

# 数学 IB 演習 ( 第 13 回 ) の略解

## 目次

1. 問 1 の解答	1
2. 問 1 を見直すと	2
3. 滑らかな関数の二重積分可能性について *	3
4. Fubini の定理について *	10
5. 一般の積分領域の場合について *	13
6. 問 2 の解答	16
7. 変数変換の公式について	17
8. 問 3 の解答	22
9. 問 3 を見直すと	25

### 1. 問 1 の解答

- (1) 与えられた積分を累次積分により、例えば、最初に  $x$  の方向、次に  $y$  の方向という順番で積分してみると、

$$\begin{aligned}
 & \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x+y)^2 dx dy \\
 &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x+y)^2 dx \right\} dy \\
 &= \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_0^1 \right\} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \{ (1+y)^3 - y^3 \} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1+3y^2+3y^4) dy \\
 &= \frac{1}{3} \left[ y + y^3 + \frac{3}{5}y^5 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} \left( 1 + 1 + \frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{13}{15}
 \end{aligned}$$

となることが分かります。

- (2) 与えられた積分を累次積分により、例えば、最初に  $y$  の方向、次に  $x$  の方向という順番で積分してみると、

$$\begin{aligned}
 & \iint_{[0,\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]} x \sin(x+y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi x \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dy \right\} dx \\
 &= \int_0^\pi x \left\{ [-\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} dx \\
 &= \int_0^\pi x \left\{ -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right\} dx
 \end{aligned}$$

となることが分かります。ここで、さらに、

$$-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x = \left\{ -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin x \right\}'$$

と考えて、部分積分をしてみると、

$$\begin{aligned}
 & \iint_{[0,\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]} x \sin(x+y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi x \left\{ -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right\} dx \\
 &= \left[ x \left\{ -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin x \right\} \right]_0^\pi \\
 &\quad + \int_0^\pi \left\{ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x \right\} dx \\
 &= \pi + \left[ -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right]_0^\pi \\
 &= \pi + \{(-1) - 1\} \\
 &= \pi - 2
 \end{aligned}$$

となることが分かります。

- (3) 与えられた積分を累次積分により、例えば、最初に  $x$  の方向、次に  $y$  の方向という順番で積分してみると、

$$\iint_{\{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}} (1-x-y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} (1-y-x) dx \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left\{ \left[ (1-y)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left\{ (1-y)^2 - \frac{(1-y)^2}{2} \right\} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 dy \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3}(1-y)^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

となることが分かります。

## 2. 問1を見直すと

第10回の問3のところ、一変数関数  $f(x)$  に対して、 $f(x)$  の積分を Riemann 和の極限として定義するという Riemann 積分の考え方を説明しましたが、二変数関数  $f(x, y)$  や、より一般の多変数関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対しても、一変数のときと全く同様にして、Riemann 和の極限として積分を定義することができます。これまでの演習で見てきたように、一変数関数  $f(x)$  に対する積分の場合には、「積分の値がきちんと定まっていることを確かめるということ」と「積分の値を求めるということ」とは別問題であり、実際に積分の値を求めるためには「別な工夫」をする必要がありました。そのための基礎を与えている事実が微積分学の基本定理であり、これにより「積分の値を求める問題」が「原始関数を求める問題」に帰着できるのです。こうした基礎のもとで、皆さんは、置換積分や部分積分やパラメータに関する微分などを用いることで、具体的な積分を求める技術を磨いてきたわけです。

さて、多変数関数の積分の場合にも、「積分の値がきちんと定まっていることを確かめること」と「積分の値を求めること」とは別問題であり、実際に積分の値を求めるためには、やはり「別な工夫」が必要になります。この場合の基礎を与えてくれるのが Fubini の定理と呼ばれる事実です。すなわち、例えば、 $\mathbb{R}^2$  上の連続関数  $f(x, y)$  に対して、 $f(x, y)$  の有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  上での積分が、

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \quad (1)$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \quad (2)$$

というように累次積分によって表わされるという事実です。これにより、「多変数関数の積分の値を求める問題」が「一変数関数の積分の値を順番に求める問題」に帰着できることとなります。すなわち、上の二変数関数の例であれば、例えば、最初に  $y$  をパラメータであるとみなして、

$$\sigma(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

という変数  $x$  に関する積分の値を求め、次にこうして得られた  $\sigma(y)$  という  $y$  の関数を変数  $y$  に関して積分することで、

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \sigma(y) dy$$

というように  $f(x, y)$  の積分の値を求めることができるわけです。そこで、皆さんにとっては、Riemann 和の極限としての積分の概念をしっかりと理解すること、それが上のような累次積分によって求めることができるということ直観的にきちんと理解することが、何よりもまず大切なこととなります。すなわち、(1) 式、(2) 式が成り立つことが納得できたとすれば、これまで一変数関数の積分に対する理解を深めてきた皆さんにとっては、多変数関数の積分の値を求めることは全く難しいことではなくなるわけです。

そこで、(1) 式、(2) 式の意味するところを直観的に理解するために、 $M, N \in \mathbb{N}$  として、 $MN$  個の実数  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ , ( $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ ) の総和

$$S = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{i,j}$$

を考えてみます。もちろん、この和は、例えば、 $a_{1,1} + a_{3,2} + a_{2,1} + \dots$  というように、どんな順番に足し上げたとしても、同じ  $S$  という値になるわけです。そこで、いま、 $a_{i,j}$  達を、

$$\begin{array}{cccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{M,1} & a_{M,2} & \dots & a_{M,N}
\end{array}$$

というように行列の形に並べてみます。このとき、最

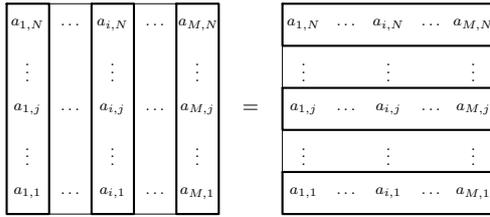


図 1  $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{i,j}$  という総和は、最初に列ごとの和  $\sum_{j=1}^N a_{i,j}$  を求めてから、次にそれらの和を計算しても、最初に行ごとの和  $\sum_{i=1}^M a_{i,j}$  を求めてから、次にそれらの和を計算しても求めることができる。

初に列ごとの和  $\sum_{j=1}^N a_{i,j}$  を求めてから、次にそれらの総和を計算するというのを考えてみると、あるいは、最初に行ごとの和  $\sum_{i=1}^M a_{i,j}$  を求めてから、次にそれらの総和を計算するというのを考えてみると、

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{i,j} = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1}^N a_{i,j} \right) \quad (3)$$

$$= \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^M a_{i,j} \right) \quad (4)$$

という式が成り立つことが分かります ( 図 1 を参照 ) 。

積分を「無限に細かい分割に関する和」として理解しようというのが Riemann 積分のアイデアでしたから、(1) 式、(2) 式と (3) 式、(4) 式とは本質的に同じ内容を表わしていると考えられます。皆さんは、(1) 式、(2) 式とはこのような意味があるということをかちんと納得して、実際に、いろいろな具体例で累次積分を計算してみることで、多変数関数の積分に対する感覚を養うことを、まず第一に心がけたら良いのではないかと思います。実際には、第 4 回の問 3 のところで見たように、「無限和」では、和を取る順番を取り換えると総和の値がガラガラと変わってしまうというような「妙なこと」も起こりえますから、関数  $f(x, y)$  や積分領域などに適当な条件を付けて、(1) 式や (2) 式が成り立つことを一度きちんと確かめておく必要があるわけです。そうした確認作業に興味がある方のために、後でこうした問題についても少し考えてみることにします。

さて、一変数関数の積分の場合には、積分区間は基本的に  $[a, b]$  という有界閉区間の一種類しか存在しないわけですが、多変数関数の積分の場合には、例えば、

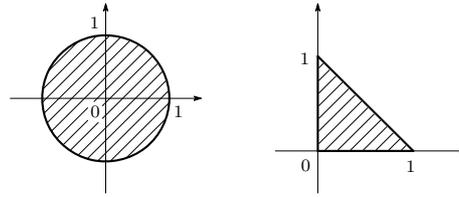


図 2 多変数関数の積分の場合、積分領域には様々な可能性が出てくる。

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

という単位円板や、問 1 の (3) で考えた

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

という三角形のように、考える積分領域に様々な可能性が出てきます ( 図 2 を参照 ) 。このように積分領域が有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  と異なる場合でも、(1) 式と同様に考えれば、積分領域  $D$  が有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  に含まれているとして、

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left\{ \int_{I_y} f(x, y) dx \right\} dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{J_x} f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

というような形で、積分の値を累次積分によって計算できることが分かります。すなわち、例えば、最初に  $x$  方向の和を求めて、次にそれらの和を  $y$  方向でも足し上げることにより、全体の「総和」が求まると考えられるわけです。このときに注意しないといけないことは、最初に積分を考える  $x$  方向の積分区間  $I_y$  は、それぞれの実数  $y \in [c, d]$  に応じて異なり得ますから、 $\mathbb{R}^2$  内の積分領域  $D$  の形をかちんと考えて、積分区間  $I_y$  を正しく求めなければいけないということです。例えば、問 1 の (3) の例では、積分領域は、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

という三角形でしたから、 $y \in [0, 1]$  を勝手にひとつ決めたときに、 $D$  内で  $x$  が動くことのできる範囲が  $I_y = [0, 1 - y]$  となるわけです ( 図 3 を参照 ) 。このような積分区間  $I_y, J_x$  を間違いなく求めるためには、皆さんもできるだけ積分領域  $D$  の図を描いて考えてみると良いのではないかと思います ( 図 4 を参照 ) 。

### 3. 滑らかな関数の二重積分可能性について \*

第 10 回の問 3 のところで、 $\mathbb{R}$  上の何度でも微分で

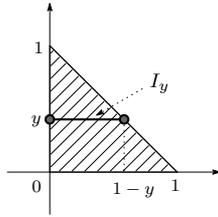


図3 それぞれの実数  $y \in [0, 1]$  に対して,  $x$  方向の積分区間  $I_y = [0, 1 - y]$  は異なる.

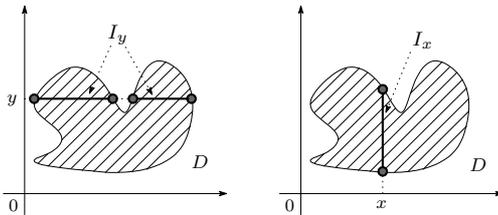


図4 与えられた積分領域  $D$  に対して, 累次積分を計算するには, それぞれの実数  $x \in [a, b]$ , あるいは,  $y \in [c, d]$  に対して, 積分区間  $I_y$ , あるいは,  $I_x$  を正しく求める必要がある.

きるような「滑らかな関数」 $f(x)$  は,  $\mathbb{R}$  内の勝手な有界閉区間  $[a, b]$  上で積分の値がきちんと定まるということを確かめました, そのときの議論をそっくりそのまま二変数関数の場合に移し替えると,  $\mathbb{R}^2$  上の何度でも微分できるような「滑らかな関数」\*1)  $f(x, y)$  は, やはり,  $\mathbb{R}^2$  内の勝手な有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  上で積分の値がきちんと定まるということを確かめることができます. そこで, この節では, 興味を持たれた方のために, この確認作業を行なってみることにします. 第10回のところでの一変数関数の場合の議論を読まれた方は, 適当な言葉の修正を行なうだけで, そのときと一字一句違わない議論が展開されることに気付かれるのではないかと思います. また, それにより, より一般の多変数関数の場合にも全く同様の議論ができることが納得できるのではないかと思います.

いま,  $\mathbb{R}^2$  上の滑らかな関数  $f(x, y)$  が与えられているとします.\*2) このとき, 問題としたいことは,  $\mathbb{R}^2$  内

\*1) 第5回の問1のところでは注意したように, 二変数以上の多変数関数の場合には, 安直な直感を裏切るような「変なこと」が起こらないように, 偏微分可能性だけでなく, 同時に偏導関数の連続性まで要請するのが普通です. したがって, 「滑らかな関数」というのも, 正確には, 何度でも偏微分ができて, すべての偏導関数が連続関数となるような関数のことです.

\*2) これでは抽象的で考えづらいと思われる方は,  $f(x, y)$  として, 問1で考えた  $f(x, y) = (x + y^2)^3$  や  $f(x, y) = x \sin(x + y)$  などの関数を考えてもらっても構いません.

