ において全微分可能であり, $Q(x,y)$ は点 p_0 における関数 $f(x,y)$ の一次の Taylor 多項式 $P_1(x,y)$ で与えられる」ことが分かりますから, 皆さんが, 上の定義にもとづいて, 実際に全微分可能かどうかを考察しなければいけない場面に出会うことは, (数学の定期試験においての他は,) 余りないのではないかと思います.

(き) 関数の大まかな様子を調べるには (その 1) (第 6 回 : 8 節)

さて, (お) の項で述べたように, 滑らかな関数 $f(x,y)$ の点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ における Taylor 多項式を,

(点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ のまわりでの) n 次の Taylor 多項式

$$\begin{aligned}P_n(x,y) =& \sum_{\substack{0\le k,m\\ 0\le k+m\le n}}\frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m}f}{\partial x^k\partial y^m}(a,b)\,(x-a)^k(y-b)^m\\ =& f(a,b)+\tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)\\ &+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,(x-a)^2+\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\,(x-a)(y-b)\\ &+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,(y-b)^2+\cdots\\ &+\tfrac{1}{n!}\tfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)\,(x-a)^n+\cdots+\tfrac{1}{n!}\tfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)\,(y-b)^n\end{aligned}$$

とすると, **Taylor 多項式 $P_n(x,y)$ は n 次の多項式の中で,「$||p-p_0||\ll 1$ のとき, 関数 $f(x,y)$ に最も良く「姿」が似ている多項式」である**ことが分かります.

[20] ここで, 関数 $f(x,y)$ は点 $p_0=(a,b)$ において連続であると仮定して議論しました. あるいは, 一次の多項式 $Q(x,y)$ が点 $p_0=(a,b)$ における関数 $f(x,y)$ のグラフの接平面であるとすれば, 当然, $Q(x,y)$ のグラフは点 $(a,b,f(a,b))\in\mathbb{R}^3$ を通るべきである, すなわち, $Q(a,b)=f(a,b)$ であるべきであると考えられますが, (59) 式を $Q(a,b)=f(a,b)$ という条件であると考えることもできます. このとき, $k=0$ に対して, (57) 式が成り立つということは, 関数 $f(x,y)$ は点 $p_0=(a,b)$ において連続であるということに他なりません.

このことから, 一変数関数のときと同様に, **点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりでの関数 $f(x, y)$ の大まかな様子を理解するためには, 近似多項式 $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, $\cdots$ などの様子を調べれば良いのではないか**という戦略が立ちます. すなわち, 点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の近くで, 関数 $f(x, y)$ は,

$$f(x, y) \fallingdotseq P_n(x, y)$$

というように, 近似的に「多項式の姿」$P_n(x, y)$ に「化ける」ことが分かりますから, 後は, **近似的に「化けた」多項式 $P_n(x, y)$ の様子を眺めることで, 点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ の近くでの関数 $f(x, y)$ の大まかな様子も理解できるのではないか**と考えられるというわけです.

そこで, まず, $n = 1$ として,

$$f(x, y) \fallingdotseq P_1(x, y) \tag{60}$$

というように近似して考えてみます. このとき, (60) 式を具体的に書き表わすと,

(点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ のまわりで) $f(x, y) \fallingdotseq P_1(x, y)$ と近似して考える

$$f(x) \fallingdotseq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b) \tag{61}$$

となりますが, (か) の項でも注意したように, これは**関数 $f(x, y)$ のグラフにおいて, 点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における接平面を考えている**ことに他なりません.

さて, 一変数関数のときと同様に, 接平面の傾きが 0 となるような点, すなわち,

臨界点の条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0 \tag{62}$$

となる点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ は, 関数 $f(x, y)$ の様子が変わる特別な点であると考えられますが, このような点を関数 $f(x, y)$ の**臨界点** (critical point) と呼びます. いま, (う) の項と同様に, 滑らかな関数 $f(x, y)$ に対する (全) 微分 (係数) を,

滑らかな関数 $f(x, y)$ に対する (全) 微分 (係数)

$$(df)_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} \tag{63}$$

と表わすことにすると, 臨界点の条件は,

臨界点の条件 (言い換え)

$$(df)_{p_0} = 0 \tag{64}$$

というように言い換えられることが分ります.[21] さらに,「展開の中心点」$p_0 = (a, b) \in$

[21] ここで, **(64) 式の右辺の「0」は 1 行 2 列の零行列を表わしている**ことに注意して下さい.

$\mathbb{R}^2$ から「値を考えたい点」$p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ へのズレを,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と表わすことにして, 行列の積を用いて, (61) 式の右辺を,

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \\ &= f(a,b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \qquad (65) \\ &= f(p_0) + (df)_{p_0}(\mathbf{v}) \qquad (66) \end{aligned}$$

というように表わすことにします. このとき, (65) 式, (66) 式を, 一変数関数の場合の一次の Taylor 多項式の式

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

と見比べてみると, 一変数関数の場合と二変数関数の場合の間には,

一変数関数の場合と二変数関数の場合の間の対応

	一変数関数		二変数関数
関数：	$f(x)$	$\longleftrightarrow$	$f(x,y)$
展開の中心点：	$p_0 = a$	$\longleftrightarrow$	$p_0 = (a,b)$
微分係数：	$f'(a)$	$\longleftrightarrow$	$(df)_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix}$
ズレ：	$\mathbf{v} = (x-a)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

というような対応があることが分ります. 一変数関数の場合には, 関数 $f(x)$ の臨界点とは, $f'(a) = 0$ というように「微分が消える点」のことでしたが, 上の対応と (64) 式から, 二変数関数の場合にも, 臨界点とは, $(df)_{p_0} = 0$ というように「微分が消える点」として解釈できることが分ります. また, 一変数関数の場合と同様に,

$$p_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ が極値点.} \implies (df)_{p_0} = 0$$

となることが分かりますから, 後は, (62) 式という連立方程式を解くことにより, 二変数関数の場合にも, **「微分が消える点」である「臨界点」を求めることにより, 極値点の候補を求めることができる**ことが分かります.

