# 数学 IB 演習 ( 第 12 回 ) の略解

**目次**



## 1. 問 1 の解答

被積分関数を $e^{-ax}\sin bx = \left(\frac{-1}{a}e^{-ax}\right)'\sin bx$ と考えて部分積分をしてみると,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\sin bx\right]_0^\infty + \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx \\
&= \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[*1] そこでさらに,

$$
e^{-ax}\cos bx = \left(\frac{-1}{a}e^{-ax}\right)'\cos bx
$$

と考えて部分積分をしてみると,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{b}{a}\left(\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\cos bx\right]_0^\infty - \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx\right) \\
&= \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a}I\right) \\
&= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}I
\end{aligned}
$$

となることが分かります. これより,

$$
a^2 I = b - b^2 I
$$

となることが分かりますから,

$$
I = \frac{b}{a^2+b^2}
$$

となることが分かります.

*1) 三番目の等号では, $\lim_{x\to\infty} e^{-ax}\sin bx = 0$ となることを用いました. これは, $x>0$ に対して,

$$
0 < \left|e^{-at}\sin bx\right| = e^{-ax}\cdot|\sin bx| \le e^{-ax}
$$

となることから分かります.

## 2. 広義積分とは

第 10 回の問 3 のところで **Riemann 積分**について説明しましたが, そのときに, $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $f(x)$ の積分を定義しようと考えたときに, 例えば, $f(x)$ が $f(x)=1$ という定数関数であったとしても, **積分区間が無限に伸びているような場合**には,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)dx &= \int_0^\infty 1\cdot dx \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

というように**上手く積分の値が定義できないことがある**ということを注意しました ( 図 1 を参照 ). また, 例えば, 区間 $(0,1]$ 上で $f(x)=\frac{1}{x}$ という関数の積分を考えてみても,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x} \\
&= [\log x]_0^1 \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

となってしまいますが, このように, **たとえ積分区間が有界な区間であったとしても, 区間の端っこの点で $f(x)$ が定義されていないような場合にも, 積分の値**

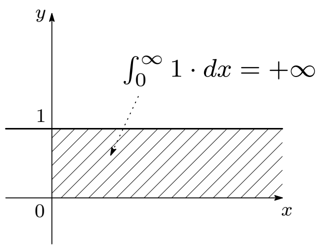


**図 1**　積分区間が無限に伸びているような場合には, 定数関数 $f(x) = 1$ に対しても, 積分の値が上手く定まらない.

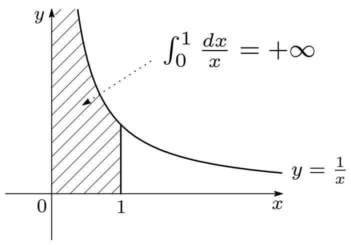


**図 2**　積分区間が有界な区間でも, 区間の端っこの点 $x = 0$ で $f(x) = \frac{1}{x}$ が定義されていないために, 積分の値が上手く定まらない.

**が上手く定義できないことがある**ということも注意しました ( 図 2 を参照 ). 第 10 回の問 3 のところでは, **こうした積分区間の性質に起因する問題**が起こらない**有界閉区間上の積分**だけを考えて, **有界閉区間上の積分は Riemann 和の極限として理解できる**ということを説明しました. また, $\mathbb{R}$ **上の何度でも微分できるような関数は, 勝手な有界閉区間上で積分の値がきちんと定まる**ということを説明し, $\mathbb{R}$ **上の連続関数に対しても同様の議論をすることができる**ということを注意しました.

そこで, ここでは, こうした有界閉区間上の積分に対する知識をもとにして, **積分区間が無限に伸びているような場合**や, **積分区間の端っこの点で関数の値が定義できないような場合**に, **積分の値をどのように定めたら良いのか**ということを考えてみることにします. 話を具体的にするために, ここでは問 1 の例をもとにして考えてみることにします.

さて, 問 1 では,

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx$$

という積分を考えました. この場合, 積分区間は $[0, \infty)$ というように無限に伸びていますから, 第 10 回で考えたように, **積分区間の分割 $\boldsymbol{\Delta}$ に対する Riemann 和 $\boldsymbol{S(\Delta;\gamma)}$ をもとにして, 分割の幅 $\boldsymbol{|\Delta|}$ を小さくしていったときの Riemann 和の極限として積分の値を定義するという Riemann 積分の考え方**は, そのままの形では適用できません. すなわち, この場合, 積分区間が無限に伸びているので, **一般には, 積分区間の分割 $\boldsymbol{\Delta}$ に対する Riemann 和でさえ値がきちんと定まらない**ということになってしまうわけです.

そこで, このような場合には積分の定義を反省してみる必要がありますが, $I$ の被積分関数は $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数ですから, **勝手な有界閉区間上の積分の値は Riemann 和の極限としてきちんと定まる**ということに注目して考えてみることができそうです. すなわち, **勝手な正の実数 $\boldsymbol{0 < R \in \mathbb{R}}$ に対して,**

$$\boldsymbol{I(R) = \int_0^R e^{-ax} \sin bx \, dx}$$

**という有界閉区間 $\boldsymbol{[0, R]}$ 上の積分の値 $\boldsymbol{I(R)}$ はきちんと定まります**から,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-ax} \sin bx \, dx$$
$$= \lim_{R \to \infty} I(R)$$

というように, **$\boldsymbol{R \to \infty}$ としたときの $\boldsymbol{I(R)}$ の極限として, 無限区間 $\boldsymbol{[0, \infty)}$ 上の積分の値を定義する**ことができそうです. このように, 有界閉区間上の積分の値 $I(R)$ を考えた上で, $R \to \infty$ としたときの $I(R)$ の極限として積分の値を定義することを**広義積分**と呼びます.