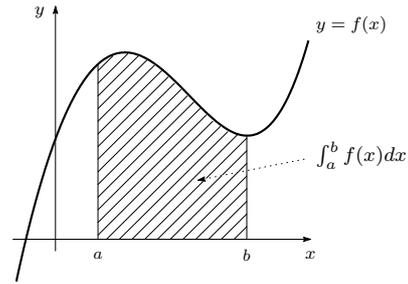


図5  $\int_a^b f(x)dx$  は区間  $[a, b]$  上で  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分の面積を表わしている.

の勝手な有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  に対して,

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$$

という関数  $f(x, y)$  の区間  $[a, b] \times [c, d]$  上での積分の値がきちんと定まるかどうかということになります. 皆さん良くご存知のように, 一変数関数  $f(x)$  に対して,

$$\int_a^b f(x) dx$$

という値は, 直観的には, 区間  $[a, b]$  上で  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分の (符号付きの) 面積を表わしているのです (図5参照). 全く同様に考えると, 二変数関数  $f(x, y)$  に対して,

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$$

という値は, 直観的には, 区間  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わすと考えることができます (図6参照). そこで, 問題は, 関数  $f(x, y)$  が滑らかな関数のときに, このような体積がきちんと定まるとことを確かめるということになります.

第10回で見たように, 一変数関数の場合には, いきなり「曲がった図形」の面積を考えることは難しいので, 区間  $[a, b]$  上で  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分である「曲がった図形」を長方形の集まりである短冊で近似して, 短冊の面積である Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を考えました (図7参照). このとき, 短冊に現われる長方形の幅がどれもこれも小さくなりさえすれば, 短冊の面積は求めたい「曲がった図形」の面積に近づくと考えられることに注目して,

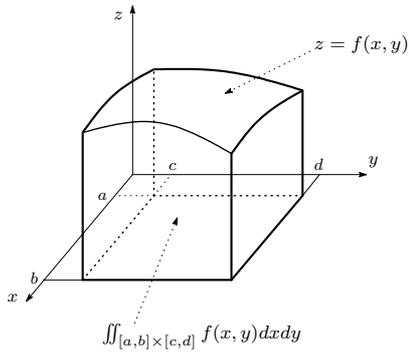


図 6  $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy$  は区間  $[a,b] \times [c,d]$  上で  $z = f(x,y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の体積を表わしている。

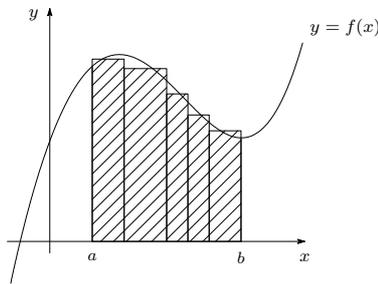


図 7 区間  $[a,b]$  上で  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分である「曲がった図形」を長方形の集まりである短冊で近似してみる。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

このように、Riemann 和の極限として、一変数関数  $f(x)$  の積分の値を定義しました。

二変数関数の場合と同様のことを考えると、やはり、いきなり「曲がった図形」の体積を考えることは難しいので、区間  $[a,b] \times [c,d]$  上で  $z = f(x,y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分である「曲がった図形」を直方体の集まりである「(三次元の) 短冊」で近似して、「短冊」の体積である Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を考えるということになります (図 8 参照)。このとき、「短冊」に現われる直方体の底面積がどれもこれも小さくなりさえすれば、すなわち、「短冊」に現われる「小柱」がどれもこれも痩せ細っていくような状況を考えれば、「短冊」の体積は求めたい「曲がった図形」の体積に近づくと考えられますから、一変数関数のときと同様に、

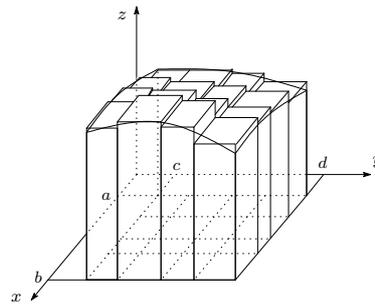


図 8 区間  $[a,b] \times [c,d]$  上で  $z = f(x,y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分である「曲がった図形」を直方体の集まりである「(三次元の) 短冊」で近似してみる。

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

このように、Riemann 和の極限として、二変数関数  $f(x,y)$  の積分の値を定義できるのではないかと期待できます。

そこで、以下では、関数  $f(x,y)$  が滑らかな関数である場合に、この期待が実際に正しいことを確かめてみることにします。すなわち、二変数関数  $f(x,y)$  に対する Riemann 和をきちんと定義した上で、分割の幅が小さくなりさえすれば、Riemann 和はどれもこれも同じような値に落ち着いてしまうということを確認してみることにします。

そこで、まず、「(三次元の) 短冊」に現われる直方体の底面を定めることを考えてみます。いま、 $\mathbb{R}$  上の区間  $[a,b]$  に対して、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

となるような実数  $x_i \in [a,b]$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) を勝手にひとつずつ選んでくることにより、区間  $[a,b]$  を、

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{m-1}, x_m]$$

このように分割することができますが、第 10 回と同様に、このような分割を分割点の集合を用いて、

$$\Delta_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

と表わすことにします。ここで、さらに、

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

となるような実数  $y_j \in [c,d]$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) を

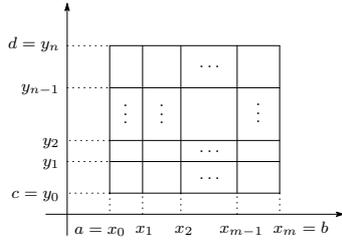


図 9 有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割.

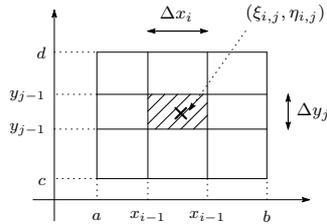


図 10 各小区間  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  から代表点  $(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$  をひとつずつ選んでくる.

勝手にひとつずつ選んできて、区間  $[c, d]$  の分割、

$$\Delta_2 = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

も考えてみると、 $\Delta_1, \Delta_2$  という二つの分割を用いて、

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

というように、有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  を小区間の和に分割することができます (図 9 を参照). ここでは、このような分割を区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割と呼ぶことにして、こうして得られる分割を、象徴的に、

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$$

と表わすことにします. このような区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  を与えることが、「(三次元の) 短冊」に現われる直方体の底面を定めることであると考えられます.

次に、「(三次元の) 短冊」に現われる直方体の高さを定めることを考えてみます. すると、こちらも、一変数関数のときと同様に、それぞれの小区間から代表点

$$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

を勝手にひとつずつ選んでくるのが、それぞれの直方体の高さを定めることであると考えられます (図 10 を参照). すなわち、関数  $f(x, y)$  の代表点

$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$  での値  $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$  がそれぞれの直方体の高さであると考えられるというわけです. 一変数関数の場合と同様に、以下では、それぞれの小区間から選んできた代表点全体の集合を、

$$\begin{aligned} \gamma &= \{\gamma_{ij}\}_{i=1,2,\dots,m} \\ &= \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}_{i=1,2,\dots,m} \end{aligned}$$

と表わすことにします.

さて、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  と各小区間での代表点  $\gamma$  が与えられると、上で見たように、直方体の底面と高さが決まりますから、それらの直方体を集めて、「(三次元の) 短冊」を考えることができます. そこで、この「短冊」の体積として、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を定義することができます. すなわち、

$$\begin{aligned} S(\Delta; \gamma) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\gamma_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

という式によって、分割  $\Delta$  と各小区間での代表点  $\gamma$  に対する Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を定義することができます. ここで、各小区間  $[x_{i-1}, x_i], [y_{j-1}, y_j]$  における  $x, y$  の微小変位を、それぞれ、

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

と表わすことにすれば、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  も、

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

というように表わせますから、「短冊」を構成する各「小柱」の体積の和を考えているということが、より象徴的な形で表わせることとなります (図 11 を参照).

そこで、さらに、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割の細かさを表わす量として、例えば、それぞれの小区間  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  の縦の長さの和の最大値、

$$|\Delta| = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \{|\Delta x_i| + |\Delta y_j|\}$$

を考えて、 $|\Delta|$  を分割  $\Delta$  の幅と呼ぶことにします.

さて、上でも注意したように、分割  $\Delta$  の幅  $|\Delta|$  が小さくなりさえすれば、すなわち、「短冊」を構成する「小柱」がどれもこれも痩せ細っていくような状況を考えれば、分割  $\Delta$  や各小区間での代表点  $\gamma$  の取り方

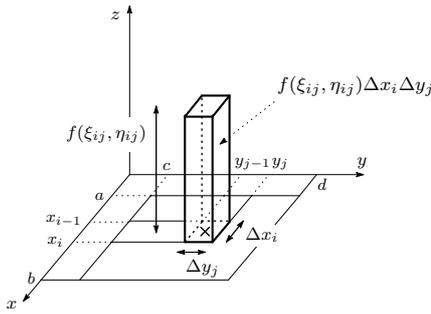


図 11 「小柱」の体積  $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$  を足し上げて、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を考える.

に依らず、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  は「区間  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の体積」という一定値に近づくと考えられます。そこで、関数  $f(x, y)$  が滑らかな関数である場合に、このことをきちんと確かめてみることにします。すなわち、分割の幅  $|\Delta|$  が小さくなりさえすれば、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  は、分割  $\Delta$  の取り方や各小区間での代表点  $\gamma$  の取り方に依らずに、どれもこれも同じような数に落ち着くということをきちんと確かめてみることにします。

そこで、まず、同じ分割  $\Delta$  に対する Riemann 和の間の関係について考えてみます。いま、分割  $\Delta$  の各小区間を、

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

と表わすことにして、第 10 回のときの議論をまねて、各小区間  $I_{ij}$  における関数  $f(x, y)$  の最大値、最小値を、それぞれ、

$$M_{ij} = \max_{(x,y) \in I_{ij}} f(x, y),$$

$$m_{ij} = \min_{(x,y) \in I_{ij}} f(x, y)$$

と表わすことにして、

$$S_{\Delta} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

$$s_{\Delta} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

という和を考えてみます。このとき、各小区間の勝手な代表点  $\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij}$  に対して、

$$m_{ij} \leq f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \leq M_{ij}$$

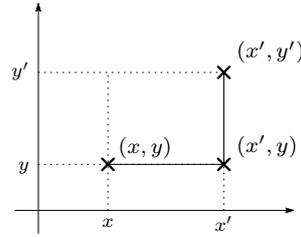


図 12  $(x', y')$  という点を仲立ちとして、 $f(x, y)$  という数と  $f(x', y')$  という数を比べてみる.