(く) 関数の大まかな様子を調べるには (その 2) (第 6 回：9 節)

さて, **「臨界点」のまわりでは,**

$$P_1(x,y) = f(a,b)\,(= P_0(x,y))$$

というように, $P_1(x,y)$ が定数関数になってしまっているので, 例えば, 点 $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ からズレたときに関数 $f(x,y)$ の値が $f(a,b)$ という値より増えるのか減るのかといった問題は,

$$f(x,y) \fallingdotseq P_1(x,y)$$

という近似を用いたのでは分からないことになります. そこで, この場合, **関数 $f(x,y)$ の様子をより詳しく調べるためには,**

$$\boldsymbol{f(x,y) \fallingdotseq P_2(x,y)}$$

というように, さらに $P_2(x,y)$ まで「近似を上げて」考える必要があります. すると, 臨界点 $p_0=(a,b)$ のまわりで, 関数 $f(x,y)$ は,

臨界点 $p_0=(a,b)$ のまわりで, $f(x,y)\fallingdotseq P_2(x,y)$ と近似して考える

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(x,y)} &\boldsymbol{\fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2}\\ &\boldsymbol{+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2}\end{aligned} \tag{67}$$

という二次関数のように見えることが分かります. ここで,

臨界点 $p_0=(a,b)$ におけるヘッシアン

$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{pmatrix} \tag{68}$$

として, 前と同様に,「展開の中心点」$p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ から「値を考えたい点」$p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ へのズレを,

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

と表わすことにすると, (67) 式の右辺は, 行列の積を用いて,

$$\begin{aligned}P_2(x,y) &= f(a,b)+\frac{1}{2}\cdot\Big\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2\\ &\qquad +2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\Big\}\\ &= f(a,b)+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}x-a & y-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix} \quad (69)\\ &= f(p_0)+\frac{1}{2}\cdot{}^t\mathbf{v}H_f(p_0)\mathbf{v} \quad (70)\end{aligned}$$

というように表わせることに注意します.[22] ここに表れた (68) 式の行列を, 関数 $f(x,y)$ の臨界点 $p_0=(a,b)$ における**ヘッシアン (Hessian)** と呼びます. 前と同様

[22] ここで, $f(x,y)$ は滑らかな関数なので, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ となることに注意して下さい.

に, (69) 式, (70) 式を, 一変数関数の場合の臨界点 $x=a$ のまわりでの二次の Taylor 多項式の式

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 \\ &= f(a) + \frac{1}{2}\cdot (x-a)\, f''(a)\,(x-a) \end{aligned}$$

と見比べてみると, 一変数関数の場合と二変数関数の場合の間には,

一変数関数の場合と二変数関数の場合の間の対応

	一変数関数		二変数関数
関数：	$f(x)$	$\longleftrightarrow$	$f(x,y)$
展開の中心点：	$p_0=a$	$\longleftrightarrow$	$p_0=(a,b)$
二階の微分係数：	$f''(a)$	$\longleftrightarrow$	$H_f(p_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$
ズレ：	$\mathbf{v}=(x-a)$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

というような対応があることが分ります.

さて, いま, $\mathbb{R}^2$ の原点を $(0,0)\rightsquigarrow(a,b)$ と取り替えて,

$$X=x-a,\ Y=y-b$$

として, $\mathbb{R}^2$ の座標を $(x,y)\rightsquigarrow(X,Y)$ と取り替えて考えると,

$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

として,

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(a,b) + \frac{1}{2}\cdot\left\{AX^2+2BXY+CY^2\right\} \\ &= f(a,b) + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように簡明な形で表わせることが分ります. したがって, **臨界点 $\boldsymbol{p_0=(a,b)}$ のまわりでの二次の Taylor 多項式 $\boldsymbol{P_2(x,y)}$ の様子を理解するためには, 勝手にひとつ与えられた対称行列**[23]

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

に対して,

[23] すなわち, 行列の成分が対角線に関して対称になっている行列のことです.

二次形式

$$\boldsymbol{F(X,Y)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$= \boldsymbol{AX^2 + 2BXY + CY^2} \tag{72}$$

という式により定まる二次関数 $\boldsymbol{F(X,Y)}$ の様子が理解できればよいということが分かります. こうした二次関数のことを, 線型代数学では**二次形式**と呼んだりします.

ここで, $B = 0$ のときには, すなわち, 二次形式の係数行列 H が,

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

というように対角行列になるときには, 二次関数 $F(X,Y)$ は,

$$F(X,Y) = AX^2 + CY^2$$

というように簡単な形になります. すると, 例えば, $A, B > 0$ である場合には, どの方向に進んでも値は増えることが分かりますから, $(X,Y) = (0,0)$ が二次関数 $F(X,Y)$ の極小点になっていることが分かるというように, 二次関数 $F(X,Y)$ の様子は簡単に理解できます.

一方, $B \neq 0$ のときには, $F(X,Y)$ の式には $2BXY$ という項が現われますから, 二次関数 $F(X,Y)$ のグラフの様子は, 式の形からはすぐには分かりません. しかし, このような場合でも, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases} \tag{73}$$

というように $\mathbb{R}^2$ の座標を取り換えて考えることにより, $B = 0$ の場合に帰着して考えることができます. このような「見やすい座標」への座標変換は, 線型代数学における「固有値」,「固有ベクトル」という知識を用いることでスッキリと理解することができますが, 新しい座標系 (X', Y') の座標軸が最初の座標系 (X,Y) の座標軸と同様に, 互いに直交しているということにこだわらなければ, **与えられた二次式を順番に平方完成することで, 簡単に見つけることができます**. 例えば, $A \neq 0$ なら,

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = A\left(X + \frac{B}{A}Y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}Y^2$$

と変形できることが分かりますから,

$$X' = X + \frac{B}{A}Y,\ Y' = Y$$

と座標変換すれば良いことが分かります. すると, 二次関数 $F(X,Y)$ は,「見やすい座標」(X', Y') を用いて,

$$F(X,Y) = A(X')^2 + \frac{AC - B^2}{A}(Y')^2 \tag{74}$$

というように表わせることになりますから, (74) 式の表示から, 例えば,「$A > 0$, $AC - B^2 > 0$ なら $(X, Y) = (0, 0)$ は二次関数 $F(X, Y)$ の極小点である」ということが分かります.

こうして, 必要なら, 平方完成をして「見やすい座標」で眺めることで, 臨界点 $p_0 = (a, b)$ のまわりでの二次の Taylor 多項式 $P_2(x, y)$ の様子を理解することができます. すると,「$||p - p_0|| \ll 1$ のとき, 関数 $f(x, y)$ は二次関数 $P_2(x, y)$ のように見える」のですから, 例えば, **二次関数 $P_2(x, y)$ が点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ において最小値 $f(a, b)$ を取るとすれば, 関数 $f(x, y)$ も点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ において極小値 $f(a, b)$ を取るのではないか**と「当たり」がつきます. さらに, **Taylor の定理を用いて,「$\fallingdotseq$」を「$=$」に置き換えて議論する**ことで, 実際に, この予想が正しいということをきちんと確かめることができます. すなわち, 臨界点 $p_0 = (a, b)$ におけるヘッシアンを,

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

として, 例えば,

極値判定法 (特別な例)

$$\begin{cases} A > 0,\ AC - B^2 > 0 \implies \text{臨界点 } p_0 \text{ で } f(x, y) \text{ は極小値 } f(a, b) \text{ を取る.} \\ A < 0,\ AC - B^2 > 0 \implies \text{臨界点 } p_0 \text{ で } f(x, y) \text{ は極大値 } f(a, b) \text{ を取る.} \end{cases}$$

となることが分かります.

