数学 IB 演習 (第 13 回) のヒント

問 1. 与えられた積分を累次積分により, 最初に x の方向, 次に y の方向という順番で, あるいは, 最初に y の方向, 次に x の方向という順番で積分してみよ.

問 2.

(1) 極座標に変数変換してみよ.

(2) $I(R)^2 = \left\{\int_0^R e^{-x^2}dx\right\} \cdot \left\{\int_0^R e^{-y^2}dy\right\} = \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ と表わして, それぞれの積分領域を比べてみよ.

(3) (1) と (2) の結果を合わせて考えてみよ.

問 3.

(1) いきなり n 次元の場合を考えるより, まず, $n=2$ の場合を, 次のように考えてみよ. まず, 問 2 と同様に,

$$I^2 = \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right\} \cdot \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right\} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

と表わせるので, I^2 は $z = e^{-(x^2+y^2)}$ のグラフと xy-平面に囲まれた部分の体積を表わしていると解釈できることに注意する (図 1 を参照).

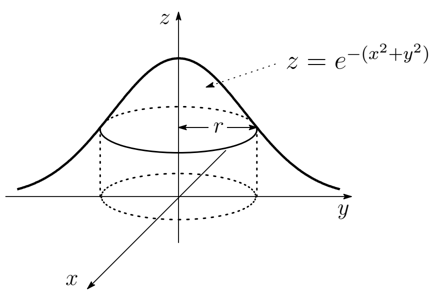

図 1

そこで, 図 2 のような煙突状の小体積 ΔV を考えて, これらの小体積を足し上げることによって, I^2 という全体積を求めることを試みることで,

$$I^2 = \mathrm{vol}(S^1) \cdot \int_0^\infty re^{-r^2}dr$$

という式が成り立つことを確かめよ.

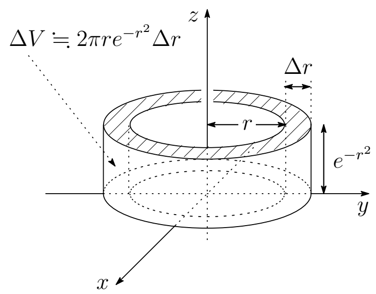

図 2

さらに, n が一般のときに,

$$I^n = \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}dx_1\right\}\cdot\cdots\cdot\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}dx_n\right\} = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n$$

と表わせることに注意して, 図 1 や図 2 の xy-平面を $x_1\cdots x_n$-“平面” に置き換えて, $n=2$ の場合と同様の考察を行なってみよ. この場合, 図 2 の “煙突” 状の小領域の “底面” は, 図 3 のような状況になることに注意せよ.

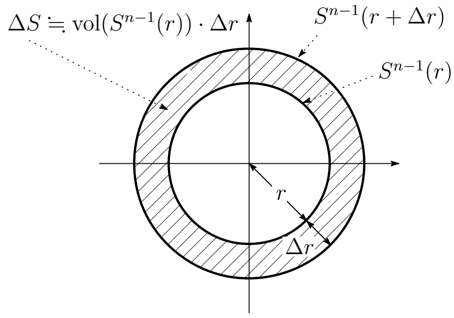

図 3

ただし, $0<r\in\mathbb{R}$ に対して, 半径 r の $(n-1)$ 次元球面を,

$$S^{n-1}(r) = \{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n |\, x_1^2+\cdots+x_n^2 = r^2\}$$

と表わした. また, $\mathrm{vol}(S^{n-1}(r)) = \mathrm{vol}(S^{n-1})\cdot r^{n-1}$ となることにも注意せよ.

(2) $re^{-r^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'$ であると考えて, 部分積分を施してみよ.

(3) (2) の漸化式を解くことにより, J_n を求めよ. さらに, (1) の結果から, $I^{n+1} = \mathrm{vol}(S^n)\cdot J_n$ となることと, $I=\sqrt{\pi}$ となることから, $\mathrm{vol}(S^n)$ を求めよ.