となりますから、分割  $\Delta$  に対するどんな Riemann 和も、

$$s_{\Delta} \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_{\Delta} \quad (5)$$

という不等式を満たすことが分かります。いま、分割の幅  $|\Delta|$  を小さくしていったときに、 $s_{\Delta}$  も  $S_{\Delta}$  も同じような数に落ち着くということを確認したいわけですから、 $s_{\Delta}$  という数と  $S_{\Delta}$  という数の間の距離を見積もることを考えてみます。すると、

$$0 \leq S_{\Delta} - s_{\Delta} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

と表わせますから、それぞれの小区間上で  $M_{ij} - m_{ij}$  という数の大きさを見積もることができればよいということになります。いま、これらの最大値  $M_{ij}$ 、最小値  $m_{ij}$  を与えるような点  $(\alpha_{ij}, \beta_{ij}), (\alpha'_{ij}, \beta'_{ij}) \in I_{ij}$  をそれぞれ勝手にひとつずつ選んでくると、

$$M_{ij} - m_{ij} = f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) - f(\alpha'_{ij}, \beta'_{ij}) \quad (6)$$

と表わせますから、結局、勝手な点  $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [c, d]$  に対して、

$$|f(x, y) - f(x', y')|$$

という量の大きさが評価できればよいということになります。

そこで、

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x', y') &= (f(x, y) - f(x', y)) + (f(x', y) - f(x', y')) \quad (7) \end{aligned}$$

と表わして、 $f(x, y)$  という数と  $f(x', y')$  という数を、 $f(x', y)$  という数を仲立ちとして比べてみることにします (図 12 を参照)。いま、 $f(x, y)$  は滑らかな関数であると仮定しましたから、平均値の定理により、勝手な二つの点  $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [c, d]$  に対して、

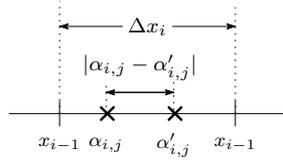


図 13  $\alpha_{ij}$  と  $\alpha'_{ij}$  の間の距離は  $\Delta x_i$  より小さい.

$$f(x, y) - f(x', y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y) \cdot (x - x') \quad (8)$$

$$f(x', y) - f(x', y') = \frac{\partial f}{\partial y}(x', \eta) \cdot (y - y') \quad (9)$$

となるような実数  $\theta, \eta$  が、それぞれ、 $x$  と  $x'$  の間、 $y$  と  $y'$  の間に存在することが分かります。そこで、

$$L = \max_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right\}$$

とすると、(7) 式、(8) 式、(9) 式から、勝手な二つの点  $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [c, d]$  に対して、

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x', y')| \\ &= |(f(x, y) - f(x', y)) + (f(x', y) - f(x', y'))| \\ &\leq |f(x, y) - f(x', y)| + |f(x', y) - f(x', y')| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y) \right| \cdot |x - x'| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x', \eta) \right| \cdot |y - y'| \\ &\leq L \cdot \{|x - x'| + |y - y'|\} \end{aligned} \quad (10)$$

と評価できることが分かります。特に、

$$(x, y) = (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \quad (x', y') = (\alpha'_{ij}, \beta'_{ij})$$

として、 $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in [x_{i-1}, x_i], \beta_{ij}, \beta'_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$  であることに注意すると、(6) 式、(10) 式より、 $M_{ij} - m_{ij}$  の大きさが、

$$\begin{aligned} M_{ij} - m_{ij} &= |M_{ij} - m_{ij}| \\ &= |f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) - f(\alpha'_{ij}, \beta'_{ij})| \\ &\leq L \cdot \{|\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}| + |\beta_{ij} - \beta'_{ij}|\} \\ &\leq L \cdot \{\Delta x_i + \Delta y_j\} \end{aligned} \quad (11)$$

というように見積もることができると分かります。<sup>\*3)</sup> ここで、分割の幅  $|\Delta|$  を、

$$|\Delta| = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \{|\Delta x_i| + |\Delta y_j|\}$$

\*3) 最後の不等式では、例えば、 $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in [x_{i-1}, x_i]$  なので、 $\alpha_{ij}$  と  $\alpha'_{ij}$  の間の距離  $|\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}|$  は、 $x_i$  と  $x_{i-1}$  の間の距離  $|\Delta x_i|$  より小さいなどと考えました ( 図 13 を参照 ) .

と定めたことを思い出すと、結局、(11) 式から、 $M_{ij} - m_{ij}$  の大きさが、

$$0 \leq M_{ij} - m_{ij} \leq L \cdot |\Delta| \quad (12)$$

と評価できることが分かります。したがって、(12) 式から、 $S_\Delta$  と  $s_\Delta$  の差が、

$$\begin{aligned} 0 \leq S_\Delta - s_\Delta &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq L \cdot |\Delta| \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_i \Delta y_j \\ &= L \cdot |\Delta| \cdot \left( \sum_{i=1}^m \Delta x_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \Delta y_j \right) \\ &= L \cdot |\Delta| \cdot (b - a)(d - c) \end{aligned}$$

と評価できることが分かります。

以上から、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  を勝手にひとつ取ってきたときに、 $S_\Delta$  と  $s_\Delta$  の差が、

$$0 \leq S_\Delta - s_\Delta \leq L \cdot (b - a)(d - c) \cdot |\Delta| \quad (13)$$

と見積もることができると分かりました。よって、(13) 式から、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さければ、 $S_\Delta$  も  $s_\Delta$  もほぼ同じような数であることが分かります。また、(5) 式より、

$$s_\Delta \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_\Delta \quad (14)$$

となることも分かっていますから、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さければ、分割  $\Delta$  に対する Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  も、代表点  $\gamma$  の取り方に依らず、どれもこれも同じような数になっていることが分かります。

そこで、次に、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の勝手な二つの分割  $\Delta, \Delta'$  に対して、それぞれの分割に付随する Riemann 和  $S(\Delta; \gamma), S(\Delta'; \gamma')$  の大きさを比べてみることにします。このとき、勝手に与えられた二つの分割を直接比べるのは難しいので、第 10 回のとおり同様にして、

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2, \quad \Delta' = \Delta'_1 \times \Delta'_2$$

と表わしたときに、

$$\Delta''_1 = \Delta_1 \cup \Delta'_1, \quad \Delta''_2 = \Delta_2 \cup \Delta'_2$$

として、

$$\Delta'' = \Delta''_1 \times \Delta''_2$$

という  $\Delta$  と  $\Delta'$  の共通の細分を考えると、 $\Delta''$  を仲立

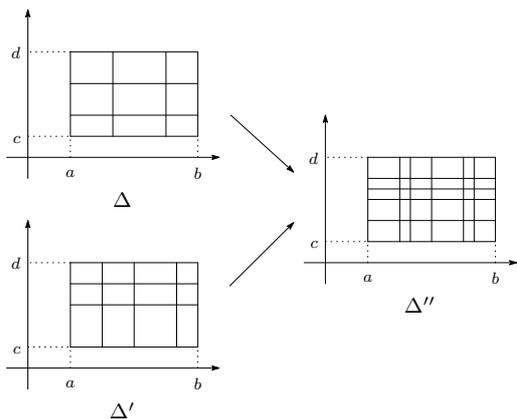


図 14 有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  の二つの分割  $\Delta, \Delta'$  を重ね合わせることで,  $\Delta, \Delta'$  の共通の細分  $\Delta''$  が得られる.

ちとして比べることを考えてみます.\*4)

すると, 分割  $\Delta''$  は分割  $\Delta$  の細分になりますから, 第 10 回の議論と全く同様にして,

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta''}, \quad S_{\Delta''} \leq S_{\Delta}$$

となることが分かります.\*5) したがって, 分割  $\Delta''$  に対する (14) 式と合わせて, 分割  $\Delta''$  に対する勝手な Riemann 和  $S(\Delta''; \gamma'')$  に対して,

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta''} \leq S(\Delta''; \gamma'') \leq S_{\Delta''} \leq S_{\Delta} \quad (15)$$

となることが分かります. 一方,

$$s_{\Delta} \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_{\Delta} \quad (16)$$

となりますから, (15) 式, (16) 式から,  $S(\Delta; \gamma)$  と  $S(\Delta''; \gamma'')$  のいずれもが  $s_{\Delta}$  と  $S_{\Delta}$  の間にあることが分かります. したがって, (13) 式と合わせて考えると,

$$\begin{aligned} |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')| &\leq S_{\Delta} - s_{\Delta} \\ &\leq L \cdot (b-a)(d-c) \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (17)$$

となることが分かります.

同様に,  $\Delta''$  は  $\Delta'$  の細分でもありますから, 上の議論で  $\Delta$  を  $\Delta'$  で置き換えると,

\*4) 分割  $\Delta''$  とは, 要するに,  $\Delta$  と  $\Delta'$  という区間  $[a, b] \times [c, d]$  の二つの分割を「重ね合わせる」ことのできるような分割のことです (図 14 を参照).

\*5) 興味のある方は, 例えば, 第 10 回での議論を参照するなどして, 確かめて下さい.

$$\begin{aligned} |S(\Delta'; \gamma') - S(\Delta''; \gamma'')| &\leq S_{\Delta'} - s_{\Delta'} \\ &\leq L \cdot (b-a)(d-c) \cdot |\Delta'| \end{aligned} \quad (18)$$

となることが分かります. したがって, (17) 式, (18) 式から,  $S(\Delta''; \gamma'')$  を仲立ちとして考えることで,

$$\begin{aligned} |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta'; \gamma')| &= |(S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')) \\ &\quad + (S(\Delta''; \gamma'') - S(\Delta'; \gamma'))| \\ &\leq |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')| \\ &\quad + |S(\Delta''; \gamma'') - S(\Delta'; \gamma')| \\ &\leq L \cdot (b-a)(d-c) \cdot |\Delta| \\ &\quad + L \cdot (b-a)(d-c) \cdot |\Delta'| \\ &\leq L \cdot (b-a)(d-c) \cdot \{|\Delta| + |\Delta'|\} \end{aligned}$$

となることが分かります.

以上より, 区間  $[a, b] \times [c, d]$  の勝手な二つの分割  $\Delta, \Delta'$  に対する Riemann 和の間には,

$$\begin{aligned} |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta'; \gamma')| \\ \leq L \cdot (b-a)(d-c) \cdot \{|\Delta| + |\Delta'|\} \end{aligned} \quad (19)$$

という見積もりが成り立つことが分かりました. したがって, (19) 式より, 分割の幅  $|\Delta|$  を十分小さく取りさえすれば, 分割  $\Delta$  や代表点  $\gamma$  の取り方には依らずに, Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  は, どれもこれも同じような数に落ち着くことが分かります. よって, 第 10 回のとおり同様にして,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

という極限が存在することが分かります.\*6) こうして,  $\mathbb{R}^2$  上の何度でも微分できる関数  $f(x, y)$  に対して,  $f(x, y)$  の有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  上での積分の値を,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

という Riemann 和を用いて,

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

というように, 分割の幅を小さくしていったときの Riemann 和の極限として定義できることが分かりました.

ここでは,  $f(x, y)$  が滑らかな関数である場合を考え

\*6) 興味のある方は, 第 10 回での説明を参照して下さい.

ましたが、一変数関数のときと全く同様にして、(10) 式の代わりに、一様連続性という性質を用いることで、\*7) 連続関数  $f(x, y)$  は  $\mathbb{R}^2$  内の勝手な有界閉区間上で Riemann 積分可能であるということを確かめることができます。\*8)

#### 4. Fubini の定理について \*

次に、3 節での考察をもとに、 $f(x, y)$  が  $\mathbb{R}^2$  上の滑らかな関数である場合に、

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

という Fubini の定理が成り立つことを確かめてみることにします。どちらの場合でも同じなので、ここでは、最初の等号についてのみ考えてみることにします。すなわち、

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \quad (21)$$

という等号についてのみ考えてみることにします。

そこで、定理の内容をより良く理解するために、まずは、(21) 式の直観的な意味について少し考えることにします。3 節で見たように、(21) 式の左辺に現われる

$$V = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy \quad (22)$$

という値は、直観的には、区間  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わしているのです (図 15 参照)。3 節では、この体積を求めるために、全体積  $V$  を

\*7) 論理式を用いて表わすと、一様連続性とは、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\text{s.t. } \|p - q\| < \delta \implies |f(p) - f(q)| < \varepsilon \quad (20)$$

ということです。ただし、 $p = (x, y), q = (x', y') \in \mathbb{R}^2$  として、点  $p$  と点  $q$  の間の距離を、

$$\|p - q\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

と表わしました。

\*8) すなわち、(10) 式の右辺に現われる  $L \cdot \{|x - x'| + |y - y'|\}$  という量を「ひとつの量」と考えて、 $L \cdot \{|x - x'| + |y - y'|\} \rightsquigarrow \varepsilon$  と置き換えて議論すればよいわけです。興味のある方は、微積分学の適当な教科書を参照するか、あるいは、(20) 式を用いて、自分で上の議論を修正してみてください。

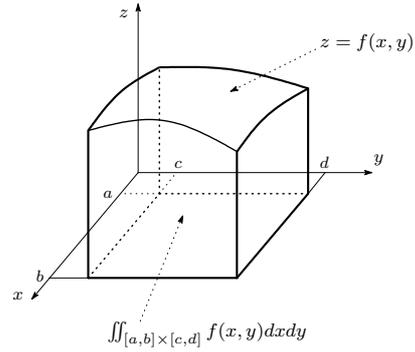


図 15  $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$  は区間  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の体積を表わしている。

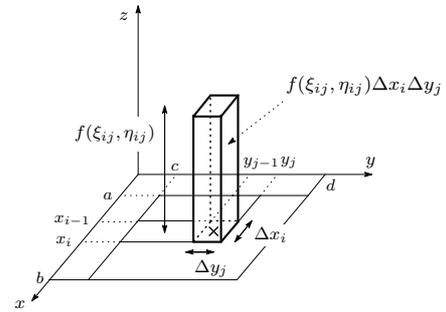


図 16 「小柱」の体積  $f(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}) \Delta x_i \Delta y_j$  を足し上げて、全体積  $V$  を近似する。