一変数関数の場合には, 二階の偏微分係数 $f''(a) = A$ に対して, 対応する二次関数 $F(X)$ は,

$$\boldsymbol{F(X) = AX^2}$$

となるので, 係数 A の符号を見るだけで簡単に極値判定ができます. 一方, **二変数関数の場合には,「二階の偏微分係数」であるヘッシアン**

$$\boldsymbol{H_f(p_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}$$

に対して, 対応する二次関数 $F(X, Y)$ は,

$$\boldsymbol{F(X) = AX^2 + 2BXY + CY^2} \tag{75}$$

となるので, 一般には, (75) 式を見ただけでは, すぐに極値判定することができるとは限りませんが, 例えば,

$$\begin{aligned} F(X) &= X^2 + 2XY + 4Y^2 \\ &= (X + Y)^2 + 3Y^2 \end{aligned}$$

というように, **さらに, 平方完成するという手間を掛けることで, 一変数関数のときと同様に, 比較的簡単に極値判定ができる**というわけです.

7 少し進んだ話題.

皆さんが, 将来, それぞれの分野に進まれて, 実際に数学を用いて色々な現象を記述したり調べたりする場合には, 上で述べてきたものより, もう少し進んだ状況を考えることが多いのではないかと思います. すなわち, ある現象を記述するために, いくつか変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用意したとして, **これらの変数が独立に動けるのではなく, ある拘束条件を満たすようなものしか考えない**という状況が多いのではないかと思います.[24] そのような状況では, **拘束条件を満たすような点全体の集合がどのような形になるのか**ということや, **拘束条件のもとでの最大値, 最小値を求める**ことが必要になってきます.

(あ) 写像の微分 (第 6 回 : 11 節, 13 節)

多項式の力を借りて関数の大まかな様子を調べるという考え方は, そのまま, **写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の大まかな様子を調べる**ということに一般化することができます. 例えば, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ という写像が与えられているとして, 写像 f を成分を用いて,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \\ Z(x,y) \end{pmatrix}$$

と表わすことにすると, それぞれの成分 $X(x,y), Y(x,y), Z(x,y)$ は単なる二変数関数ですから, それぞれ, Taylor 展開を考えることができます. そこで, それぞれの関数に対して, 例えば, (60) 式のような一次式による近似を考えると, (65) 式, (66) 式から, 点 $p_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりで,

点 $p_0 = (a,b)$ のまわりで, 各成分を一次式で近似してみる

$$\begin{aligned} X(x,y) &\fallingdotseq X(a,b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial X}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= X(p_0) + (dX)_{p_0}(\mathbf{v}) \\ Y(x,y) &\fallingdotseq Y(a,b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Y}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= Y(p_0) + (dY)_{p_0}(\mathbf{v}) \\ Z(x,y) &\fallingdotseq Z(a,b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Z}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= Z(p_0) + (dZ)_{p_0}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります. ただし, 前と同様に,「展開の中心点」

[24] 例えば, 熱力学では, 系の状態は圧力 P, 体積 V, 温度 T の三つの変数を決めると定まると考えますが, **これらの変数は勝手な値を取ることは許されず, $PV = nRT$ という「状態方程式」を満たすような点 $(P,V,T) \in \mathbb{R}^3$ しか考えません.** すなわち, 系の状態を記述するにあたり, $\mathbb{R}^3$ という三次元のユークリッド空間を考えているわけではなく, $g(P,V,T) = PV - nRT$ として, $g(P,V,T) = 0$ という「状態方程式」を満たすような点全体からなる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $M_g \subset \mathbb{R}^3$ を考えているわけです. したがって, 例えば, ある関数 $F(P,V,T)$ の最大値, 最小値を考える場合にも, **$PV = nRT$ という条件のもとでの最大値, 最小値**を考える必要があります. すなわち, **関数 $F(P,V,T)$ を曲面 M_g 上の関数と考えたときの最大値, 最小値**を考える必要があります.

$p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ から「値を考えたい点」$p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ へのズレを,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

と表わしました. したがって, 写像 $f(x, y)$ は, 点 $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ のまわりで,

点 $p_0 = (a, b)$ のまわりで, 写像 $f(x, y)$ を一次式で近似してみる

$$f(x, y) \fallingdotseq \begin{pmatrix} X(a,b) \\ Y(a,b) \\ Z(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial X}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Y}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial Z}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Z}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$= f(p_0) + \begin{pmatrix} (dX)_{p_0} \\ (dY)_{p_0} \\ (dZ)_{p_0} \end{pmatrix} \mathbf{v} \tag{77}$$

というように表わせることが分かります.

ここで登場した行列

点 $p_0 = (a, b)$ における写像 $f(x, y)$ の Jacobi 行列

$$J_f(p_0) = \begin{pmatrix} (dX)_{p_0} \\ (dY)_{p_0} \\ (dZ)_{p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial X}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Y}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial Z}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial Z}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

を点 $p_0 = (a, b)$ における写像 f の **Jacobi 行列**と呼びます. 前と同様, (76) 式の右辺, あるいは, (77) 式の右辺を, 一変数関数の場合の一次の Taylor 多項式の表示式

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

と見比べてみると, **一変数関数の場合の微分係数 $f'(a)$ に対応する写像の場合の概念が Jacobi 行列 $J_f(p_0)$ である**ということになります. すなわち, 一変数関数から始めて,

関数の概念の拡張

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{ベクトル値}} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \big\downarrow \text{多変数化} & & \big\downarrow \text{多変数化} \\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{ベクトル値}} & f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$$

というように関数の概念が拡張されるに伴なって,

対応する「微分」の概念の拡張

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \end{pmatrix} \arrow[r, "\text{行が増える}"] \arrow[d, "\text{列が増える}"] & \begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} \\ \frac{dY}{dx} \\ \frac{dZ}{dx} \end{pmatrix} \arrow[d, "\text{列が増える}"] \\
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \arrow[r, "\text{行が増える}"] & \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

というように「微分」の概念が拡張されることが分かります.[25] これらの行列は, 伝統的には,

$$\begin{tikzcd}
\text{微分 (係数)} \arrow[r, "\text{行が増える}"] \arrow[d, "\text{列が増える}"] & \text{(ベクトル値関数の) 微分 (係数)} \arrow[d, "\text{列が増える}"] \\
\text{全微分 (係数)} \arrow[r, "\text{行が増える}"] & \text{Jacobi 行列}
\end{tikzcd}$$

というように, それぞれ異なる名前で呼ばれていましたが, 現在では, 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の点 $p_0 \in \mathbb{R}^n$ における微分 $(df)_{p_0}$ として, 統一的に理解されています.