上で注意したように, 今の場合には, 被積分関数 $e^{-ax} \sin bx$ は何度でも微分できる関数ですから, 第 10 回の問 3 のところで見たように, **勝手な正の実数 $\boldsymbol{0 < R \in \mathbb{R}}$ に対して, 有界閉区間 $\boldsymbol{[0, R]}$ 上の積分の値 $\boldsymbol{I(R)}$ はきちんと定まる**ことが分かります. そこで, 後は, **$\boldsymbol{I = \lim_{R \to \infty} I(R)}$ という極限が存在するかどうか**ということが問題になりますが, そのことを考えてみるために, $I$ を $I(R)$ に取り換えて, 問 1 で行なった計算をやり直すとどうなるかということを考えてみます. すると, 問 1 の解答と全く同様にして, 部分積分を二回繰り返すことで,

$$I(R) = \int_0^R e^{-ax} \sin bx \, dx$$
$$= \left[ \frac{-1}{a} e^{-ax} \sin bx \right]_0^R + \frac{b}{a} \int_0^R e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-aR}\sin bR + \frac{b}{a}\left(\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\cos bx\right]_0^R - \frac{b}{a}\int_0^R e^{-ax}\sin bx\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-aR}\sin bR - \frac{b}{a^2}e^{-aR}\cos bR + \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}I(R) \qquad (1)$$

となることが分かります．したがって，(1) 式から，$I(R)$ は，

$$I(R) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b - ae^{-aR}\sin bR - be^{-aR}\cos bR\right) \qquad (2)$$

となることが分かります．ここで，

$$0 < \left|e^{-aR}\sin bR\right| = e^{-aR}\cdot|\sin bR| \leq e^{-aR}$$
$$0 < \left|e^{-aR}\cos bR\right| = e^{-aR}\cdot|\cos bR| \leq e^{-aR}$$

となることに注意すると，

$$\lim_{R\to\infty} e^{-aR}\sin bR = \lim_{R\to\infty} e^{-aR}\cos bR = 0 \qquad (3)$$

となることが分かりますから，$I(R)$ に対する (2) 式という表示と (3) 式から，$\lim_{R\to\infty} I(R)$ という極限が存在して，

$$I = \lim_{R\to\infty} I(R) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

となることが確かめられました．

このように，積分区間を有界閉区間 $[0,R]$ に取った場合の積分の値 $I(R)$ を考えて，(2) 式のように $I(R)$ の計算を具体的に行なった上で，最後に $R\to\infty$ という極限を取るという方針に立つと，$\lim_{R\to\infty} I(R)$ という極限が存在することと，その極限の値がどうなるのかということを，同時に議論することができます．皆さんも，具体的な例に対して，こうした議論を行なってみると，**広義積分**という考え方をより良く理解できるようになるのではないかと思います．これは，ちょうど，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して，いきなり**無限和**を問題にするのではなく，**値がきちんと定まる部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ について議論を行なって，最後の段階で $N\to\infty$ という極限がどうなるかということを考えてみる**という方針を取ることで，級数に対するより良い理解が得られるということと似ています．

ただし，毎回このような方針で計算を進めようとすると，例えば上で見たように，部分積分を行なうたびに，$-\frac{1}{a}e^{-aR}\sin bR$ や $-\frac{b}{a^2}e^{-aR}\cos bR$ というような「おつりの項」がたくさん現われてしまい，式の形が少し複雑になることがあります．そこで，いま，何らかの方法で，(1) 式に現われるすべての項に対して，$R\to\infty$ としたときの極限が存在することが確かめられていると仮定してみます．すると，(1) 式のすべての項に $\lim_{R\to\infty}$ をつけて，

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} I(R) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-ax}\sin bx\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\sin bx\right]_0^R + \frac{b}{a}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-ax}\cos bx\,dx \\ &= \frac{b}{a}\left(\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\cos bx\right]_0^R - \frac{b}{a}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-ax}\sin bx\,dx\right) \\ &= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\lim_{R\to\infty} I(R)\end{aligned}$$

というように計算することができます．問 1 の解答で挙げた計算は，正確にはこのような計算を行なっていたと解釈することができます．したがって，この場合には，

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-ax}\sin bx\,dx,$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-ax}\cos bx\,dx$$

という広義積分の存在を別口で議論することができれば，問 1 の解答の議論は完全に正当化できることになるわけです．

このように，**考えている積分に対して，何らかの方法で広義積分が存在することが別口で議論することができれば，有界閉区間上の積分の場合と全く同様に，部分積分などの計算を進めることができる**ということが分かります．皆さんの中の多くの方が，これまで何の問題もなく，問 1 のような計算に馴れ親しんできたのではないかと思いますが，例えば，3 節で見るような方法で広義積分の存在を議論することにより，そのような計算もきちんと正当化して考えることができるようになるわけです．

ここでは，積分区間が半直線 $[0,\infty)$ の場合を考えましたが，**有界区間の端っこの点で関数が定義されていないような場合**にも全く同様に考えることができます．

例えば,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

という例では, $0 < R < 1$ となる勝手な実数 $R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_R^1 \frac{dx}{x} \\ &= [\log x]_R^1 \\ &= -\log R \end{aligned} \tag{4}$$

となることが分かりますが, (4) 式から,

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+0} I(R) &= -\lim_{R\to+0} \log R \\ &= +\infty \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ という広義積分は収束しないことが分かります.

一方,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

という例では, $0 < R < 1$ となる勝手な実数 $R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_R^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_R^1 \\ &= 2 - 2\sqrt{R} \end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かりますが, (5) 式から,

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+0} I(R) &= \lim_{R\to+0} (2 - 2\sqrt{R}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ という広義積分は収束して,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

となることが分かります.

全く同様にして,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

というような積分の値も,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \lim_{\substack{R_1\to 1+0 \\ R_2\to 2-0}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

というように, **積分区間 $(1, 2)$ に含まれるような有界閉区間 $[R_1, R_2]$ 上の積分の値の極限**として理解することができます.

## 3. 広義積分の収束判定法について

さて, 2 節では, 積分区間が無限に伸びている場合や, 積分区間の端っこの点で関数の値が定義できないような場合の積分の値を, 広義積分という考え方で理解できることを見ました. 例えば, 問 1 の例では, 積分区間を $[0, R]$ という有界閉区間に取り換えたときの積分の値が,

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_0^R e^{-ax} \sin bx\, dx \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(b - ae^{-aR}\sin bR - be^{-aR}\cos bR\right) \end{aligned}$$

というように具体的に求まるので, この具体的な表示を用いることで,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx &= \lim_{R\to\infty} I(R) \\ &= \frac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

というように, 広義積分の値がきちんと定まることを直接確かめることができました.