「小柱」の集まりである「(三次元の) 短冊」の体積

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

を用いて、

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

というように近似することを考えました (図 16 参照)。

さて、「小柱」の底面を定める区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  は、 $x$  方向である区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta_1$  と  $y$  方向である区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_2$  からなるわけですが、ここで、 $x$  方向である区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta_1$  は無視して、 $y$  方向である区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_2$  だけを用いて、全体積  $V$  を近似することを試みるとどのようなことになるのかということを考えてみます。すると、この場合、図 17 のような「小かまぼこ」の体積を足し上

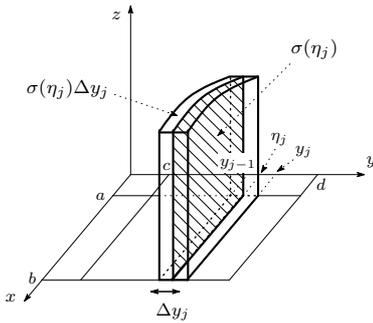


図 17 「小かまぼこ」の体積  $\sigma(\eta_j)\Delta y_j$  を足し上げて、全体積  $V$  を近似する。

げて、全体積  $V$  を近似するということとなります。

そこで、いま、 $y = \eta_j$  という平面で切ったときの「かまぼこ」の切り口の表面積を  $\sigma(\eta_j)$  と表わすことにします。また、「小かまぼこ」とは、表面積が  $\sigma(\eta_j)$  で厚さが  $\Delta y_j$  の「かまぼこ」のことであると考えことにします。すると、「小かまぼこ」一切れ当たりの体積は、

$$\sigma(\eta_j)\Delta y_j$$

となりますから、今度の場合、全体積  $V$  が、

$$V \approx \sum_{j=1}^n \sigma(\eta_j)\Delta y_j \quad (23)$$

というように近似されることとなります。ここで、(23) 式の右辺は、一変数関数  $\sigma(y)$  に対する Riemann 和

$$S^\sigma(\Delta_2; \eta) = \sum_{j=1}^n \sigma(\eta_j)\Delta y_j$$

に他ならないことと、区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_2$  の幅が小さくなりさえすれば、すなわち、「小かまぼこ」がどれもこれも薄っぺらになってしまうような状況を考えれば、「小かまぼこ」の体積の和は全体積  $V$  に近づくと考えることができますから、(23) 式の両辺で、 $|\Delta_2| \rightarrow 0$  という極限を考えることで、

$$V = \int_c^d \sigma(y)dy \quad (24)$$

という表示が得られることが分かります。したがって、後は、関数  $\sigma(y)$  を関数  $f(x, y)$  を用いて表わすことができればよいということになります。

いま、 $\hat{\eta} \in [c, d]$  として、 $\sigma(\hat{\eta})$  とは、 $y = \hat{\eta}$  という平面で切ったときの「かまぼこ」の切り口の表面積のことでした。そこで、この切り口に現われる曲線は、

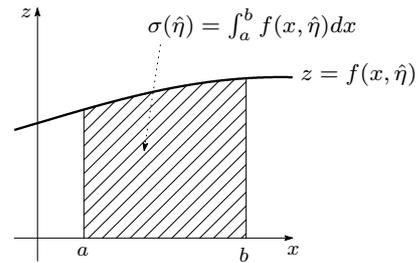


図 18  $y = \hat{\eta}$  という平面で切ったときの「かまぼこ」の切り口の様子。

$z = f(x, y)$  というグラフを  $y = \hat{\eta}$  という平面で切ることによって得られる曲線であることに注意して、切り口の様子を描いてみると、図 18 のようになることが分かります。よって、表面積  $\sigma(\hat{\eta})$  は、

$$\sigma(\hat{\eta}) = \int_a^b f(x, \hat{\eta})dx$$

という式で与えられることが分かります。ここで、 $\hat{\eta} \in [c, d]$  は何でもよかったので、改めて、 $\hat{\eta} \rightsquigarrow y$  と書き直すことにすると、

$$\sigma(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad (25)$$

と表わせることが分かります。よって、(24) 式、(25) 式から、全体積  $V$  は、

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \sigma(y)dy \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy \end{aligned} \quad (26)$$

というようにも表わせることが分かります。

以上から、(22) 式、(26) 式という全体積  $V$  に対する二通りの表示が得られましたが、どちらの方法で考えるにせよ、同じ体積  $V$  を求めているはずですから、これらの値は等しいはずであるということ、すなわち、(21) 式が成り立つはずであるということが分かりました。これが、(21) 式という Fubini の定理の直観的な意味です。

そこで、論理的な証明に近づくために、

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y)dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \quad (27)$$

という二変数関数  $f(x, y)$  に対する積分の定義式をもとにして、もう一度、どうして (21) 式が成り立つことがもっともらしいのかということを考えてみるこ

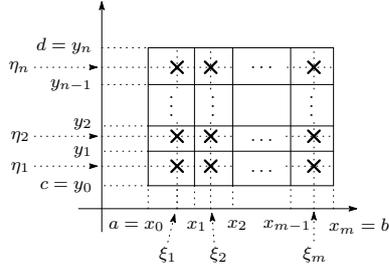


図 19 各小区間から、 $\gamma_{ij} = (\xi_i, \eta_j)$  という形の代表点を選んでみる。

にします。そのためのアイデアは、(27) 式の右辺の Riemann 和に現われる各小区間の代表点  $\gamma$  の取り方を工夫してみるということです。

いま、(27) 式の右辺の極限を考えるにあたり、どのような代表点  $\gamma$  の選び方をしたとしても、分割の幅  $|\Delta|$  をどんどん小さくしていきさえすれば、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  は、(27) 式の左辺の積分の値に落ち着いてしまうということに注意します。そこで、代表点

$$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

を、各小区間ごとにバラバラに選んでくるのではなく、各行、各列ごとに  $x$  座標、 $y$  座標の値を指定して、

$$\gamma_{ij} = (\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

というような形の代表点を選んでくるとどのようなことが分かるのかということを考えてみます ( 図 19 を参照 ) 。

すると、このような形の代表点を選んだお陰で、対応する Riemann 和を、最初に  $i$  に関する和を取り、その後で  $j$  に関する和を取るという形に書き直してみると、

$$\begin{aligned} S(\Delta; \gamma) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \right\} \Delta y_j \quad (28) \end{aligned}$$

となり、 $i$  に関する和を取る際に、 $f(x, y)$  の  $y$  成分が  $\eta_j$  という ( $i$  とは無関係な) 共通の値になることが分かります。ここで、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さいと仮定すると、 $\Delta x_i$  達も十分小さいので、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i &\doteq \int_a^b f(x, \eta_j) dx \\ &= \sigma(\eta_j) \quad (29) \end{aligned}$$

というように見積もれることが分かります。さらに、 $\Delta y_j$  達も十分小さいことに注意すると、(28) 式、(29) 式から、

$$\begin{aligned} S(\Delta; \gamma) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \right\} \Delta y_j \\ &\doteq \sum_{j=1}^n \sigma(\eta_j) \Delta y_j \\ &\doteq \int_c^d \sigma(y) dy \quad (30) \end{aligned}$$

と見積もれることが分かります。これらの見積もりは、 $|\Delta| \rightarrow 0$  となるときに「等号」に変わると期待されま

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \int_c^d \sigma(y) dy \quad (31)$$

となると考えられます。したがって、(27) 式と (31) 式から、

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \sigma(y) dy \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

となることがもっともらしいことが分かりました。

以上の準備のもとで、この期待が実際に正しいということをしちゃんと確かめてみることにします。いま、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  に対して、各小区間を、

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

と表わすことにして、3 節と同様に、各小区間  $I_{ij}$  上での関数  $f(x, y)$  の最大値、最小値を、それぞれ、

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \max_{(x,y) \in I_{ij}} f(x, y), \\ m_{ij} &= \min_{(x,y) \in I_{ij}} f(x, y) \end{aligned}$$

と表わすことにします。このとき、勝手な点  $(x, y) \in I_{ij}$  に対して、

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij} \quad (32)$$

となることが分かりますが、(32) 式の各辺を  $x$  に関して、区間  $[x_{i-1}, x_i]$  上で積分してみると、

$$m_{ij} \Delta x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij} \Delta x_i \quad (33)$$

となることが分かります。そこで、さらに、(33) 式の各辺を  $i$  に関して足し合わせると、結局、勝手な点

$y \in [y_{j-1}, y_j]$  に対して,

$$\sum_{i=1}^m m_{ij} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^m M_{ij} \Delta x_i$$

となることが分かります.\*9) すなわち、勝手な点  $y \in [y_{j-1}, y_j]$  に対して,

$$\sum_{i=1}^m m_{ij} \Delta x_i \leq \sigma(y) \leq \sum_{i=1}^m M_{ij} \Delta x_i \quad (34)$$

となることが分かりました。ここで、それぞれの小区間の代表点  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$  を勝手にひとつずつ取ってきて,

$$S^\sigma(\Delta_2; \eta) = \sum_{j=1}^n \sigma(\eta_j) \Delta y_j$$

という関数  $\sigma(y)$  の区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_2$  に対する Riemann 和を考えてみると、(34) 式より,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j &\leq S^\sigma(\Delta_2; \eta) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$s_\Delta \leq S^\sigma(\Delta_2; \eta) \leq S_\Delta \quad (35)$$

となることが分かります。ただし、3 節と同様に,

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \\ s_\Delta &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

と表わしました。3 節で見たように、分割の幅  $|\Delta|$  が小さくなるときに,

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} s_\Delta &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta \\ &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

というように、 $s_\Delta$  も  $S_\Delta$  も共通の極限に収束することが分かりますから、(35) 式と合わせて、 $S^\sigma(\Delta_2; \eta)$  も同じ極限に収束することが分かります。すなわち、 $|\Delta| \rightarrow 0$  のとき、区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_2$  の幅も

\*9) ここで,

$$\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx$$

なることを用いました。

$|\Delta_2| \rightarrow 0$  となることに注意すると、 $\sigma(y)$  という関数に対して,

$$\int_c^d \sigma(y) dy = \lim_{|\Delta_2| \rightarrow 0} S^\sigma(\Delta_2; \eta)$$

という極限が存在して、その値は,

$$\begin{aligned} \int_c^d \sigma(y) dy &= \lim_{|\Delta_2| \rightarrow 0} S^\sigma(\Delta_2; \eta) \\ &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

となることが分かります。以上より、無事、(21) 式が成り立つことを確かめることができました。

## 5. 一般の積分領域の場合について\*

さて、3 節と 4 節では、積分領域が  $[a, b] \times [c, d]$  という有界閉区間の場合を考えましたが、二変数関数  $f(x, y)$  の積分を考える場合には、有界閉区間に限らず積分領域として、 $\mathbb{R}^2$  内のいろいろな領域を考えてみるができます。そこで、この節では、例えば,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

という単位円板や,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

という三角形のように、積分領域  $D$  として適当な閉曲線で囲まれた領域を考えた場合に、前節までの議論がどのように見直されるのかということについて少し考えてみることにします。

そこで、こうした一般的な積分領域を持つ場合の積分の話、前節まで見てきたような積分領域が有界閉区間の場合の積分の話に帰着させて考察してみるために、与えられた  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f(x, y)$  に対して,

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in D \text{ のとき} \\ 0, & x \notin D \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数  $f_D(x, y)$  を補助的に考えてみます。すると、与えられた積分領域  $D$  を含むような有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  を勝手にひとつ取ってくることで、関数  $f(x, y)$  の領域  $D$  上での積分を,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f_D(x, y) dx dy$$

というように、積分領域が有界閉区間の場合に帰着させて考察することができます。ただし、この場合には、もともとの関数  $f(x, y)$  が何度でも微分できるような

滑らかな関数であるとしても、一般には、 $f_D(x, y)$  の方は積分領域  $D$  の境界  $\partial D$  上で微分ができないような関数になりますから、積分の値がきちんと定まるのかということや、Fubini の定理が成り立つのかといったことをきちんと確かめてみるためには、前節までの議論を慎重に見直してみる必要があります。