(い) 合成写像の微分則 (第 6 回 : 14 節)

一変数関数の場合, 二つの関数 $g(x)$, $h(t)$ の合成関数

$$f(t) = g(h(t))$$

の微分は,

$$\frac{d}{dt}g(h(t)) = \frac{dg}{dx}(h(t)) \cdot \frac{dh}{dt}(t) \tag{78}$$

という式で与えられることは, 皆さん良くご存じのことと思います. 全く同様にして, 一般に, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ という二つの滑らかな写像に対して, g と h の合成写像を $f = g \circ h : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ とするときに, **合成写像 $f = g \circ h$ の微分を写像 g の微分と写像 h の微分を用いて表わす**ことができます.

そこで, まず, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ という場合について考えてみることにします.[26] すなわち,

$$f = g \circ h : \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

という状況について考えてみることにします. このとき, 関数 g の変数を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 関数 h の変数を $t \in \mathbb{R}$ として, $h(t)$ の成分を,

$$h(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

[25] ここで, 式を見やすくするために, 微分を考える点である $p_0 = a \in \mathbb{R}$ や $p_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ を省略して表わすことにしました.

[26] $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ という場合も, 全く同様に議論することができます.

と表わすことにすると, 合成関数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= g(h(t)) \\
&= g(\varphi(t), \psi(t))
\end{aligned}
$$

の微分は,

合成関数の微分則 (最も基本的な場合)

$$
\frac{d}{dt} g(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\psi}{dt}(t) \tag{79}
$$

というように計算できることが分かります. ここで, さらに, $h(t)$ の成分も,

$$
(\varphi(t), \psi(t)) \rightsquigarrow (x(t), y(t))
$$

と書き直すことにすると, (79) 式は,

連鎖律 (chain rule)

$$
\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) \tag{80}
$$

というように表わされることになり, 合成関数の微分を計算するやり方が, 次のように, よりハッキリするかもしれません. 上でも注意したように, 一変数関数の場合には,

$$
\frac{d}{dt} g(x(t)) = \frac{dg}{dx}(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) \tag{81}
$$

というように合成関数の微分を計算することができます. そこで, (80) 式の右辺の第一項と (81) 式を見比べてみると, (80) 式の右辺の第一項は, 合成関数 $g(x(t), y(t))$ のうち, $y(t)$ の部分は無視して, $g(x(t), \cancel{y(t)})$という一変数関数の合成関数と思って,

$$
\frac{d}{dt} g(x(t), \cancel{y(t)}) = \frac{dg}{dx}(x(t), \cancel{y(t)}) \cdot \frac{dx}{dt}(t)
$$

というように微分することに対応していることが分かります. 全く同様に, (80) 式の右辺の第二項と (81) 式を見比べてみると, (80) 式の右辺の第二項は, 合成関数 $g(x(t), y(t))$ のうち, $x(t)$ の部分は無視して, $g(\cancel{x(t)}, y(t))$という一変数関数の合成関数と思って,

$$
\frac{d}{dt} g(\cancel{x(t)}, y(t)) = \frac{dg}{dy}(\cancel{x(t)}, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)
$$

というように微分することに対応していることが分かります. このように, (80) 式は, **$x(t), y(t)$ という関数 $g(x, y)$ のそれぞれの変数の部分にだけ注目して, 一変数関数に対する合成関数の微分則を繰り返して適用すればよい**ということを表わしていると解釈することもできるので, (80) 式のような合成関数の微分則のことを**連鎖律 (chain rule)** と呼んだりします.

そこで, 次に, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ という場合について考えてみることにします.[27] すなわち,

$$f=g\circ h:\mathbb{R}^2\xrightarrow{h}\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

という状況について考えてみることにします. このとき, 前と同様に, 関数 g の変数を $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 関数 h の変数を $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ として, $h(s,t)$ の成分を,

$$h(s,t)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$$

と表わすことにします. すると, 合成写像 $f(s,t)$ は,

$$\begin{aligned}f(s,t)&=g(h(s,t))\\&=g(\varphi(s,t),\psi(s,t))\end{aligned}\tag{82}$$

と表わせることになります. ここで, 例えば, $\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)$ という偏導関数を計算するには, t は定数であると考えて, 二変数関数 $f(s,t)$ を, あたかも,

$$f(s)=g(\varphi(s),\psi(s))$$

というような一変数の合成関数と見なして微分を計算すれば良いということなどに注意すると, (79) 式から, 合成写像 $f(s,t)=g(h(s,t))$ の微分が,

合成写像の微分則 (特別な場合)

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)=\frac{\partial g}{\partial x}(h(s,t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)+\frac{\partial g}{\partial y}(h(s,t))\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\\ \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)=\frac{\partial g}{\partial x}(h(s,t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)+\frac{\partial g}{\partial y}(h(s,t))\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\end{cases}\tag{83}$$

というように計算できることが分かります. ここで, (83) 式は, 行列の積を用いて,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(h(s,t)) & \frac{\partial g}{\partial y}(h(s,t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\\ \frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\end{pmatrix}$$

というように表わせることが分かりますから, (あ) の項で述べた写像の微分という概念を用いて,

合成写像の微分則 (写像の微分を用いた表示)

$$(df)_{(s,t)}=(dg)_{h(s,t)}\cdot(dh)_{(s,t)}$$

というように簡明な形で表わせることが分かります.

全く同様に, 一般に, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $h:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ として, 合成写像

$$g\circ h:\mathbb{R}^l\xrightarrow{h}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n$$

の微分は, $p\in\mathbb{R}^l$ として,

[27] $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ という場合も, 全く同様に議論することができます.

合成写像の微分則 (写像の微分を用いた表示)

$$(d(g\circ h))_p = (dg)_{h(p)}\cdot(dh)_p \tag{84}$$

というように表わせることが分かります. 一変数関数の場合, 微分写像は, $p=t\in\mathbb{R}$ として,

$$(d(g\circ h))_t = \left(\frac{d}{dt}g(h(t))\right),\quad (dg)_{h(t)} = \left(\frac{dg}{dx}(h(t))\right),\quad (dh)_t = \left(\frac{dh}{dt}(t)\right)$$

という 1 行 1 列の行列であることに注意して, (78) 式と (84) 式を見比べてみると, **(84) 式は, 一変数関数に対する「合成関数の微分則」の写像の場合への自然な拡張になっている**ことが分かります.