しかし, 一般には, このように有界閉区間上での積分の値が具体的に求まるとは限りません. 例えば,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

という積分に対しては,

$$I(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

という有界閉区間 $[0, R]$ 上の積分の値 $I(R)$ を, 多項式や三角関数などの良く知られた関数で具体的に表わすことができません. ただし, 第 8 回の問 3 のところで注意したように, 被積分関数 $e^{-x^2}$ を Taylor 展開してから項別積分することにより,

$$I(R) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n R^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$$

というベキ級数表示を得ることはできます. この級数は第 8 回の問 2 で取り上げたような**交代級数**になっているので,*2) 勝手にひとつ正の実数 $0 < R \in \mathbb{R}$ を取って

*2) 正確には, $a_n = \frac{R^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$ とすると,

きたときに, この表示を用いて, $I(R)$ の大きさを見積もることはできます．しかし, この表示では, $R \to \infty$ としたときに, $\lim_{R\to\infty} I(R)$ という極限が存在するのかどうかということは良く分かりません.

このように, **一般には，有界閉区間上の積分の値 $I(R)$ を具体的に求めてから, $\lim_{R\to\infty} I(R)$ という極限がどうなるのかということを考察するという方針にもとづいて広義積分の存在を議論するということは難しい**ので, **広義積分の存在を議論する**ためには**「別な工夫」**が必要になります．そこで, この節では, そうした工夫の代表的な例である**「優関数による広義積分の収束判定法」**について考えてみることにします.

いま, $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $f(x)$ が勝手にひとつ与えられているとします.[*3] すると, $f(x)$ は何度でも微分できる関数ですから, 第 10 回の問 3 のところで見たように, 勝手な正の実数 $0 < R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$I(R) = \int_0^R f(x)dx$$

という**有界閉区間 $[0, R]$ 上の積分の値はきちんと定まる**ことが分かります．このとき, **関数 $f(x)$ の区間 $[0, \infty)$ 上の広義積分の値がきちんと定まるかどうか**ということは,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty} I(R)\end{aligned}$$

**という極限が存在するかどうか**ということであると解釈するのでした.

2 節でも注意したように, このことは, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

という**部分和の値はきちんと定まる**ということに注目して, **無限和 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ の値がきちんと定まるかどうか**ということを,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty a_n &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N a_n \\ &= \lim_{N\to\infty} S_N\end{aligned}$$

**という極限が存在するかどうか**ということであると解釈したことと似ています．第 5 回の問 2 のところでは, こうした**級数に対する収束判定法**について考えてみましたが, ここでは, 上の類似をもとにして, **広義積分に対する収束判定法**を考察してみることにします.

そのために, まず, **級数の値がきちんと定まるというパターンには，絶対収束と条件収束という二つのパターンがある**ということについて少し思い出してみることにします.[*4] すると, 与えられた級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ に対して,

$$S^+ = \sum_{a_n>0} a_n,\ S^- = \sum_{a_n<0} |a_n|$$

として,「総和」$S = \sum_{n=1}^\infty a_n$ を,

$$S = S^+ - S^-$$

というように,「正の項の寄与」$S^+$ と「負の項の寄与」$S^-$ に分解して考えてみると, 無限和 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ の値がきちんと定まるというパターンには, **正の項の総和 $S^+$ と負の項の総和 (の絶対値) $S^-$ が両方とも有限値となり,「(有限) − (有限)」という形で総和 $S$ が有限値になる**ような場合と, **正の項の総和 $S^+$ と負の項の総和 (の絶対値) $S^-$ が両方とも $+\infty$ となるにもかかわらず，和を取る順番が上手く定められているために，部分和 $S_N$ の極限 $\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在し,「(無限大) − (無限大)」という形で総和 $S$ が有限値になる**という場合の二つのパターンがあり, 前者の場合を**絶対収束**と呼び, 後者の場合を**条件収束**と呼ぶのでした.

このうち, **条件収束**の場合には, 第 4 回の問 3 のところで見たように, **和を取る順番を取り換えると「総和」であるはずの無限和の値もガラガラと変わってしまう**というような**「微妙な場合」**であるために, **一般的な収束判定法は知られていない**ということを注意しました．一方, **絶対収束**しているということは, **正の項だけを足した部分和 $S_N^+$ からなる単調増加数列 $\{S_N^+\}_{N=1,2,\cdots}$**

---

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{R^{2n+3}}{(n+1)!\cdot(2n+3)}}{\frac{R^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}} = \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{R^2}{n+1} \le \frac{R^2}{n+1}$$

となることが分かるので, 与えられた実数 $R \in \mathbb{R}$ に対して, 例えば, $R^2 \le n_0 + 1$ となる自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ を勝手にひとつ取ってきて, 最初の $n_0$ 項の和は別にして, $\sum_{n=n_0}^\infty (-1)^n a_n$ という「無限和」を考えると交代級数になっているということです.

*3) これでは抽象的で考えにくいと思われる方は, $f(x)$ として 問 1 の $f(x) = e^{-ax}\sin bx$ という関数を考えてもらっても構いませんし, 上で考えた $f(x) = e^{-x^2}$ という関数を考えてもらっても構いません.

*4) より詳しい説明については第 4 回の解説を参照して下さい.

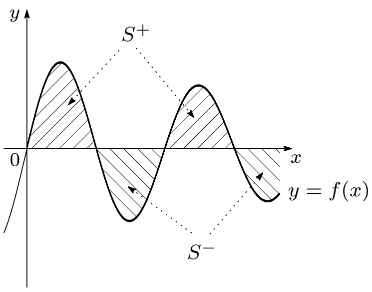


**図 3**　「総面積」$S = \int_0^\infty f(x)dx$ を，$f(x) \geq 0$ となっている部分から得られる「正の面積」$S^+$ と，$f(x) \leq 0$ となっている部分から得られる「負の面積 (の絶対値)」$S^-$ に分解する．

**と，負の項 ( の絶対値 ) だけを足した部分和 $S_N^-$ からなる単調増加数列 $\{S_N^-\}_{N=1,2,\cdots}$ が，両方とも収束する**ということですから，**これら二つの単調増加数列が，いずれも「頭打ち」になる**ことであると解釈できるのでした．さらに，この条件は，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S^+ + S^- < +\infty \tag{6}$$

という条件と同じことであるということが分かり，これが**絶対収束**と呼ばれる理由でした．

そこで，上で述べた類似をもとにして，広義積分の場合に対応する考察を行ってみることにします．皆さん良くご存知のように，関数 $f(x)$ の積分 (の値)