そこで、 $f(x, y)$  を  $f_D(x, y)$  に取り換えて、4 節までの議論をやり直すということになるのかということや、少し考えてみます。いま、区間  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  が勝手にひとつ与えられたときに、

$$M_{ij} = \max_{(x,y) \in I_{ij}} f_D(x, y),$$

$$m_{ij} = \min_{(x,y) \in I_{ij}} f_D(x, y)$$

という各小区間  $I_{ij}$  における関数  $f_D(x, y)$  の最大値、最小値はきちんと定まることに注意します。したがって、関数  $f_D(x, y)$  に対しても、

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

を考えることができ、分割  $\Delta$  に付随する勝手な Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  に対して、

$$s_\Delta \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_\Delta$$

という不等式が成り立つことが分かります。

3 節で見たように、 $f(x, y)$  が何度でも微分できる滑らかな関数の場合には、 $s_\Delta$  という数と  $S_\Delta$  という数の差を上手く見積もることができるのでした。そこで、そのときの議論を注意深く見直してみると、各小区間  $I_{ij}$  上での最大値  $M_{ij}$  と最小値  $m_{ij}$  の差に対して、

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_{ij} - m_{ij} \\ &\leq L \cdot \{|\Delta x_i| + |\Delta y_j|\} \\ &\leq L \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (36)$$

という形の見積りを得るために、平均値の定理を用いて議論していることに気が付きます。ところが、小区間  $I_{ij}$  が積分領域  $D$  の境界  $\partial D$  と交わるような場合には、一般には、関数  $f_D(x, y)$  が微分できないような点が  $I_{ij}$  内に存在することになりますから、「平均値の定理」を用いることはできません。したがって、このような小区間  $I_{ij}$  に対しては、(36) 式という見積もりはこのままの形では正当化することはできません

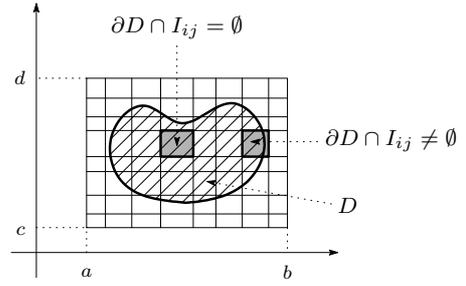


図 20 一般の積分領域  $D$  の場合には、 $I_{ij} \cap \partial D = \emptyset$  となる場合の評価と、 $I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset$  となる場合の評価を別々に考える必要がある。

から、別な形の見積もりを考えないといけないことが分かります (図 20 を参照)。

そこで、 $S_\Delta$  と  $s_\Delta$  の差を見積もるために、

$$\begin{aligned} S_\Delta - s_\Delta &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{I_{ij} \cap \partial D = \emptyset} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\quad + \sum_{I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned} \quad (37)$$

というように二つの項に分けて考えてみることにします。すると、 $I_{ij} \cap \partial D = \emptyset$  となるような小区間  $I_{ij}$  に対しては、「平均値の定理」を用いた議論が適用できますから、(36) 式という見積もりが成り立って、

$$\begin{aligned} &\sum_{I_{ij} \cap \partial D = \emptyset} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq L \cdot |\Delta| \sum_{I_{ij} \cap \partial D = \emptyset} \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq L \cdot |\Delta| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_i \Delta y_j \\ &= L \cdot (b-a)(d-c) \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (38)$$

というように評価できることが分かります。一方、上で注意したように、(37) 式の右辺の第二項については、「平均値の定理」を用いた議論が適用できませんから、別な形で見積もりを考える必要があります。

いま、関数  $f_D(x, y)$  の区間  $[a, b] \times [c, d]$  上での最大値、最小値を、それぞれ、

$$M = \max_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} f_D(x, y),$$

$$m = \min_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} f_D(x, y)$$

と表わすことにします. すると, 勝手な番号  $i, j$  に対して,

$$m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$$

となることが分かりますから,

$$0 \leq M_{ij} - m_{ij} \leq M - m \quad (39)$$

となることが分かります. したがって, (39) 式から, (37) 式の右辺の第二項の大きさが,

$$\begin{aligned} & \sum_{I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ & \leq (M - m) \cdot \sum_{I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset} \Delta x_i \Delta y_j \quad (40) \end{aligned}$$

というように見積もれることが分かります. ここで,  $\Delta x_i \Delta y_j$  とは, 小区間  $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  の面積のことですから,

$$\text{vol}(I_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$$

と表わすことにすると, 結局, (37) 式, (38) 式, (40) 式から,  $S_\Delta$  と  $s_\Delta$  の差が,

$$\begin{aligned} S_\Delta - s_\Delta & \leq L \cdot (b - a)(d - c) \cdot |\Delta| \\ & \quad + (M - m) \cdot \sum_{I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset} \text{vol}(I_{ij}) \quad (41) \end{aligned}$$

というように評価できることが分かります. したがって, 関数  $f_D(x, y)$  に対して, 分割の幅  $|\Delta|$  を小さくしていったときに, Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  が共通の極限に収束するかどうかという問題は,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset} \text{vol}(I_{ij}) = 0 \quad (42)$$

が成り立つかどうかという積分領域  $D$  の境界  $\partial D$  に関する問題に帰着できることが分かりました (図 21 を参照). すなわち, 分割の幅  $|\Delta|$  を小さくしていったときに, 積分領域の境界  $\partial D$  と交わるような小区間の面積の総和がいくらでも小さくできるかどうかということが, 前節までの議論を  $f_D(x, y)$  の場合に拡張して考えることができるかどうかということに関わっているということが分かりました.

一般には, 勝手な積分領域を考えてしまうと, 必ずしも (42) 式が成り立つとは限らないということが知られているのですが, 例えば, 上で挙げた単位円板や三角形のように, 積分領域の境界  $\partial D$  が, 何度でも微分できるような曲線をいくつか繋げてできるような形を

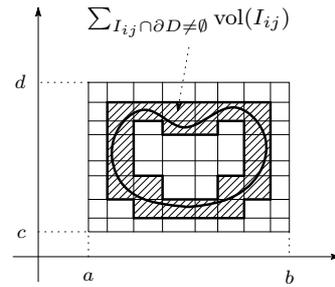


図 21  $I_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset$  となるような小区間の全体積.

している場合には, 実際に (42) 式が成り立つことを確かめることができます.\*10) したがって, このような場合には, 前節までの議論を (41) 式と (42) 式を用いて少し修正して繰り返すことで,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f_D(x, y) dx dy$$

と定めることによって,  $\mathbb{R}^2$  上の何度でも微分できる滑らかな関数に対して積分領域  $D$  上の積分の値がきちんと定まること, また,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy & = \int_c^d \left\{ \int_{I_y} f(x, y) dx \right\} dy \\ & = \int_a^b \left\{ \int_{J_x} f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

という形での「Fubini の定理」が成り立つことを確かめることができます.\*11)

さて, 滑らかな関数  $f(x, y)$  として, 特に,

$$f(x, y) = 1$$

という定数関数を考えてみると,

$$\begin{aligned} M_{ij} & = \begin{cases} 1, & I_{ij} \cap D \neq \emptyset \text{ のとき.} \\ 0, & I_{ij} \cap D = \emptyset \text{ のとき.} \end{cases} \\ m_{ij} & = \begin{cases} 0, & I_{ij} \cap D^c \neq \emptyset \text{ のとき.} \\ 1, & I_{ij} \cap D^c = \emptyset \text{ のとき.} \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かります.\*12) ただし, 区間  $[a, b] \times [c, d]$  における領域  $D$  の補集合を,

\*10) 興味のある方は,  $D$  が単位円板や三角形の場合に, (42) 式が成り立つことを確かめてみて下さい.

\*11) 興味のある方は, (41) 式と (42) 式を用いて, 前節までの議論をやり直してみて下さい.

\*12) 皆さん, 確かめてみて下さい.

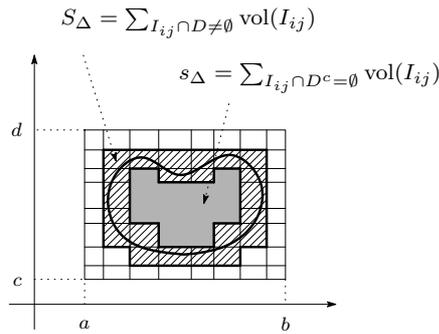


図 22  $f(x, y) = 1$  という定数関数のとき,  $S_\Delta, s_\Delta$  は図のような面積で与えられる.

$$D^c = \{(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \mid (x, y) \notin D\}$$

と表わしました.\*13) したがって, この場合,  $S_\Delta$  と  $s_\Delta$  は,

$$S_\Delta = \sum_{I_{ij} \cap D \neq \emptyset} \text{vol}(I_{ij}), \quad s_\Delta = \sum_{I_{ij} \cap D^c = \emptyset} \text{vol}(I_{ij}) \quad (43)$$

という式によって与えられることがわかります (図 22 も参照). よって, (43) 式から,

$$0 \leq S_\Delta - s_\Delta = \sum_{I_{ij} \cap D \neq \emptyset} \text{vol}(I_{ij}) \quad (44)$$

となることがわかります. 定数関数  $f(x, y) = 1$  の領域  $D$  上での積分の値は, 直観的には,

$$\iint_D 1 dx dy = \text{vol}(D)$$

というように積分領域  $D$  の面積を与えると考えられますが, (42) 式と (44) 式を見比べてみると, (42) 式の条件は, ちょうど, 積分領域  $D$  の面積  $\text{vol}(D)$  がきちんと定まるという条件であることがわかります. その意味で,  $\mathbb{R}^2$  内の領域  $D$  が (42) 式の条件を満たすとき,  $D$  を面積確定の領域と呼んだりします. この言葉を用いると, この節で見てきたことは, 滑らかな関数  $f(x, y)$  は,  $\mathbb{R}^2$  内の勝手な面積確定の領域  $D$  上で積分の値がきちんと定まるということになります.\*14)

\*13) 補集合のことを, 英語で「complement」と言います.

\*14) 3 節の終わりでも注意しましたが, (38) 式の代わりに, 一樣連続性という性質を用いると,  $f(x, y)$  が連続関数のときにも,  $\mathbb{R}^2$  内の勝手な面積確定の領域  $D$  上で関数  $f(x, y)$  の積分の値がきちんと定まることや Fubini の定理が成り立つことなどを確かめることができます. 興味のある方は, 微積分学の適当な教科書を参照してみてください.

## 6. 問 2 の解答

- (1) 与えられた積分を極座標に変数変換してから, 例えば, 最初に  $\theta$  の方向, 次に  $r$  の方向という順番で積分をしてみると,

$$\begin{aligned} J(R) &= \iint_{\{0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^R e^{-r^2} r \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} dr \\ &= 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr \quad (45) \end{aligned}$$

となることがわかります. ここで,  $2r dr = d(r^2)$  となることに注意して,  $t = r^2$  と変数変換をしてみると, (45) 式から,

$$\begin{aligned} J(R) &= \pi \int_0^{R^2} e^{-t} dt \\ &= \pi [-e^{-t}]_0^{R^2} \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

となることがわかります.

- (2) まず,  $I(R)^2$  は,

$$\begin{aligned} I(R)^2 &= \left\{ \int_0^R e^{-x^2} dx \right\} \cdot \left\{ \int_0^R e^{-y^2} dy \right\} \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, R]} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy \quad (46) \end{aligned}$$

と表わせることに注意します.\*15) いま,

$$D(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

とすると,

$$D(R) \subset [0, R] \times [0, R] \subset D(\sqrt{2}R) \quad (47)$$

となることがわかります (図 23 を参照). また, 被積分関数  $e^{-(x^2 + y^2)}$  は, 勝手な点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して,

$$0 \leq e^{-(x^2 + y^2)}$$

となるので, (47) 式より,

\*15) 定積分を考える上では, どのような文字を用いて積分変数を表わすのには関係ありませんから,  $I(R)^2$  を (46) 式のように重積分の形に書き直すために, 一方の  $I(R)$  の積分変数として  $x$  という文字を, もう一方の  $I(R)$  の積分変数として  $y$  という文字を用いることにしました.