(う) 逆関数定理とは (第 6 回 : 12 節)

さて, **「関数の定性的な性質」は Taylor 展開から得られる一次の近似多項式に十分良く反映されているだろう**という直感は, 何も一変数関数に限ったものではありません. 例えば, 滑らかな写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に対しては, **写像 f の「定性的な性質」は Jacobi 行列を掛け算することにより定まる (線型) 写像 $J_f(p_0):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に十分良く反映される**と期待することは自然なことのように思われます. 実際, こうした期待が「正しい」ということを示すような定理がいくつか知られているのですが, その中の代表的なものとして**「逆関数定理」**というものがあります.

いま, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ という写像に対して, 勝手にひとつ点 $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$ を取ってきたときに, $f(x,y,z)=(X,Y,Z)$ となるような点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ が**ただひとつだけ見つかる**と仮定してみます. このような状況では, 写像 f によって, 定義域である $\mathbb{R}^3$ の点と値域である $\mathbb{R}^3$ の点が**ぴったり一対一に対応している**ので, 逆に, $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$ に対して, $f(x,y,z)=(X,Y,Z)$ となるような点 (x,y,z) を対応させるという写像を考えることができます. この写像を, 写像 f の**逆写像**と呼び, f^{-1} と表わしたり, 変数を明記したい場合には, $f^{-1}(X,Y,Z)$ などと表わしたりします. 直感的には, 写像

$$f(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$$

が「逆写像を持つ」とは「(x,y,z) が (X,Y,Z) の関数として, 逆に解ける」ということです. このような**逆写像が存在するかどうかを考える**ときに有効なのが「逆関数定理」です.

いま, (76) 式より, $p_0=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ という点のまわりでは, 写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ は,

$$\begin{pmatrix} X(x,y,z)\\ Y(x,y,z)\\ Z(x,y,z)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix} \fallingdotseq J_f(p_0)\begin{pmatrix} x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix} \tag{85}$$

というように見えるのでした.[28] このとき, (85) 式の右辺である **Jacobi 行列 $J_f(p_0)$ を掛け算することによって定まる (線型) 写像 $J_f(p_0):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に対しては,「逆**

[28] ここで, $f(p_0)=(X(p_0),Y(p_0),Z(p_0))=(A,B,C)$ と書きました.

写像が存在するかどうかという問題」を「Jacobi 行列 $J_f(p_0)$ が正則行列[29]**かどうかという問題」に読み替えることができます**. さらに, 線型代数学の知識を用いれば, **「Jacobi 行列の行列式 $\det J_f(p_0)$ が 0 かどうか」**を調べることで, この問題の正否を簡単に判定することもできます.

そこで, いま, **Jacobi 行列 $J_f(p_0)$ が正則行列である**と仮定してみます. すると, (85) 式より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \fallingdotseq J_f(p_0)^{-1} \begin{pmatrix} X-A \\ Y-B \\ Z-C \end{pmatrix} \tag{86}$$

というように, **近似的には, (x,y,z) が (X,Y,Z) の関数として, 逆に解けてしまう**ことが分かります. 逆関数定理とは, **このように一次式による近似で, (85) 式が (86) 式のように解けてしまうと,「点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$ の近くでは」, 近似なしに (x,y,z) が (X,Y,Z) の関数として, 逆に解けてしまう**ということを主張する定理です. すなわち, **一次式の近似に対して逆写像が存在するときには,「点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$ の近くでは, もともとの写像 f に対しても逆写像が存在する」**ということを主張する定理です.

皆さんも, いずれこうした定理を学ぶことになると思いますが, そのときに「確かに, こういうことは期待できそうだ」と思えるように, 今のうちに考え方の基礎を, 皆さんなりに納得しておかれたら良いのではないかと思います.

(え) 「曲がった空間」上の関数を調べるには (第 7 回 : 4 節)

さて, 6 節の (き) の項, (く) の項では, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ というような多変数関数に対して, 臨界点の様子を調べることを考えましたが, **「点 $p=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ が, $\mathbb{R}^n$ 全体ではなく, $\mathbb{R}^n$ の与えられた部分集合 M の中を動く」という条件のもとで, 関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の極値を考えてみる**ということも, しばしば問題になります. これを**「条件付きの極値問題」**などと呼んだりします.

例えば, いま,

$$f(x,y) = y$$

という式によって定まる二変数関数 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考えてみます. このとき, **点 $p=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^2$ 全体を自由に動ける**とすると, y の値はいくらでも大きくなりますから, **関数 f には最大値は存在しない**ことが分かります. 実際, 関数 f の偏導関数を求めてみると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \neq 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから, 関数 f には臨界点は存在しないことが分かります. 一方,

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\ \}$$

---

[29] すなわち, 逆行列のある行列のことです.

として,[30] **点 $\boldsymbol{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2}$ が $\mathbb{R}^2$ 全体を自由に動けるのではなく, 単位円 $\boldsymbol{M}$ 上だけを動ける**とすると, y の値はどんなに頑張っても 1 を超えることはできませんから, **関数 $\boldsymbol{f}$ は「北極」$\boldsymbol{N = (0, 1)}$ において, 最大値 1 を取る**ということになります.

このように, 同じ関数 f の最大値を調べるといっても, **点 $\boldsymbol{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2}$ が $\mathbb{R}^2$ 全体を自由に動ける状況を考えているのか, あるいは, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\boldsymbol{M}$ 上だけを動ける状況を考えているのかということによって, その答えが違ってくる**ことが分かります. 後者の場合には,

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

という二変数関数の様子を調べているというよりは,

$$f : M \to \mathbb{R}$$

という**「曲がった空間」$\boldsymbol{M}$ 上の関数の様子を調べている**と考える方がより自然なわけです.