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

とは，直感的には，区間 $[0, \infty)$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれる部分の (符号付きの) 面積を表わすのでした．すると，「総和」$S$ を「正の項の寄与」$S^+$ と「負の項の寄与」$S^-$ に分解して考えるということは，**「総面積」$S = \int_0^\infty f(x)dx$ を，$f(x) \geq 0$ となっている部分から得られる「正の面積」$S^+$ と，$f(x) \leq 0$ となっている部分から得られる「負の面積 (の絶対値)」$S^-$ に分解して考える**ということに対応すると考えることができます ( 図 3 を参照 )．このことを，より正確に表現すれば，次のようになります．

いま，関数 $f(x)$ を**正の値を取る部分**と**負の値を取る部分**に分解して，

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & f(x) < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

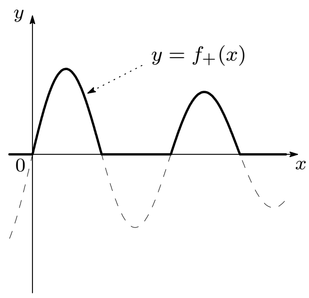


**図 4**　関数 $f(x)$ から，正の値を取る部分 $f_+(x)$ を取り出す．

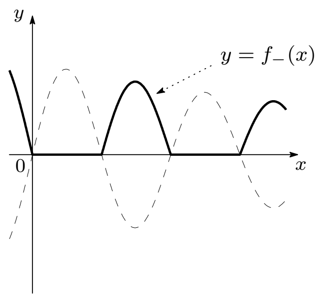


**図 5**　関数 $f(x)$ から，負の値を取る部分 (の絶対値) $f_-(x)$ を取り出す．

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \text{ のとき} \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めてみます ( 図 4, 図 5 を参照 )．すると，$f(x)$ は，

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \tag{7}$$

というように二つの**正値関数**の差の形に分解されることが分かりますから，

$$S^+ = \int_0^\infty f_+(x)dx,$$
$$S^- = \int_0^\infty f_-(x)dx$$

として，「総面積」$S = \int_0^\infty f(x)dx$ が，

$$S = S^+ - S^-$$

というように，「正の面積の寄与」$S^+$ と「負の面積の寄与」$S^-$ に分解できることが分かります．

そこで，$S^+$ や $S^-$ が，どのような値を取りうるのかということを考えてみます．上のように関数 $f(x)$ を $f_+(x)$ と $f_-(x)$ に分解すると，関数 $f(x)$ が何度でも微分できる関数であったとしても，一般には，$f_+(x)$ や

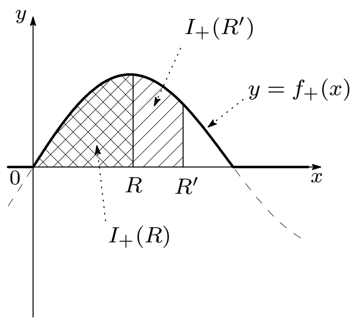


**図 6**　$I_+(R)$ は単調増加関数となる.

$f_-(x)$ には微分することができないような点がいくつか現われることがあり得ます. しかしながら, 少なくともこれらの関数は**連続関数**であることが分かりますから, **勝手な正の実数 $\boldsymbol{0 < R \in \mathbb{R}}$ に対して,**

$$\boldsymbol{I_+(R) = \int_0^R f_+(x)dx},$$
$$\boldsymbol{I_-(R) = \int_0^R f_-(x)dx}$$

**という関数 $\boldsymbol{f_\pm(x)}$ の有界閉区間 $[0, \boldsymbol{R}]$ 上の積分の値はきちんと定まる**ことが分かります.

いま, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f_+(x) \geq 0$ であることに注意すると, $R < R'$ のとき,

$$\int_R^{R'} f_+(x)dx \geq 0$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} I_+(R) &= \int_0^R f_+(x)dx \\ &\leq \int_0^R f_+(x)dx + \int_R^{R'} f_+(x)dx \\ &= \int_0^{R'} f_+(x)dx \\ &= I_+(R') \end{aligned}$$

となることが分かります. すなわち, **$\boldsymbol{I_+(R)}$ は単調増加関数である**ことが分かります ( 図 6 を参照 ). したがって,「正の面積の寄与」

$$\begin{aligned} S^+ &= \int_0^\infty f_+(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R f_+(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty} I_+(R) \end{aligned}$$

の可能性としては,「有限の値に落ち着く」か「無限大になる」かの二通りの可能性しか存在しないことが分かります. 全く同様にして,「負の面積の寄与」

$$\begin{aligned} S^- &= \int_0^\infty f_-(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R f_-(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty} I_-(R) \end{aligned}$$

の可能性も,「有限の値に落ち着く」か「無限大になる」かの二通りの可能性しか存在しないことが分かります.

以上から,「総面積」

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty f(x)dx \\ &= S^+ - S^- \end{aligned}$$

の可能性としては, 次の四つのパターンが考えられるということになります.

| | $S^-$ が有限 | $S^- = +\infty$ |
|---|---|---|
| $S^+$ が有限 | $S = S^+ - S^-$ | $S = S^+ - \infty$ |
| $S^+ = +\infty$ | $S = \infty - S^-$ | $S = \infty - \infty$ |

よって, 級数のときと同様に,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{\int_0^\infty f(x)dx} \\ &= \boldsymbol{\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx} \end{aligned}$$

**という極限が存在しうるのは, 最初と四番目のパターンである**

**(イ)　$\boldsymbol{S^+, S^-}$ が両方とも有限の値に落ち着く.**

**(ロ)　$\boldsymbol{S^+, S^-}$ が両方とも $\boldsymbol{+\infty}$ に発散する.**

**という二つの場合のみ**であることが分かります. すなわち, **この二つの場合においてのみ, 広義積分 $\boldsymbol{\int_0^\infty f(x)dx}$ の値がきちんと定まりうる**ことが分かります.

級数のときと同様に, (イ) のパターンで広義積分の値がきちんと定まるときに, 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は**絶対収束する**と呼び, (ロ) のパターンで広義積分の値がきちんと定まるときに, 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は**条件収束する**と呼びます. ここで, (イ) という条件は, **$\boldsymbol{I_+(R), I_-(R)}$ という単調増加関数が $\boldsymbol{R \to \infty}$ のとき, それぞれ,「頭打ち」になるということですが, この条件は,**