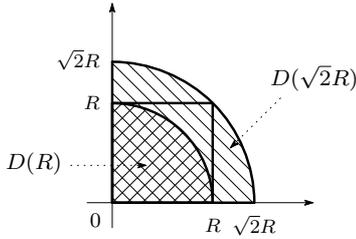


図 23  $D(R) \subset [0, R] \times [0, R] \subset D(\sqrt{2}R)$  となる.

$$\begin{aligned} & \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ & \leq \iint_{[0,R] \times [0,R]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ & \leq \iint_{D(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (48) \end{aligned}$$

となることが分かります. このとき,

$$\begin{aligned} & \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ & = \frac{1}{4} \iint_{\{0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ & = \frac{1}{4} J(R) \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから, (48) 式と合わせて,

$$\frac{1}{4} J(R) \leq I(R)^2 \leq \frac{1}{4} J(\sqrt{2}R)$$

となることが分かります.

(3) (1), (2) の結果から,

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq I(R)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}) \quad (49)$$

となることが分かります. よって,  $I(R) \geq 0$  であることに注意すると, (49) 式から,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-R^2}} \leq I(R) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2R^2}} \quad (50)$$

となることが分かります. そこで, (50) 式の各辺で  $R \rightarrow \infty$  としてみると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx & = \lim_{R \rightarrow \infty} I(R) \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

となることが分かります.

## 7. 変数変換の公式について

一変数関数の積分に対して, 被積分関数の積分変数を適当に変数変換することで, より求めやすい形の積分に帰着できることがあるということは, 置換積分という名のもとで皆さん良くご存じのことではないかと思えます. 同様に, 多変数関数の場合にも, 被積分関数の積分変数を変数変換してみることで, より求めやすい形の積分に帰着できることがあります. 例えば, 問 2 では,

$$J(R) = \iint_{\{0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

という積分を考えましたが, この積分を問 1 のところで述べたような累次積分によって求めようとしても, このままの形では求めることができません. ところが, 問 2 で見たように, 積分変数を極座標に変数変換してみると, より求めやすい形の積分に帰着することが分かり, 実際に積分の値を求めることができたのでした.

そこで, この節では, 二変数関数の積分に対して, 積分変数の変数変換を行なったときに, どのような式が成り立ちそうなのかということについて少し考えてみることにします.

そのために, まず, 問 1 のところで見たような Riemann 和にもとづいた二変数関数  $f(x, y)$  に対する積分の定義について少し反省してみることにします. そこで, そのときの議論を見返してみると, まず,  $\mathbb{R}^2$  内の有界閉区間  $[a, b] \times [c, d]$  に対して,

$$\begin{aligned} a & = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c & = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{aligned}$$

となるような実数  $x_i \in [a, b]$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ), 及び,  $y_j \in [c, d]$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) を勝手にひと組ずつ選ぶことによって,

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

というように区間  $[a, b] \times [c, d]$  を小区間に分割することを考えました. このとき, さらに, それぞれの小区間から代表点

$$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

を選ぶことによって,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

という式によって定まる Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を考えて、

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

というように、分割の幅  $|\Delta|$  を小さくしていったときの Riemann 和の極限として、関数  $f(x, y)$  の区間  $[a, b] \times [c, d]$  上での積分の値を定めたのでした。

そこで、このように Riemann 和の極限として積分の値を理解しようという Riemann 積分の考え方をよくよく反省してみると、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  を考えるのに、

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

という  $xy$  座標から定まるような分割を考えたということが本質的なことなのではなく、積分区間である  $[a, b] \times [c, d]$  を、

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

というように小さな領域

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

達の和に分けて、それぞれの小領域の代表点

$$\gamma_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij}$$

を選ぶことで、

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij}) \quad (51)$$

という形の和を考えたということの方が本質的なことであることが分かります。<sup>\*16)</sup> したがって、例えば、極座標にもとづく分割のように、 $xy$  座標とは異なる座標系にもとづく積分領域の分割を行なって (51) 式のような形の Riemann 和を考えたとしても、分割をどんどん細かくしていったときには、やはりそれらの Riemann 和も、問 1 のところで定めたような積分の

値に落ち着くはずであることが分かります。<sup>\*17)</sup>

そこで、話を具体的にするために、 $0 < R \in \mathbb{R}$  に対して、

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

という半径  $R$  の円板を考えて、

$$\iint_{D_R} f(x, y) dx dy$$

という積分の値を、極座標から定まるような分割に対する (51) 式という形の Riemann 和の極限であると考えたときに、どのような表示が得られることになるのかということを考えてみることにします。

いま、

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

によって平面  $\mathbb{R}^2$  上の極座標  $(r, \theta)$  を定めることにします。このとき、

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{m-1} < r_m = R$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = 2\pi$$

によって定まる極座標で見たときの区間  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  の分割  $\Delta$  を考えると、それに応じて、積分領域  $D_R$  が、

$$D_R = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

$$I_{ij} = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} r \in [r_{i-1}, r_i], \\ \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j] \end{array} \right\}$$

というように、扇形の小領域  $I_{ij}$  の和に分割されることとなります (図 24 を参照)。そこで、各小領域  $I_{ij}$  の代表点を、 $(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \in [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$  を勝手にひとつずつ選んでくることによって、

$$\gamma_{ij} = (\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \in I_{ij}$$

と表わすことにすると、(51) 式により定まる Riemann 和は、

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij})$$

\*17) 問 1 のところで見たように、直観的には、 $\iint_D f(x, y) dx dy$  という積分の値は、積分領域  $D$  上で  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面で囲まれた部分の (符号付きの) 体積を表わしています。このような体積は、どのような座標系を用いて  $\mathbb{R}^2$  上の点を表わすのかということには無関係にきちんと定まっているはずだろうということです。

\*16) 以下での議論の本質が見やすいように、各小領域  $I_{ij}$  の面積  $\Delta x_i \Delta y_j$  を  $\text{vol}(I_{ij})$  と表わすことにしました。

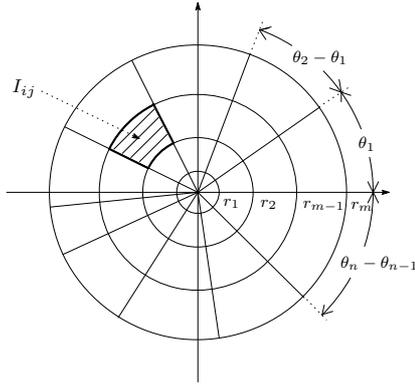


図 24 極座標を用いて、積分領域  $D(R)$  を小領域  $I_{ij}$  達に分割する。

と表わすことができます。ここで、分割の幅  $|\Delta|$  をどんどん小さくしていくと、それに応じて各小領域  $I_{ij}$  もどんどん小さくなりますから、上で注意したことから、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \iint_{D_R} f(x, y) dx dy \quad (52)$$

となると考えられます。<sup>\*18)</sup>

そこで、次に、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さいと仮定したときに、上の Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  の値を直接見積もるとどうということになるのかということを考えてみます。すると、このとき各小領域  $I_{ij}$  は十分小さな扇形となりますから、

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}, \quad \Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$$

として、

$$\text{vol}(I_{ij}) \doteq r_{i-1} \Delta r_i \Delta \theta_j \quad (53)$$

と見積もれることが分かります (図 25 を参照)。また、 $\rho_{ij} \in [r_{i-1}, r_i]$  であり、 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$  は十分小さいと仮定していましたが、さらに、

$$r_{i-1} \doteq \rho_{ij} \quad (54)$$

と置き換えることにすると、結局、(53) 式、(54) 式から、Riemann 和  $S(\Delta; \gamma)$  の大きさが、

$$S(\Delta; \gamma)$$

\*18) すなわち、3 節の図 11 のように底面が長方形である「小柱」の体積を考えるのではなく、底面が扇形である「小柱」の体積  $f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \text{vol}(I_{ij})$  を足し上げることによっても、全体積  $\iint_{D_R} f(x, y) dx dy$  を求めることができるはずであるということです。

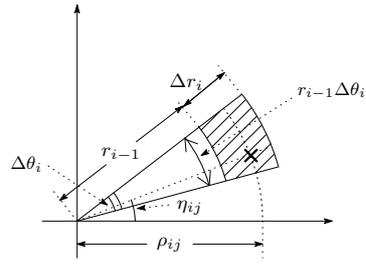


図 25 各小領域  $I_{ij}$  の面積は、ほぼ、 $r_{i-1} \Delta r_i \Delta \theta_j$  であると見積もれる。

$$\doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_{ij} \cos \eta_{ij}, \rho_{ij} \sin \eta_{ij}) \rho_{ij} \Delta r_i \Delta \theta_j \quad (55)$$

と見積もれることが分かります。ここで、(55) 式の右辺は、

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と定めたときに、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \Delta r_i \Delta \theta_j$$

というように表わすことができますから、これは関数  $g(r, \theta)$  に関する Riemann 和に他ならないということに注意します。いま、(55) 式という見積もりは、分割の幅を  $|\Delta| \rightarrow 0$  としたときに「等号」になると考えられますから、(55) 式より、

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(\rho_{ij}, \eta_{ij}) \Delta r_i \Delta \theta_j \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (56) \end{aligned}$$

となると考えられます。したがって、(52) 式と (56) 式から、

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} f(x, y) dx dy \\ = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

という式が成り立ちそうなことが分かりました。

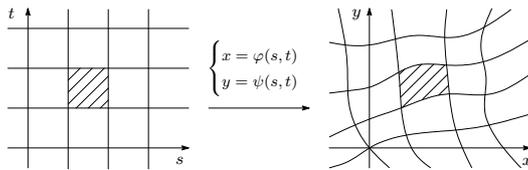


図 26  $(x, y)$  と  $(s, t)$  が一対一に対応しているとする  
と,  $(s, t)$  も  $\mathbb{R}^2$  上に一つの (曲線) 座標系を  
定めていると考えることができる.

そこで, より一般に,  $\mathbb{R}^2$  上の勝手な (曲線) 座標系  
を用いて同様の考察を行なうとどうなるのかということ  
を考えてみます. いま, 何度でも微分できるような  
二つの滑らかな関数  $\varphi(s, t), \psi(s, t)$  を用いて,  
 $\mathbb{R}^2$  上の点  $(x, y)$  が,

$$(x, y) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$$

というようにパラメータ表示されているとします. こ  
うしたパラメータ表示により,

$$(x, y) \longleftrightarrow (s, t)$$

というように,  $(x, y)$  と  $(s, t)$  が一対一に対応してい  
るとすると,  $(s, t)$  も  $\mathbb{R}^2$  上に一つの (曲線) 座標系を  
定めていると考えることができます (図 26 を参照).

そこで, いま,  $(s, t)$  という座標に関する有界閉区間  
 $[a, b] \times [c, d]$  に対応する  $\mathbb{R}^2$  内の

$$D = \{(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, t) \in [a, b] \times [c, d]\}$$

という領域を考えて,

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

という積分に対して上と同様の考察を行なうとどうい  
うことになるのかということを考えてみます. すると,  
前と同様に,

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{m-1} < s_m = b$$

$$c = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d$$

によって定まる  $(s, t)$  という座標に関する区間  $[a, b] \times$   
 $[c, d]$  の分割  $\Delta$  を考えると, それに応じて, 積分領域  $D$   
が,

$$D = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$$

$$I_{ij} = \left\{ (\varphi(s, t), \psi(s, t)) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s \in [s_{i-1}, s_i], \\ t \in [t_{j-1}, t_j] \end{array} \right. \right\}$$

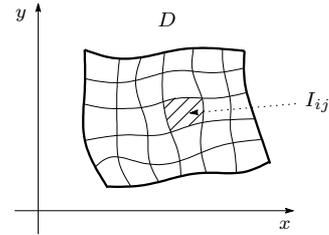


図 27  $(s, t)$  というパラメータを用いて, 積分領域  $D$   
を小領域  $I_{ij}$  達に分割することができる.