このような**「曲がった空間」上の関数の様子を調べる**ためのアイデアは, **「曲がった空間」$\boldsymbol{M}$ 上の点にパラメータ付けをして, 調べたい関数 $\boldsymbol{f}$ をパラメータを用いて表わしてみる**ということです. 例えば, 上の例では, 皆さん良くご存じのように, 単位円 M 上の点はパラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \in M$$

というように表わせることが分かります. そこで, **関数 $\boldsymbol{f(x, y) = y}$ をパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を用いて表わす**ことを考えると,

$$h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$$

という関数が得られることが分かります.[31]

このとき, 例えば,「点 $p \in M$ が単位円 M 上を動くときに, どの点で関数 f が極大値を持つのかという問題」は,「パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上を動くときに, どのパラメータの値で関数 h が極大値を持つのかという問題」として読み替えることができるというように, **「「曲がった空間」$\boldsymbol{M}$ 上で関数 $\boldsymbol{f}$ の様子を調べる問題」が,「$\mathbb{R}$ 上で関数 $\boldsymbol{h}$ の様子を調べる問題」に帰着する**ことが分かります. ここで, 単位円 M 上では,

$$x^2 + y^2 = 1$$

という条件のために, (x, y) は $\mathbb{R}^2$ 内を自由に動くことができない[32]のに対して, **パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ は $\mathbb{R}$ 内を自由に動くことができる**ことに注意して下さい. したがって,

[30]現在の幾何学では, ここで挙げた単位円の例のように, その上で微積分学が展開できるような「滑らかな図形」のことを**多様体** (manifold) と呼ぶので,「図形」や「空間」を表わすのに, M という記号が使われることが多いです.

[31]すなわち, 関数 $h(\theta)$ は, パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, パラメータ θ に対応した点 $(\cos\theta, \sin\theta) \in M$ における関数 f の値を対応させる関数です.

[32]すなわち, x, y は互いに独立には動けないということです.

関数 $h(\theta)$ の方は, 単なる一変数関数ということになりますから, これまでの知識を用いて, その様子を調べることができることが分かります.

全く同様にして, $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたときに, **「曲がった空間」M 上の各点のまわりで, 適当なパラメータ付けを取って考えることができれば,「曲がった空間」上の関数**

$$\boldsymbol{f : M \to \mathbb{R}}$$

の様子を調べることができることが分かります. したがって, 問題は, **「「曲がった空間」M 上の各点のまわりで, 適当なパラメータ付けを取って考えることができるか？」**ということになりますが, この問に答えてくれるのが, 次の項で述べる**「陰関数定理」**です.

(お) 陰関数定理とは (第 7 回 : 5 節, 6 節)

さて, (え) の項では, $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたときに, **「曲がった空間」M 上の各点のまわりで, 適当なパラメータ付けを取って考えることができれば,「曲がった空間」上の関数**

$$\boldsymbol{f : M \to \mathbb{R}}$$

の様子を調べることができるということを注意しました. 上でも述べたように**「陰関数定理」**とは, **「「曲がった空間」M 上の各点のまわりで, どのようなパラメータ付けを取ることができるのか？」**ということに答えてくれる定理です.

そこで, いま, $\mathbb{R}^2$ 上に,

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

という二変数関数が与えられているとして,

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\ \}$$

という二変数関数 $g(x, y)$ の零点集合を考えてみます. 例えば,

$$g(x, y) = x - y$$

であれば, その零点集合は,

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\ \}$$

という原点を通る直線になりますし,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

であれば, その零点集合は,

$$M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\ \}$$

という単位円になります. このとき, **「このような零点集合 M_g が, だいたいどのような形の部分集合になりそうか」ということを理解する**ことと, **「「曲がった空間」**

M_g 上の各点のまわりで，どのようなパラメータ付けができるのか」ということを理解するということが主な目標となります．

さて，(う) の項では**「逆関数定理」**というものに少し触れ，**「関数の定性的な性質は，第一近似した関数に十分良く反映されているだろう」**という直感を裏付けるような定理がいくつかあることを述べましたが，ここで取り上げた「陰関数定理」もそのような定理のひとつです．すなわち，

$$g(x,y)=0$$

という「本当の拘束条件」を満たす点全体の集合

「本当の拘束条件」を満たす点全体の集合

$$M_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\ \}$$

が $\mathbb{R}^2$ のどのような部分集合になりそうかということを理解したいのだけれど，それは難しいので，関数 $g(x,y)$ を $g(x,y)$ の 1 次の Taylor 多項式 $\hat{g}(x,y)$ で置き換え，

$$\hat{g}(x,y)=0$$

という「近似的な拘束条件」を満たす点全体の集合

「近似的な拘束条件」を満たす点全体の集合

$$M_{\hat{g}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \hat{g}(x,y)=0\ \}$$

を考えて，**理解が易しい「真っ直ぐな空間」$M_{\hat{g}}$ の様子を調べることで，理解が難しい「曲がった空間」M_g の様子に「当たり」を付けてみる**というのが基本的な考え方です．

そこで，いま，$p_0=(a,b)\in M_g$ として，点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ のまわりの関数 $g(x,y)$ の一次の Taylor 多項式を，

点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ のまわりの関数 $g(x,y)$ の一次の Taylor 多項式

$$\hat{g}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{87}$$

と表わすことにします．[33] すると，**「点 $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に近い場合」には，関数 $g(x,y)$ は，その一次近似である関数 $\hat{g}(x,y)$ と同じような関数に見える**わけですから，**「点 $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が点 $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に近い場合」には関数 $g(x,y)$ の零点集合 M_g は，関数 $\hat{g}(x,y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ とほぼ同じような形に見える**と期待することは自然なことのように思えます．すなわち，**「曲った空間」M_g は，点 $p_0=(a,b)\in M_g$ の近くで，直線 $M_{\hat{g}}$ を点 p_0 での接**

[33] 我々は，$p_0=(a,b)$ として $p_0=(a,b)\in M_g$ となる点を考えているので，$g(a,b)=0$ となり，(87) 式の右辺の定数項は 0 になっていることに注意して下さい．

線とするような曲線になっているのではないかと期待することは自然なことのように思えます.

ここで, さらに, 例えば, $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ であると仮定すると,「近似的な拘束条件」は,

「近似的な拘束条件」は簡単に解ける

$$\hat{g}(x,y)=0 \iff y=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\cdot(x-a)+b \tag{88}$$

というように,「y について解けてしまう」ことが分かります. よって, 関数 $\hat{g}(x,y)$ の零点集合 $M_{\hat{g}}$ 上の点 $P \in M_{\hat{g}}$ は,

$$\hat{\varphi}(x)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\cdot(x-a)+b$$

として,

$$P=(x,\hat{\varphi}(x)) \in M_{\hat{g}}$$

というように表わせることが分かります. すなわち, 直線 $M_{\hat{g}}$ 上の点は,

$$\mathbb{R} \ni x \ \longleftrightarrow \ P=(x,\hat{\varphi}(x)) \in M_{\hat{g}}$$

というように, x 座標の値を決めると, それに応じて, y 座標の値もピッタリひとつ決まることが分かります. すると, 関数 $g(x,y)$ の零点集合 M_g は, 点 $p_0=(a,b)$ で直線 $M_{\hat{g}}$ に接するような曲線であると考えられるわけですから,**「曲った空間」$\boldsymbol{M_g}$ 上の点も,「点 $\boldsymbol{p_0 \in M_g}$ の近くでは,」$\boldsymbol{x}$ 座標の値を決めると, それに応じて, $\boldsymbol{y}$ 座標の値もピッタリひとつ決まるようになっている**のではないかと期待されます.