$$\boldsymbol{\int_0^\infty |f(x)|dx = S^+ + S^- < +\infty} \qquad (8)$$

**という条件と同じことである**ということが, 級数の場合と全く同様の議論により分かります.[*5)]

そこで, 次に, **広義積分に対する収束判定法**について考えてみることにします. 級数のときと同様に, 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ が**条件収束**している場合には, **「正の面積の寄与」$S^+$ と「負の面積の寄与」$S^-$ が両方とも $+\infty$ となるにもかかわらず, 和を取る順番が上手く定められているために, 極限 $\lim_{R\to\infty} I(R)$ が存在し,「(無限大) $-$ (無限大)」という形で「総面積」$S = \int_0^\infty f(x)dx$ が有限値になる**という「微妙な場合」なので, 一般的な収束判定法は知られておらず, 個別に対処する必要があります. そこで, 以下では, **広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ が絶対収束するための (十分) 条件**, すなわち, **(8) 式が成り立つための (十分) 条件**について考えてみることにします.

そのために, 再び, 級数の場合に戻って, 級数の場合にどのような議論を行なったのかということを思い出してみることにします. 第 5 回の問 2 のところでは, 与えられた級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が絶対収束していることを判定できるような方法, すなわち,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S^+ + S^- < +\infty \tag{9}$$

となっていることを判定できるような方法を考えたのでした. そのときのアイデアは, **部分和が具体的に計算できるような級数と比べてみる**ということであり, パラメータを調整することで一般の級数と「大きさ比べ」をすることができる**等比級数 $\sum_{n=1}^\infty M^n$** をこのような級数の候補として選んで, **級数の収束判定法**を考えたのでした. 具体的には, **$n$ が大きくなるときに, $|a_n|$ の大きさの大きくなり具合と, $M^n$ の大きさの大きくなり具合が, 同じように見える**ような**公比 $M$ の候補**として, 例えば,

$$M = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

という式によって定まる級数 $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ の「仮想的な公比」$M$ に注目すると,

$$M < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.}$$

ということが分かるのでした. ここで,「$M \leq 1$」ではなく「$M < 1$」であるということが議論のポイントになっているわけですが, 実際,「$M < 1$」であることを用いて, 次のように議論できるのでした.

いま, $M < 1$ ですから, $M < M' < 1$ となるような実数 $M' \in \mathbb{R}$ が存在します. そこで, このような実数 $M'$ を, 勝手にひとつ選んでくると,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = M < M'$$

となり, 最終的には $|a_n|^{1/n}$ は, どれもこれも $M'$ より小さくなってしまうことが分かります. すなわち, 適当な自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n_0 \leq n \implies |a_n|^{1/n} \leq M' \tag{10}$$

となることが分かります. よって, (10) 式から, $n_0 \leq N$ となる勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |a_n| &= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{N} |a_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{N} (M')^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} (M')^n \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \frac{(M')^{n_0}}{1-M'} < +\infty \end{aligned} \tag{11}$$

となることが分かりますから, (9) 式が成り立つことが分かるのでした.

ここで, 上の議論を見返してみると, (9) 式が成り立つことを確かめるにあたり, **最初の有限個の項を別にして考えると, $n \geq n_0$ のとき,**

$$\boldsymbol{|a_n| \leq (M')^n} \tag{12}$$

**となる**ということと,

$$\boldsymbol{\sum_{n=n_0}^{\infty} (M')^n < +\infty} \tag{13}$$

**となる**ということが議論のポイントになっていることが分かります.

そこで, この点に注意して, 広義積分の場合にも, 与えられた広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ が絶対収束していることを判定できるような方法, すなわち,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < +\infty \tag{14}$$

となっていることを判定できるような方法を考えてみることにします. すると, この場合には, **勝手な有界閉**

*5) 興味がある方は, 第 4 回で級数に対して行った議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

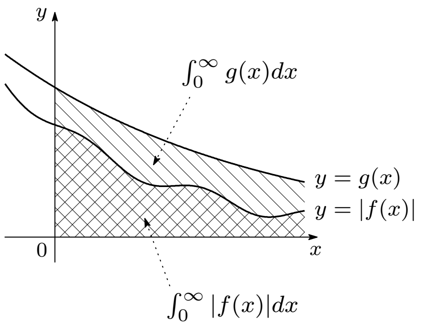


**図 7**　$|f(x)| \leq g(x)$ のとき, $\int_0^\infty |f(x)|dx$ という面積は $\int_0^\infty g(x)dx$ という面積より小さくなる.

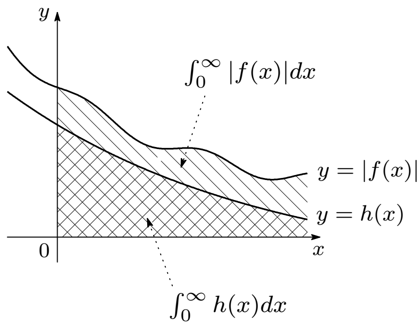


**図 8**　$0 \leq h(x) \leq |f(x)|$ のとき, $\int_0^\infty |f(x)|dx$ という面積は $\int_0^\infty h(x)dx$ という面積より大きくなる.

**区間上の積分の値が具体的に計算できるような関数と比べてみれば良い**のではないかと思われます. すなわち, **積分区間内の勝手な点 $x \in [0, \infty)$ に対して,**

$$|f(x)| \leq g(x) \tag{15}$$

**となるような関数 $g(x)$ で,**

$$\int_0^\infty g(x)dx < +\infty \tag{16}$$

**となることを具体的に確かめることができるようなものを見つけてくれば良い**のではないかと思われます. このような関数 $g(x)$ を区間 $[0, \infty)$ における関数 $f(x)$ の**優関数**と呼んだりします.

実際, このような優関数 $g(x)$ を具体的に見つけることができたと仮定すると, (15) 式の両辺を積分することで, 勝手な正の実数 $R > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_0^R |f(x)|dx &\leq \int_0^R g(x)dx \\ &\leq \int_0^\infty g(x)dx < +\infty\end{aligned} \tag{17}$$

となることが分かります. そこで, さらに, (17) 式の両辺で $R \to \infty$ としてみると,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \leq \int_0^\infty g(x)dx < +\infty$$

となることが分かりますから, (14) 式が成り立つことが分かります. すなわち, (15) 式のもとでは,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \leq \int_0^\infty g(x)dx \tag{18}$$

となるはずであることが分かりますが ( 図 7 を参照 ), さらに,

$$\int_0^\infty g(x)dx < +\infty$$

となることが分かれば, (18) 式と合わせて,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < +\infty$$

となることを結論付けることができるだろうというわけです.