というように, 小領域  $I_{ij}$  の和に分割されることにな  
ります (図 27 を参照). そこで, 前と同様に, 各小領域  
 $I_{ij}$  の代表点を,  $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  を指  
定することによって,

$$\gamma_{ij} = (\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \in I_{ij}$$

と表わすことにすると, (51) 式により定まる Riemann  
和は,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \text{vol}(I_{ij})$$

(57)

と表わすことができます. このとき, 前と同様に, 分割  
の幅  $|\Delta|$  をどんどん小さくしていくと, それに応じて  
各小領域  $I_{ij}$  もどんどん小さくなりますから,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

(58)

となると考えられます.\*19)

そこで, 次に, 分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さいと仮定し  
て, (57) 式という Riemann 和の値を直接見積もるこ  
とを考えてみます. そのためには, 各小領域  $I_{ij}$  の面  
積  $\text{vol}(I_{ij})$  の大きさを見積もる必要があります. い  
ま, 小領域  $I_{ij}$  は,  $(s, t)$  という座標を用いて表わすと  
 $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  という長方形に対応していま  
した. よって, この長方形の頂点に対応する  $\mathbb{R}^2$  上の点  
を, それぞれ,

$$A = (\varphi(s_{i-1}, t_{j-1}), \psi(s_{i-1}, t_{j-1})),$$

$$B = (\varphi(s_i, t_{j-1}), \psi(s_i, t_{j-1})),$$

\*19) 前と同様に, 今度は, 一般には, 歪んだ底面  $I_{ij}$  を持つ「小  
柱」の体積  $f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \text{vol}(I_{ij})$  を足し上げ  
ることにより, 全体積  $\iint_D f(x, y) dx dy$  を求めようというわけ  
です.

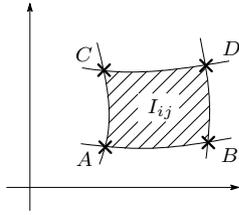


図 28 各小領域  $I_{ij}$  は、 $A, B, C, D$  を頂点とする「長方形もどき」の形をしていると考えられる。

$$C = (\varphi(s_{i-1}, t_j), \psi(s_{i-1}, t_j)),$$

$$D = (\varphi(s_i, t_j), \psi(s_i, t_j))$$

と表わすことにすると、小領域  $I_{ij}$  は  $A, B, C, D$  を頂点とする「長方形もどき」の形をしていると考えられます (図 28 を参照)。また、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さいと仮定すると、

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}$$

という各小領域における  $s, t$  の「微小変位」も十分小さいと考えられますから、点  $B$  の  $x$  座標と  $y$  座標の値を、Taylor 展開を用いて、それぞれ、

$$\begin{aligned} \varphi(s_i, t_{j-1}) &= \varphi(s_{i-1} + \Delta s_i, t_{j-1}) \\ &\doteq \varphi(s_{i-1}, t_{j-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \\ \psi(s_i, t_{j-1}) &= \psi(s_{i-1} + \Delta s_i, t_{j-1}) \\ &\doteq \psi(s_{i-1}, t_{j-1}) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \end{aligned}$$

というように見積もることができます。したがって、点  $A$  から点  $B$  への変位ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  は、

$$\overrightarrow{AB} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta s_i \end{pmatrix} \quad (59)$$

というように見積もれることが分かります。<sup>\*20)</sup> 同様に考えると、点  $A$  から点  $C$  への変位ベクトル  $\overrightarrow{AC}$  も、

$$\overrightarrow{AC} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta t_j \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s_{i-1}, t_{j-1}) \cdot \Delta t_j \end{pmatrix} \quad (60)$$

というように見積もれることが分かります。いま、分割の幅  $|\Delta|$  が十分小さいと仮定すると、各小領域  $I_{ij}$  は  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  を二辺とする平行四辺形にほぼ等しいと考えられますから、その面積  $\text{vol}(I_{ij})$  も  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  を二辺とする平行四辺形の面積にほぼ等しいと考えら

\*20) 線型代数学の記法と合わせるために、 $\mathbb{R}^2$  内のベクトルを縦ベクトルで表わすことにしました。

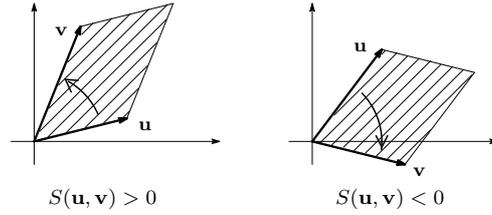


図 29  $u, v \in \mathbb{R}^2$  に対して、 $u, v$  を二辺とする平行四辺形の符号付きの面積  $S(u, v)$  を考えることができる。

れます。

さて、一般に、 $\mathbb{R}^2$  内の二つのベクトル

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

に対して、 $u, v$  を二辺とする平行四辺形の符号付きの面積  $S(u, v)$  は、

$$S(u, v) = \det \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$$

というように行列式を用いて表わすことができるということは、皆さんも線型代数学の中で学ばれたのではないかと思います (図 29 を参照)。すなわち、 $S(u, v)$  を、 $\mathbb{R}^2$  内の二つのベクトル  $u, v \in \mathbb{R}^2$  に対して、 $u, v$  を二辺とする平行四辺形の符号付きの面積を対応させる関数であると考え、関数  $S(u, v)$  は、

(イ) 多重線型性：勝手なベクトル  $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^2$  と、勝手な実数  $c \in \mathbb{R}$  に対して、次が成り立つ。

$$\begin{cases} S(u + u', v) = S(u, v) + S(u', v) \\ S(c \cdot u, v) = c \cdot S(u, v) \\ S(u, v + v') = S(u, v) + S(u, v') \\ S(u, c \cdot v) = c \cdot S(u, v) \end{cases}$$

(ロ) 歪対称性：勝手なベクトル  $u, v \in \mathbb{R}^2$  に対して、次が成り立つ。

$$S(u, v) = -S(v, u)$$

(ハ) 規格化条件： $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対して、次が成り立つ。

$$S(e_1, e_2) = 1$$

という三つの性質を持つことを確かめることができま

すが、\*21) 逆に、(イ)、(ロ)、(ハ) という三つの性質を持つ関数として行列式  $\det \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$  を特徴付けることができるわけです。したがって、(59) 式、(60) 式から、各小領域  $I_{ij}$  の面積  $\text{vol}(I_{ij})$  は、第 6 回の問 3 のところでも登場した Jacobi 行列

$$J(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|J(s, t)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \end{vmatrix}$$

を用いて、

$$\text{vol}(I_{ij}) \doteq |J(s_{i-1}, t_{j-1})| \cdot \Delta s_i \Delta t_j \quad (61)$$

というように見積もれることが分かります。\*22) また、前と同様に、 $\xi_{ij} \in [s_{i-1}, s_i]$ 、 $\eta_{ij} \in [t_{j-1}, t_j]$  であり、 $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$  も  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$  も十分小さいと仮定していましたから、さらに、

$$s_{i-1} \doteq \xi_{ij}, \quad t_{j-1} \doteq \eta_{ij} \quad (62)$$

と置き換えることにすると、結局、(61) 式、(62) 式から、(57) 式という Riemann 和は、

$$S(\Delta; \gamma) \doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\varphi(\xi_{ij}, \eta_{ij}), \psi(\xi_{ij}, \eta_{ij})) \cdot |J(\xi_{ij}, \eta_{ij})| \cdot \Delta s_i \Delta t_j \quad (63)$$

と見積もれることが分かりました。よって、(63) 式から、

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \\ = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \cdot |J(s, t)| \, ds dt \end{aligned}$$

となると考えられますが、(58) 式と合わせて考えると、

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy \\ = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \cdot |J(s, t)| \, ds dt \end{aligned}$$

という式が成り立ちそうなことが分かりました。

さて、問 1 のところで見たように、より一般の積分領域を持つ場合の積分も、積分領域が区間の場合の積分に帰着して考えることができます。そこで、そのと

\*21) 皆さん、確かめてみて下さい。

\*22) 皆さん、確かめてみて下さい。

きと同様に考えると、より一般に、

$$(x, y) \longleftrightarrow (s, t)$$

という対応のもとで、それぞれの座標平面上の領域が、

$$D \longleftrightarrow D'$$

と対応しているとして、

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy \\ = \iint_{D'} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \cdot |J(s, t)| \, ds dt \quad (64) \end{aligned}$$

という式が成り立ちそうなことが分かります。この(64) 式を、二変数関数の積分に対する変数変換の公式と呼んだりします。

皆さんにとって大切なことは、このような公式が成り立つということをしっかりと納得して、例えば上で説明してきたような直観的な議論によって、いつでも自分で公式を再構成できるようになるということです。その上で、取りあえず、このような公式が成り立つことをきちんと確かめることができるということは認めてしまっ、実際に具体的な積分の計算にこの公式を適用してみることで、多変数関数の積分の場合の「置換積分」に対する感覚を養うことを、まず第一に心がけたら良いのではないかと思います。

## 8. 問 3 の解答

- (1) いきなり  $n$  次元の場合を考えようとして、何が何だか分からなくなり頭が混乱してしまってもいけませんから、様子を探ってみるために、まず、 $n = 2$  の場合について考えてみることにします。\*23) すると、問 2 で見たように、

$$\begin{aligned} I^2 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy \right\} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \quad (65) \end{aligned}$$

というように、 $I^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の積分の値として表わせることが分かります。\*24) すなわち、

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

\*23) もちろん、いきなり  $n$  次元の場合を考えることができる方は、そうしていただいて構いません。

\*24) 厳密なことを言えば、 $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx$  は広義積分なので、問 2 で考えた  $I(R)$ 、 $J(R)$  のような有界な閉領域上の積分を補助的に考えて、議論を正当化する必要があります。興味のある方は、問 2 で行なった議論をヒントにして、以下の解答で与える議論を正当化してみてください。

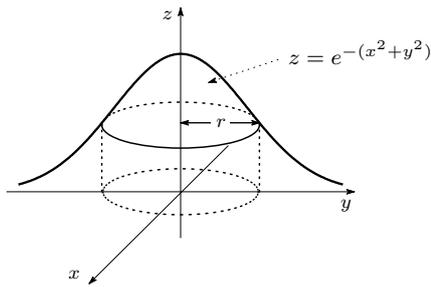


図 30 関数  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  の値は、点  $(x, y)$  の原点からの距離  $r$  にしか依らない。

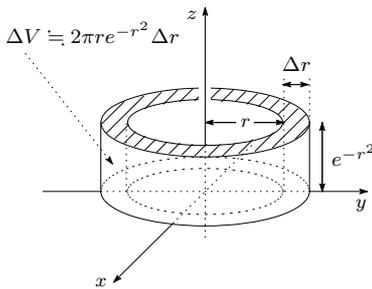


図 31 煙突状の小体積  $\Delta V$  は  $\Delta V \doteq 2\pi r e^{-r^2} \Delta r$  と見積もることができる。

と定めると、(65) 式から、

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \quad (66)$$

と表わすことができますから、 $I^2$  は  $z = f(x, y)$  のグラフと  $xy$  平面に囲まれた部分の体積を表わしていることが分かります。そこで、いま、関数  $f(x, y)$  の値は、

$$f(x, y) = e^{-r^2}$$

というように、点  $(x, y)$  の原点からの距離  $r$  にしか依らないことに注意して (図 30 を参照)、図 31 のような煙突状の小体積を考えて、これらの小体積を足し上げることによって、 $I^2$  という全体積を求めることを考えてみます。すると、図 31 から、この煙突状の小体積  $\Delta V$  は、

$$\begin{aligned} \Delta V &\doteq 2\pi r e^{-r^2} \cdot \Delta r \\ &= \text{vol}(S^1) \cdot r e^{-r^2} \cdot \Delta r \end{aligned} \quad (67)$$

と見積もることができることが分かります。<sup>\*25)</sup> いま、 $\Delta r \rightarrow 0$  とすると、これら小体積の和は全体積  $I^2$  に近づくと考えられますから、(67) 式から、

$$I^2 = \text{vol}(S^1) \cdot \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \quad (68)$$

と表わせることが分かります。<sup>\*26)</sup>

そこで、次に、 $n = 2$  の場合の議論を参考にして、 $n$  が一般の場合を考えてみることにします。すると、問題文中で注意したように、

$$\begin{aligned} I^n &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \right\} \cdots \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n \right\} \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (69)$$

というように、 $I^n$  を  $\mathbb{R}^n$  上の積分の値として表わすことが分かります。すなわち、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$$

と定めると、(69) 式から、

$$I^n = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (70)$$

と表わすことができますから、 $I^n$  は、 $\mathbb{R}^{n+1}$  の中で、 $z = f(x_1, \cdots, x_n)$  のグラフと  $x_1 \cdots x_n$  “平面” に囲まれた部分の  $(n+1)$  次元の“体積”を表わしていることが分かります。<sup>\*27)</sup> そこで、 $n = 2$  のときと同様に、関数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  の値は、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = e^{-r^2}$$

