

数学 IB 演習 (第 13 回)

問 1. 以下の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x+y)^2 dx dy \qquad (2) \iint_{[0,\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]} x \sin(x+y) dx dy$$

$$(3) \iint_{\{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}} (1-x-y) dx dy$$

問 2.

(1) $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$J(R) = \iint_{\{0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

を求めよ.

(2) $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$I(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

とするとき,

$$\frac{1}{4}J(R) \leq I(R)^2 \leq \frac{1}{4}J(\sqrt{2}R)$$

となることを示せ.

(3) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$ を求めよ.

問 3. $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

を考える. このとき,

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

となることを認めて, 次のような方法で n 次元球面 S^n の “表面積” $\text{vol}(S^n)$ を求めよ (もし, n 次元球面というのが考えづらければ, $n = 2$ として $\text{vol}(S^2)$ だけを考察してもよい.).

♣ 裏に続きがあります.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} I^n &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 \right\} \cdots \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n \right\} \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

を考える. このとき, 積分領域である $\mathbb{R}^n$ を半径一定の薄い球殻で分割して, 上の積分を考察することにより,

$$I^n = \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr$$

と表わされることを示せ.

(2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$J_n = \int_0^\infty r^n e^{-r^2} dr$$

とする. このとき,

$$J_n = \frac{n-1}{2} \cdot J_{n-2}, \quad (n \geq 2)$$

となることを示せ.

(3) J_n を求めることにより, $\text{vol}(S^n)$ を求めよ.