全く同様にして, 積分区間内の勝手な点 $x \in [0, \infty)$ に対して,

$$0 \leq h(x) \leq |f(x)| \tag{19}$$

となるような関数 $h(x)$ を見つけることができれば,

$$0 \leq \int_0^\infty h(x)dx \leq \int_0^\infty |f(x)|dx \tag{20}$$

となるはずであることが分かりますが ( 図 8 を参照 ), さらに,

$$\int_0^\infty h(x)dx = +\infty \tag{21}$$

となることが分かれば, (20) 式と合わせて,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx = +\infty$$

となること, すなわち, 広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ は絶対収束しないことを結論付けることができることになります.

こうした**優関数**という見方から, **級数の収束判定法**に対する議論を見返すと, (11) 式より, 与えられた級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ に対して,

$$\sum_{n=1}^\infty b_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^\infty (M')^n \tag{22}$$

という**優級数**を取ってくることで, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ という級数が絶対収束することを確かめたというように解釈できることが分かります. また, 第 6 回の問 1 では,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{23}$$

という級数を取り上げましたが, この場合には, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の「仮想的な公比」$M$ は $M = 1$ となってしまい,「級数の収束判定法」では収束・発散が判定できないことに注意しました. しかし, このような場合でも,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

という**優級数**を取ってくることで, (23) 式の級数が収束すること確かめたというように, 第 6 回の問 1 で挙げた解答を解釈できることが分かります.

このように, 級数の場合には, 優級数として,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (M')^n$$

という**等比級数**や, $1 < \alpha \in \mathbb{R}$ として,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

というような **$n$ の実数ベキからなる級数**を考えることができますが,[*6] 全く同様に, **広義積分**の場合にも, 例えば, **$\alpha \in \mathbb{R}$ として,**

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}}$$

**という関数**を**具体的に積分の値が計算できる優関数の候補**として考えることができます.[*7] このとき, いきなり $\int_0^{\infty} g(x)dx$ という積分を考えると, $x = \infty$ の近くでの積分の値だけでなく, $x = 0$ の近くでの積分の値がきちんと定まるのかということも気になってしまいますが, 適当に正の実数 $b \in \mathbb{R}$ を取ってきて,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} |f(x)|dx &= \int_0^{b} |f(x)|dx + \int_b^{\infty} |f(x)|dx \\ &\leq \int_0^{b} |f(x)|dx + \int_b^{\infty} g(x)dx \end{aligned} \tag{24}$$

というように, **積分区間 $[b, \infty)$ 上だけで優関数 $g(x)$ の積分による評価を行なう**という方針を取ることにすると, この問題は回避できます.[*8]

そこで, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < b \in \mathbb{R}$ として,

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

という関数に対して, **$\int_b^{\infty} g(x)dx$ という広義積分の値がどうなるか**ということを考えてみます. すると, $b < R$ となるような勝手な実数 $R \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha = 1$ のときには,

$$\begin{aligned}\int_b^R g(x)dx &= \int_b^R \frac{dx}{x} \\ &= [\log x]_b^R \\ &= \log R - \log b \end{aligned} \tag{25}$$

となり, $\alpha \neq 1$ のときには,

$$\begin{aligned}\int_b^R g(x)dx &= \int_b^R \frac{dx}{x^{\alpha}} \\ &= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_b^R \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{R^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{b^{\alpha-1}} \end{aligned} \tag{26}$$

となることが分かりますから, (25) 式, (26) 式より,

**(イ) $\alpha > 1$ のとき,**

$$\lim_{R\to\infty} \int_b^R g(x)dx = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{b^{\alpha-1}} < +\infty$$

**(ロ) $\alpha \leq 1$ のとき,**

$$\lim_{R\to\infty} \int_b^R g(x)dx \text{ は発散する.}$$

となることが分かります. したがって, **$x = \infty$ の近くでの積分の値を考察する場合には,**

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \ (\alpha > 1)}$$

**という関数(または, その定数倍)が優関数の候補として取れる**ことが分かります.

例えば, この節の最初に挙げた $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ という例では, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 \leq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \cdots} \leq \frac{1}{x^2}$$

となることに注意して, 例えば, 積分区間を $x = 1$ のところで分けて, 積分の大きさを評価してみると,

---

*6) より正確には, (11) 式や (22) 式のように, 最初の有限個の項を別にして,「等比級数」や「$n$ の実数ベキからなる級数」を優級数として考えることが多いです.

*7) あるいは, (19) 式, (21) 式を満たす関数 $h(x)$ として, $h(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ という形の関数を考えることもできます.

*8) このように適当に積分区間を分けてから, (24) 式という評価式を考えて議論を進めるということは, 級数の場合に, **最初の有限個の和だけを別にして, (11) 式という評価を考えて議論を進めた**ということに対応していると解釈することができます.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2}dx &= \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx \\ &\le \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \\ &= \int_0^1 e^{-x^2}dx + 1 < +\infty\end{aligned}$$

となることが分かりますから, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値がきちんと定まることが分かります.

ここでは, 積分区間が半直線 $[0,\infty)$ の場合だけを考えましたが, 積分区間の端っこの点で関数が定義できないような場合にも, 全く同様の議論をすることができます. 例えば, **積分区間が $(a,b]$ で, $x=a$ で被積分関数の値が定義できないような場合には, $x=a$ の近くでの積分の値を考察するための優関数の候補として, 例えば,**

$$\boldsymbol{g(x)=(x-a)^\alpha,\ (\alpha>-1)}$$

**というような関数 ( または, その定数倍 ) を取ることができます**. 実際には, 上で見たように, **Taylor 展開を用いて適当に被積分関数の大きさを評価してみることで, 優関数の候補を見つけることができる**ことが多いです.