というように、点  $(x_1, \cdots, x_n)$  の原点からの距離  $r$  にしか依らないことに注意して、図 31 と同様な“煙突”状の小“体積”を考えて、これら小“体積”を足し上げることによって、 $I^n$  という全“体積”を求めることを考えてみます。すると、今の場合、“煙突”状の小領域の“底面”は、図 32 のような状況であることが分かります。ただし、 $0 < r \in \mathbb{R}$  に対して、半径  $r$  の  $(n-1)$  次元球面を、

\*25) ここで、 $n$  が一般の場合の記号と合わせるために、単位円  $S^1$  の弧の長さを  $\text{vol}(S^1) = 2\pi$  と表わすことにしました。

\*26) 問 2 では、さらに、(68) 式の右辺の積分の値を具体的に計算し、 $\text{vol}(S^1) = 2\pi$  となることを用いて、 $I = \sqrt{\pi}$  となることを確かめたのでした。

\*27)  $n \geq 3$  のときには、図を正確に描くことはできませんが、皆さんも、図 30、図 31 において  $xy$  平面が  $x_1 \cdots x_n$  “平面”に置き換わった状況を想像してみてください。

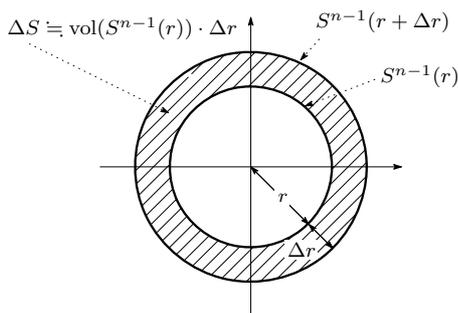


図 32 “煙突” 状の小領域の“底面”の“面積”は、 $\Delta S \equiv \text{vol}(S^{n-1}(r)) \cdot \Delta r$  と見積もることができる。

$$S^{n-1}(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}$$

と表わすことにしました。よって、図 32 から、この“底面”の“面積”  $\Delta S$  は、

$$\Delta S \equiv \text{vol}(S^{n-1}(r)) \cdot \Delta r \quad (71)$$

と見積もれることが分かります。さらに、

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{n-1}(r)) &= \text{vol}(S^{n-1}(1)) \cdot r^{n-1} \\ &= \text{vol}(S^{n-1}) \cdot r^{n-1} \end{aligned} \quad (72)$$

となることに注意すると、(71) 式、(72) 式から、

$$\Delta S \equiv \text{vol}(S^{n-1}) \cdot r^{n-1} \cdot \Delta r \quad (73)$$

と見積もれることが分かります。したがって、(73) 式から、図 31 のような“煙突”状の小領域の小“体積”  $\Delta V$  は、

$$\begin{aligned} \Delta V &\equiv e^{-r^2} \cdot \Delta S \\ &= \text{vol}(S^{n-1}) \cdot r^{n-1} e^{-r^2} \cdot \Delta r \end{aligned} \quad (74)$$

と見積もることができることが分かります。いま、 $\Delta r \rightarrow 0$  とすると、これら小“体積”の和は全“体積”  $I^n$  に近づくと考えられますから、(74) 式から、

$$I^n = \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \quad (75)$$

と表わせることが分かります。

(2) いま、

$$re^{-r^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'$$

であると考えて、部分積分をしてみると、 $n \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\infty r^{n-1} \cdot re^{-r^2} dr \\ &= \left[ r^{n-1} \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right) \right]_0^\infty + \frac{n-1}{2} \int_0^\infty r^{n-2} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{n-1}{2} \cdot J_{n-2} \end{aligned}$$

となることが分かります。<sup>\*28)</sup>

(3) (2) の結果から、 $n$  が偶数  $n = 2k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) のときには、

$$\begin{aligned} J_{2k} &= \frac{2k-1}{2} \cdot J_{2k-2} \\ &= \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \cdot J_{2k-4} \\ &= \dots \\ &= \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0 \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2^k} \cdot J_0 \end{aligned}$$

となり、 $n$  が奇数  $n = 2k+1$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のときには、

$$\begin{aligned} J_{2k+1} &= \frac{2k}{2} \cdot J_{2k-1} \\ &= \frac{2k}{2} \cdot \frac{2k-2}{2} \cdot J_{2k-3} \\ &= \dots \\ &= \frac{2k}{2} \cdot \frac{2k-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot J_1 \\ &= k! \cdot J_1 \end{aligned}$$

となることが分かります。すなわち、

$$J_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{2^{n/2}} \cdot J_0, & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot J_1, & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (76)$$

となることが分かります。ここで、

<sup>\*28)</sup> 三番目の等号では、勝手な自然数  $m \in \mathbb{N}$  に対して、 $\lim_{r \rightarrow \infty} r^m e^{-r^2} = 0$  となることを用いました。このことは、例えば、 $e^{r^2}$  の Taylor 展開を考えると、勝手な自然数  $m \in \mathbb{N}$  に対して、

$$e^{r^2} \geq \frac{r^{2m}}{m!}$$

となることから、

$$0 \leq r^m e^{-r^2} = \frac{r^m}{e^{r^2}} \leq \frac{r^m}{\frac{r^{2m}}{m!}} = \frac{m!}{r^m}$$

というように評価できることから分かります。

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

となることから,

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned} \quad (77)$$

となることが分かります. 一方,  $t = r^2$  と変数変換をしてみると,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} [-e^{-t}]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (78)$$

となることが分かります. したがって, (76) 式, (77) 式, (78) 式から,

$$J_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{2^{n/2+1}} \cdot \sqrt{\pi}, & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2}\right)!, & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (79)$$

となることが分かります.

そこで, (1) の結果を考えてみると,

$$I^{n+1} = \text{vol}(S^n) \cdot J_n \quad (80)$$

となることが分かります. 一方,  $I = \sqrt{\pi}$  であることから,

$$I^{n+1} = \pi^{(n+1)/2} \quad (81)$$

となることが分かります. よって, (79) 式, (80) 式, (81) 式から,

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^n) &= \frac{\pi^{(n+1)/2}}{J_n} \\ &= \begin{cases} \frac{2 \cdot (2\pi)^{n/2}}{(n-1)(n-3)\cdots 1}, & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}, & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かります.

### 9. 問3を見直すと

これまでも何度か登場した

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$

という形の積分は, Gauss 積分と呼ばれていて, 分野を問わず様々な場面で登場してきます. したがって, 皆さんが将来どのような分野に進まれたとしても, 何らかの形で Gauss 積分について学ばれる機会があるのではないかと思います. そこで, 問2では, Gauss 積分の紹介も兼ねて, 皆さんに Gauss 積分の値を求めてもらったのですが, この計算結果を用いると, 例えば,  $n$  次元球面  $S^n$  の表面積  $\text{vol}(S^n)$  などを求めることもできますから, そうした計算を皆さんに紹介しようと思ひ, 問3を出題してみました.

皆さんの中には, 「一次元の円や二次元の球面なら分かるけど, 三次元球面とか九十九次元球面とかって何???'と訝しく思われる方もいるかもしれません. こうした高次元の図形は, 直接「目で見える」ことができないわけですが, 数式の力を借りると,  $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  として,

$$S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

というように, 誰にとっても誤解を生じる可能性のない形できちんと定式化することができますから, 数学者は, こうした空間も「まっとうな考察の対象」であると考えているわけです. こうして誰にとっても誤解を生じる可能性のない形で定式化して調べてみると, 例えば,

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^3) &= 2\pi^2, \quad \text{vol}(S^4) = \frac{8\pi^2}{3}, \quad \text{vol}(S^5) = \pi^3, \\ \text{vol}(S^6) &= \frac{16\pi^3}{15}, \dots \end{aligned}$$

というように, きちんとした情報が得られるわけです. そのようなわけで, 数学者はこうした高次元の空間も「まっとうに存在している」と考えていて, 数式の力を借りることで, 一生懸命「見えない空間」の情報を引き出そうと努力を重ねています.

さて, 問3の解答では, 部分積分を行なうことによって  $J_n$  の値を求めましたが, パラメータに関する微分を用いて, 次のように  $J_n$  の値を求めることもできます. いま,  $0 < a \in \mathbb{R}$  というパラメータを用意して,

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr$$

において,  $r \rightsquigarrow \sqrt{ar}$  と変数変換してみると,

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty e^{-ar^2} \sqrt{a} dr \\ &= \sqrt{a} \cdot \int_0^\infty e^{-ar^2} dr \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\int_0^\infty e^{-ar^2} dr = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot J_0 \quad (82)$$

となることが分かります. そこで, (82) 式の両辺を  $a$  に関して  $k$  回微分してみると,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (-r^2)^k e^{-ar^2} dr \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right) \cdot a^{-\frac{2k+1}{2}} \cdot J_0 \end{aligned} \quad (83)$$

となることが分かります. よって, (83) 式の両辺で  $a = 1$  とすることで,

$$\begin{aligned} J_{2k} &= \int_0^\infty r^{2k} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \cdot J_0 \end{aligned}$$

となることが分かります. 全く同様に,

$$J_1 = \int_0^\infty r e^{-r^2} dr$$

において,  $r \rightsquigarrow \sqrt{ar}$  と変数変換してみると,

$$\int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = \frac{1}{a} \cdot J_1 \quad (84)$$

となることが分かります. そこで, (84) 式の両辺を  $a$  に関して  $k$  回微分してから,  $a = 1$  としてみると,

$$\begin{aligned} J_{2k+1} &= \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^2} dr \\ &= k! \cdot J_1 \end{aligned}$$

となることが分かります.\*29)

さて,

$$J_n = \int_0^\infty r^n e^{-r^2} dr$$

において,  $t = r^2$  と変数変換をしてみると,

$$\begin{aligned} dt &= 2r dr \\ &= 2\sqrt{t} dr \end{aligned}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} dt \end{aligned}$$

と表わされることが分かります. これを, 第 12 回の問 2 のところで考えた  $\Gamma$  関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

と比べてみると,  $J_n$  は  $\Gamma$  関数を用いて,

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (85)$$

と表わされることが分かります. 第 12 回の問 2 のところで見たように,  $\Gamma$  関数は,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (86)$$

という関数等式を満たしますが, このことを用いても,

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot J_0$$

$$J_{2k+1} = k! \cdot J_1$$

となることを確かめることができます.\*30) 問 3 の解答で見たように,

$$\text{vol}(S^n) = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{J_n} \quad (87)$$

と表わすことができましたから, (85) 式と (87) 式から,  $\text{vol}(S^n)$  は  $\Gamma$  関数を用いて,

$$\text{vol}(S^n) = \frac{2 \cdot \pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (88)$$

と表わされることが分かります. したがって, 問 3 の結果を  $\Gamma$  関数の言葉に直すと,

$$\Gamma(k+1) = k!$$

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

という値を求めたということになります. これより, 「 $n$  が偶数のときの  $\text{vol}(S^n)$  の表示」と「 $n$  が奇数のときの  $\text{vol}(S^n)$  の表示」との見かけ上の差は,  $\Gamma$  関数の「整数での値」を考えているのか「半整数での値」を考えているのかということに起因していることが分かります.

問 3 では,  $n$  次元球面  $S^n$  の表面積を求めてみましたが,  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  として,

\*29) 皆さん, 確かめて下さい.

\*30) 皆さん, 確かめて下さい.

$$D^n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

という式によって定まる  $n$  次元球体  $D^n$  を考えると、  
問 3 の (1) と同様にして、

$$\begin{aligned} \text{vol}(D^n) &= \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \int_0^1 r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{n} \cdot \text{vol}(S^{n-1}) \end{aligned} \quad (89)$$

となること分かります。<sup>\*31)</sup> したがって、(86) 式、(88) 式、(89) 式から、 $\text{vol}(D^n)$  は  $\Gamma$  関数を用いて、

$$\begin{aligned} \text{vol}(D^n) &= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \end{aligned}$$

と表わされることが分かります。

---

\*31) 興味のある方は、 $I^n$  の代わりに、

$$\text{vol}(D^n) = \int \cdots \int_{D^n} 1 dx_1 \cdots dx_n$$

という積分の値を考えて、問 3 の (1) と同様の読み換えを行なってみて下さい。この場合、図 31 のような“煙突”状の小領域の高さは常に 1 になっています。