これらの期待が, 実際に正しいということを述べたものが**「陰関数定理」**であり, 定理の内容は**「点 $\boldsymbol{p_0=(a,b) \in \mathbb{R}^2}$ が,**

$$\boldsymbol{g(a,b)=0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0}$$

を満たしているとすると, $\boldsymbol{x=a}$ の近くで定義された関数 $\boldsymbol{\varphi(x)}$ が存在して, 関数 $\boldsymbol{g(x,y)}$ の零点集合 $\boldsymbol{M_g}$ 上の点 $\boldsymbol{P \in M_g}$ は, 点 $\boldsymbol{p_0}$ の近くで,

$$\boldsymbol{P=(x,\varphi(x)) \in M_g}$$

と表わせる」と述べることができます. また, このことは, 次のように述べることもできます. いま, 関数 $g(x,y)$ を, 点 $p_0=(a,b) \in \mathbb{R}^2$ の近くで,

$$g(x,y) \fallingdotseq \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

というように一次近似して考えてみると, $g(x,y)=0$ という式は, ($\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ という仮定のもとで,)

$$y \fallingdotseq -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\cdot(x-a)+b$$

というように,**「近似的に y について解ける」**ことが分かります. このように,**「$g(x,y)=0$ という式が,一次近似で y について解けるときには,(実際に,我々が具体的な式として書き下すことができるかどうかは別として,)点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ の近くで,近似なしに y について $y=\varphi(x)$ という形に解くことができる」**ということを陰関数定理は主張しているわけです.

上では,$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ と仮定しましたが,全く同様にして,$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\neq 0$ のときには,**「点 $p_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ が,**

$$\boldsymbol{g(a,b)=0,\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\neq 0}$$

を満たしているとすると,$y=b$ の近くで定義された関数 $\psi(y)$ が存在して,関数 $g(x,y)$ の零点集合 M_g 上の点 $P\in M_g$ は,点 p_0 の近くで,

$$\boldsymbol{P=(\psi(y),y)\in M_g}$$

と表わせる」ことが分かります.すなわち,**「$g(x,y)=0$ という式が,一次近似で x について解けるときには,(実際に,我々が具体的な式として書き下すことができるかどうかは別として,)点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ の近くで,近似なしに x について $x=\psi(y)$ という形に解くことができる」**ことが分かります.こうした意味で,$g(x,y)=0$ という式は,$y=\varphi(x)$,あるいは,$x=\psi(y)$ という関数を「陰に」定めていると考えられるので,関数 $\varphi(x),\psi(y)$ のことを,($g(x,y)=0$ という式によって定まる)**陰関数**と呼んだりします.

陰関数の微分を求めるためには,例えば,

$$g(x,\varphi(x))=0, \tag{89}$$

という式に注目して,(89) 式の両辺を,x で微分すればよいことが分かります.すなわち,(い) の項で述べた連鎖律を用いて,(89) 式の両辺を,x で微分してみると,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0 \tag{90}$$

となることが分かりますから,

陰関数 $\varphi(x)$ の微分

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))} \tag{91}$$

となることが分かります.さらに,(90) 式の両辺を微分してみると,

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,\varphi(x))+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\\&\quad+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\cdot\{\varphi'(x)\}^2+\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x)\end{aligned}$$

となることが分かりますから,以下,同様に考えると,$\varphi''(x)$,$\varphi'''(x)$,$\cdots$ などが順番に計算できることになります.

(か) Lagrange の未定乗数法について (第 7 回 : 8 節)

いま, $\mathbb{R}^2$ 上の二つの関数 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとして, **「$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が, 関数 $g(x, y)$ の零点集合**

$$\boldsymbol{M_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\}}$$

を動く」という条件のもとで, 関数 $f(x, y)$ の様子を調べるということを考えてみます. このとき, $p_0 = (a, b) \in M_g$ として, 例えば, $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ であるとすると, (お) の項で述べた陰関数定理から, $x = a$ の近くで定義された関数 $\varphi(x)$ が存在して, 「曲った空間」M_g 上の点 $P \in M_g$ は, 点 p_0 の近くで,

$$P = (x, \varphi(x)) \in M_g$$

と表わせることが分かります. すなわち, 点 p_0 の近くで, M_g 上の点は, パラメータ x を用いて表わすことができることが分かります. そこで, このパラメータ x を用いて, M_g 上の点を表わすことにすると, **点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ が M_g という部分集合の中に留まりながら点 $p_0 = (a, b) \in M_g$ の近くを動くとき, $f(x, y)$ という関数は,**

$$\boldsymbol{h(x) = f(x, \varphi(x))} \tag{92}$$

という関数に見えるということになります. したがって, **「関数 $h(x)$ の様子を調べる」ことにより, 「$g(x, y) = 0$ という条件を付けたときの関数 $f(x, y)$ の点 p_0 の近くでの様子を調べる」ことができる**ことが分かります.

このとき, (お) の項で見たように, 陰関数 $\varphi(x)$ の微分は, $g(x, \varphi(x)) = 0$ という式の両辺を微分することで,

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \tag{93}$$

となることが分かりますから, (92) 式, (93) 式より, 関数 $h(x)$ の微分は,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. よって, 関数 $h(x)$ の臨界点を求めるには, $g(x, y) = 0$ と $h'(x) = 0$ という式を連立させて,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{94}$$

という連立方程式を解けば良いことが分かります. すなわち, (94) 式の連立方程式を解くことにより, **関数 $f(x, y)$ の「条件付きの」臨界点のうち, 「$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ となっている」ようなものをすべて求めることができる**ことが分かります.

全く同様に考えると, 関数 $f(x,y)$ の「条件付きの」臨界点のうち, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$ となっているようなものを求めるためには, 今度は,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{95}$$

という連立方程式を解けば良いことが分かります. したがって, **「曲った空間」$\boldsymbol{M_g}$ 上に特異点[34]が存在しないとき, (94) 式, (95) 式の連立方程式を解くことにより, 関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ の「条件付きの」臨界点がすべて求まる**ことが分かります.

これはこれで結構なことなのですが, **「二通りの連立方程式」を解かないといけない**ということは少し「うっとうしい」感じがします. そこで, **何かもっと簡単にすませる「工夫」**はないものかと考えてみたくなりますが, このような「工夫」ができるというのが, **Lagrange の未定乗数法**というものです.