## 4. 問 2 の解答

(1) $\Gamma(x)$ の定義より,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= [-e^{-t}]_0^\infty \\ &= 1\end{aligned}$$

となることが分かります. また,

$$\Gamma(2)=\int_0^\infty e^{-t}t\,dt$$

となりますが, 被積分関数を $e^{-t}t=(-e^{-t})'t$ と考えて, 部分積分してみると,

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= [-e^{-t}t]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= \Gamma(1) \\ &= 1\end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) $\Gamma(x)$ の定義より,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt$$

となりますが, (1) と同様に, 被積分関数を $e^{-t}t^x=(-e^{-t})'t^x$ と考えて, 部分積分してみると,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= [-e^{-t}t^x]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\cdot xt^{x-1}dt \\ &= x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

となることが分かります.[*9)]

(3) (2) の結果から, 勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) \qquad (27)\end{aligned}$$

となることが分かります. 一方, (1) の結果から, $\Gamma(1)=1$ となることが分かりますから, (27) 式と合わせて,

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

となることが分かります.

## 5. 問 2 を見直すと

問 2 では,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (28)$$

という関数を考えました. この関数は **$\boldsymbol{\Gamma}$ 関数 ( ガンマ関数 )** と呼ばれ, Euler によって定義されたものです. 問 2 の (3) で見たように, 勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

となりますから, 気分としては, **$\boldsymbol{0<x}$ となる勝手な**

*9) 二番目の等号では, $x>0$ のとき, $\lim_{t\to\infty}e^{-t}t^x=0$ となることを用いました. このことは, 例えば, 勝手にひとつ取ってきた正の実数 $0<x\in\mathbb{R}$ に対して, $x<n_0$ となるような自然数 $n_0\in\mathbb{N}$ を勝手にひとつ取ってくると, $t>0$ のとき,

$$0<e^{-t}t^x=\frac{t^x}{e^t}<\frac{t^x}{\frac{t^{n_0}}{n_0!}}=\frac{n_0!}{t^{n_0-x}}$$

と評価できることから分かります.

**実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 上の (28) 式という積分の値によって「$\Gamma(x) = (x-1)!$」を定義した**という感じがします. 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, その階乗 $n!$ は, 数学のいろいろな場面で登場しますが, その自然な拡張である $\Gamma$ 関数も, 陰に陽に数学のいろいろな場面に登場します.

例えば, これまでにも何度か登場した $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ という積分も, $t = x^2$ と変数変換してみると,

$$\begin{aligned} dt &= 2xdx \\ &= 2t^{1/2}dx \end{aligned}$$

となりますから,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2}dx &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{2t^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. 実は,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることが分かるのですが, 強引に $\Gamma(x) = (x-1)!$ であると考えてみることにすると,「$(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$」という**「不思議な式」**が得られます. 皆さんの中の多くの方が, 将来, 何らかの形で $\Gamma$ 関数について学ばれる機会があるのではないかと思い, ちょっとした紹介を兼ねて $\Gamma$ 関数を取り上げてみました.

さて, 問 2 では, **$x > 0$ に対して, (28) 式という広義積分の値がきちんと定まる**ということは認めて議論をしましたが, 問 1 のところで考えた**優関数による収束判定法**を用いると, この点について, 次のように議論することができます. いま, **$x_0 > 0$ となる実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ を勝手にひとつ取ってきたときに,**

$$\boldsymbol{\Gamma(x_0) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}dt} \tag{29}$$

**という広義積分の値がきちんと定まるかどうか**ということを考えてみます. 以下では, $x_0$ は $x_0 = 1$ など, 勝手にひとつ固定された定数であるとみなして議論を進めることにします.

そこで, まず, **$t = \infty$ の近くでの積分の値を評価する**ことを考えてみます. いま, $t > 0$ のとき, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$0 < e^{-t}t^{x_0-1} = \frac{t^{x_0-1}}{e^t} \leq \frac{t^{x_0-1}}{\frac{t^n}{n!}} = \frac{n!}{t^{n-x_0+1}} \tag{30}$$

と評価できることに注意します. そこで, $n_0 \geq x_0 + 1$ となるような自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ を, 勝手にひとつ取ってくると, $n_0 - x_0 + 1 \geq 2$ となることが分かりますから, $t \geq 1$ のとき,

$$t^{n_0-x_0+1} \geq t^2 \tag{31}$$

となることが分かります. したがって, (30) 式, (31) 式から, $t \geq 1$ のとき,

$$0 < e^{-t}t^{x_0-1} \leq \frac{n_0!}{t^{n_0-x_0+1}} \leq \frac{n_0!}{t^2} \tag{32}$$

と評価できることが分かります. よって, (32) 式の両辺 1 から $\infty$ まで積分してみると,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t}t^{x_0-1}dt &\leq \int_1^\infty \frac{n_0!}{t^2}dt \\ &= n_0! \cdot \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty \\ &= n_0! \end{aligned} \tag{33}$$

と評価できることが分かります.

次に, **$t = 0$ の近くでの積分の値を評価する**ことを考えてみます. いま, $t > 0$ のとき, $0 < e^{-t} \leq 1$ と評価できることに注意すると, $t > 0$ に対して,

$$0 < e^{-t}t^{x_0-1} \leq t^{x_0-1} \tag{34}$$

と評価できることが分かります. よって, (34) 式の両辺 0 から 1 まで積分してみると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t}t^{x_0-1}dt &\leq \int_0^1 t^{x_0-1}dt \\ &= \left[\frac{t^{x_0}}{x_0}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{x_0} \end{aligned} \tag{35}$$

と評価できることが分かります.

そこで, (33) 式, (35) 式という評価式を合わせて考えると,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}dt \\ &\quad = \int_0^1 e^{-t}t^{x_0-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x_0-1}dt \\ &\quad \leq \frac{1}{x_0} + n_0! < +\infty \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, 問 1 のところで見たように, **$x_0 > 0$ に対して, (29) 式という広義積分の値はきちんと定まる**ことが分かります.