そこで, いま, (94) 式という連立方程式 で,

連立方程式を書き換えるためのアイデア

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} \tag{96}$$

と書き直してみます. すると, (94) 式は,

連立方程式の書き換え

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{97}$$

というように書き換えられることが分かります.[35] このとき, **連立方程式 (97) 式の中では, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが全く対等な立場で現われている**ことに注意して下さい. このことは, **連立方程式 (95) 式に対して, 同様の書き直しを行っても, 全く同じ (97) 式という連立方程式が得られる**ことを示唆していますが, 実際, このことはすぐに確かめることができます.

以上より, **$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0}$, または, $\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0}$ のうちのどちらが成り立っているかということにはかかわらず, (97) 式の連立方程式を解くことにより, 関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ の「条件付きの」臨界点をすべて求めることができる**ということが分かります. さらに, λ という余計な座標を導入して,

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

[34] すなわち, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点 $p = (x,y) \in M_g$ のことです.

[35] ここで, (97) 式における二番目の式は, (96) 式という λ の定義式を書き換えたものです.

という関数 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を考えてみると, 関数 $F(x,y,\lambda)$ の一階導関数は, それぞれ,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x,y) \end{cases}$$

となることが分かりますから, **(97) 式の連立方程式は,**

(97) 式の読み替え

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

という連立方程式として読み替えることができることが分かります. このように, **「$g(x,y)=0$ という条件のもとで, 関数 $f(x,y)$ の条件付きの臨界点を求める問題」は, λ という「余分のパラメータ」を導入して, 条件式を与える関数である $g(x,y)$ に「λ を掛けて」,**

$$\boldsymbol{F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)}$$

という関数を考えることで,「関数 $F(x,y,\lambda)$ に対する (普通の意味での) 臨界点を求める問題」に帰着することが分かりました. このような形で**条件付きの臨界点**を求める方法を **Lagrange の未定乗数法**と呼びます.[36]

• (お), (か) についての補足

さて, (お) で述べたことを一般化すると, $\mathbb{R}^n$ 上のいくつかの関数 $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,m)$ を考え, こうした関数の共通零点として定まるような図形

$$M_g = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ (i=1,2,\cdots,m)\}$$

を考えるということになります. あるいは, 関数 g_i たちを成分とする写像を $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ として, 写像 g の零点集合を考えると言っても同じことです. この場合にも「陰関数定理」を拡張することができて, やはり, **一次式による近似を考えてみることにより, $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, $(i=1,2,\cdots,m)$ という条件式が実際にどの変数について解けるのか**が分かります. これにより, M_g という**「曲がった空間」上の点にパラメータ付けをする**ことができます. また, (か) で述べたことも, **定義域を M_g 上に制限して関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ の大まかな様子を調べる**という形で一般化できます.

現在の数学では, M_g のように,「曲がった空間」上の点に適当なパラメータ付けを定めて, そのパラメータを用いて微積分をしたりします. このように「曲がった空間」上で微積分をしてみると, 実は, **「微積分の様子」と「空間の形」とが密接に関係している**ことが分かります. そこで, こうした関係に注目して,「微積分の様子」を調べることにより, 逆に,「見えない空間の形」を「見る」ということがなされています.

[36] このように呼ばれる理由は, 上の説明から分かるのではないかと思います.

8　演習問題で扱う内容について

最初に述べたように, **上で見てきたような基本的な事柄を具体的な問題にもとづいて説明する**ことを目標にして演習問題を選んでみたのですが, 実際の演習問題との対応はおおよそ次のようになっています.

(1) 一変数関数について

第 1 回の問 1 : 具体的な微分の計算

第 1 回の問 3 : 具体的な極限の計算

第 2 回の問 1 : 具体的な微分の計算

第 2 回の問 2 : Taylor 展開の形に当たりをつけること

第 2 回の問 3 : 具体的な Taylor 展開の計算

第 2 回の問 4 : 剰余項付きの Taylor 展開ができること

第 3 回の問 1 : 具体的な微分の計算

第 3 回の問 2 : 具体的な極限の計算

第 3 回の問 3 : 具体的な Taylor 展開の計算 (合成関数の Taylor 展開)

第 3 回の問 4 : Taylor 展開を用いて具体的な極限を求めること

第 4 回の問 1 : Taylor 展開を用いて具体的な極限を求めること

第 4 回の問 2 : Taylor 展開がゼロになってしまう具体的な例

第 5 回の問 3 : 具体的な Taylor 展開の計算 (項別積分を用いる方法)

(2) 「無限和」について

第 1 回の問 2 : 具体的な級数の大きさの評価

第 4 回の問 3 : 和を取る順番によって, 総和が変わってしまう具体的な例

第 5 回の問 2 : 具体的な級数の計算

第 6 回の問 1 : 具体的な級数の収束判定

第 7 回の問 1 : 具体的なベキ級数の収束半径の計算

(3) 多変数関数について

第 5 回の問 1 : 具体的な偏微分の計算

第 6 回の問 2 : 臨界点の計算と臨界点での二次式近似を求めること

第 6 回の問 3 : 具体的な写像の一次式近似とその行列式を求めること

第 7 回の問 2 : 陰関数の微分の具体的な計算

第 7 回の問 3 : 具体的な条件付きの極値問題

以上のことを参考にして, 演習の時間内に問題が解けなかった場合でも, 毎回の問題を一度は自分で解いてみて, 皆さんなりに微積分学における基本的な考え方を反省してみると, より良く理解できるようになるのではないかと思います. そのような形で基本的な考え方が分かってきたら, 毎回２枚目につけている演習問題をやってみたり, 適当な演習書の問題をやってみると, さらに理解が進むのではないかと思います.

どんな科目であれ,「生きた知識」を身につけるためには**自分のペースで主体的に勉強すること**が何よりも大切です. ですから, 大学の講義の進度とは関係なしに, 先の方へ進めると思える方は自分でどんどん教科書などを読み進めたら良いのではないかと思いますし, 逆に, 今の講義や教科書が分かりづらいと思われる方は, 本屋や図書館へ行って自分に合った教科書を見つけて, 理解できる部分に立ち返ってじっくりと取り組まれたら良いのではないかと思います. **ニュートンの時代になるまで微積分学は発見されなかった**ということや, **皆さんが現在学ばれているような形に微積分学が整理されたのはほんの二百年程前になってからであった**ことを考えると, **人類にとって微積分学というものはそれほど易しいものではない**ことが分かります. それにもかかわらず, 現在では, **十分な努力を傾ければ, わずか一年間という短い時間で, 皆さんにも「難しい微積分学」が習得できるようになる**ということは**とても素晴らしいこと**ではないでしょうか.