以上から, **$x > 0$ に対して, (28) 式という広義積

**分の値がきちんと定まる**ことが分かりましたが, 次に, **$x \leq 0$ の場合にはどうなっているのか**ということを考えてみます. まず, 大まかな様子を探ってみるために, 少し粗っぽく考えてみることにします. いま, $t = 0$ のまわりでは, $e^{-t} \fallingdotseq 1$ ですから,

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \fallingdotseq \int_0^1 t^{x-1} dt$$

と見積もることができそうです. このとき, $x = 0$ であるとすると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{-1} dt &= \lim_{R_1 \to +0} \int_{R_1}^1 \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{R_1 \to +0} [\log t]_{R_1}^1 \\ &= \lim_{R_1 \to +0} (-\log R_1) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

となることが分かりますし, $x < 0$ であるとすると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1} dt &= \lim_{R_1 \to +0} \int_{R_1}^1 t^{x-1} dt \\ &= \lim_{R_1 \to +0} \left[\frac{t^x}{x}\right]_{R_1}^1 \\ &= \lim_{R_1 \to +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{R_1^x}{x}\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

となることが分かりますから, いずれにしても,

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{R_1 \to +0} \int_{R_1}^1 t^{x-1} dt = +\infty \qquad (36)$$

となることが分かります. したがって, **$x \leq 0$ のときには, $\Gamma(x)$ という積分の値も上手く定義できないのではないか**と思われます.

そこで, 上の議論をもう少し慎重に見直すことで, このことを確かめてみることにします. いま, $0 \leq t \leq 1$ のとき,

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} = e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$$

となることに注意すると, 勝手にひとつ取ってきた実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $0 < t \leq 1$ のとき,

$$0 \leq \frac{t^{x-1}}{3} \leq e^{-t} t^{x-1}$$

となることが分かります. したがって, $0 < R_1 < 1$ となるような勝手な実数 $R_1 \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 \leq \frac{1}{3} \int_{R_1}^1 t^{x-1} dt \leq \int_{R_1}^1 e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (37)$$

となることが分かります. ここで, $x \leq 0$ であると仮定すると, (36) 式, (37) 式から,

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{R_1 \to +0} \int_{R_1}^1 e^{-t} t^{x-1} dt = +\infty$$

となることが分かりますから, **(28) 式によって定義された広義積分は, $x > 0$ となる実数に対してしかきちんと値が定まらない**ことが分かりました. すなわち, **(28) 式という積分表示では, $\Gamma$ 関数 $\Gamma(x)$ は $x > 0$ でしか意味を持たない**ことが分かりました.

さて, 問 2 の (2) より, $\Gamma(x)$ は, $x > 0$ に対して,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (38)$$

という式を満たすのでした. この (38) 式は, **「$\Gamma(x+1)$ という関数と $x\Gamma(x)$ という関数を結びつけている等式」**であると見なせますが, このように**「二つの関数を結びつけるような等式」**を, 一般に, **関数等式**と呼んだりします. そこで, いま, (38) 式を,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad (39)$$

という形に書き直してみます. 上で見たように, (28) 式という積分表示では, $\Gamma(-\frac{1}{2})$ という値は意味がないわけですが, (39) 式の両辺に $x = -\frac{1}{2}$ を代入してみると,

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} \\ &= -2\Gamma(\frac{1}{2})\end{aligned} \qquad (40)$$

となりますから, **「$\Gamma(-\frac{1}{2})$ という値を $-2\Gamma(\frac{1}{2})$ であると定める」**ことは自然なことのように思われます. 同様に考えると, **$-1 < x < 0$ となる勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (39) 式の右辺の値によって $\Gamma(x)$ という値を定めることができる**ことが分かります. 一方, 問 2 の (1) より, $\Gamma(1) = 1$ となることに注意して, 形式的に (39) 式に $x = 0$ を代入してみると,

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= \frac{\Gamma(1)}{0} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= \infty\end{aligned}$$

となりますから, $\Gamma(0)$ という値はきちんと定まらず, $x = 0$ は関数 $\Gamma(x)$ の**特異点**であると考えることができます. こうして, **関数等式 (39) 式を用いることで, (28) 式という積分表示では $x > 0$ となる実数**

**$x \in \mathbb{R}$ に対してしか意味がなかった $\Gamma(x)$ という値を, $x > -1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対しても意味付けできる**ことが分かりました.

そこで, 再び (39) 式を眺めてみると, 今度は, $-2 < x < -1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ を代入してみることができそうです. 例えば, $x = -\frac{3}{2}$ を代入してみると,

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{3}{2}) &= \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}\cdot\Gamma(-\frac{1}{2})\end{aligned}$$

となりますが, (40) 式と合わせて考えると,

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{3}{2}) &= -\frac{2}{3}\cdot\Gamma(-\frac{1}{2}) \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-2)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

となりますから,「$\Gamma(-\frac{3}{2})$ という値は $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-2)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})$ という値である」と定めることは自然なことのように思われます. 同様に考えると, **$-2 < x < -1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma(x)} &= \boldsymbol{\frac{\Gamma(x+1)}{x}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}}\end{aligned} \tag{41}$$

**という式によって $\Gamma(x)$ の値を定めることができる**ことが分かります. このとき, 形式的に (41) 式に $x = -1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\Gamma(-1) &= \frac{\Gamma(1)}{(-1)\cdot 0} \\ &= \frac{1}{(-1)\cdot 0} \\ &= \infty\end{aligned}$$

となりますから, $\Gamma(-1)$ という値はきちんと定まらず, $x = -1$ も関数 $\Gamma(x)$ の**特異点**であると考えることができます.

以下, 同様な議論を繰り返すと, **勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,**

$$\boldsymbol{\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}} \tag{42}$$

**という式によって, $-n < x$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\Gamma(x)$ という値を定めることができる**ことが分かります.*10) こうして, **勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\Gamma(x)$ という値を定めることができる**ことが分かります. また, **$x = 0, -1, -2, -3, \cdots$ は関数 $\Gamma(x)$ の「特異点」となる**ことも分かります.

上で見たように, **最初の (28) 式という積分表示では, $x \le 0$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\Gamma(x)$ という値はことごとく $\infty$ になるように見えた**わけですが, **(39) 式という関数等式の力を借りて, $\Gamma(x)$ の「真の姿」を注意深く探ってみる**と, **本当に $\infty$ となってしまうのは $x = 0, -1, -2, \cdots$ というところだけで, それ以外の点では $\Gamma(x)$ という値がきちんと定まっている**ことが分かります. このことは, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ という関数を Taylor 展開して,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{43}$$

と表わしたときに, **右辺のベキ級数表示を考えると, $|x| < 1$ となる実数 $x \in \mathbb{R}$ に対してしか意味を持たず, 例えば, $x = 2$ を代入すると,**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(2)} &= \boldsymbol{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots} \\ &= \boldsymbol{+\infty}\end{aligned}$$

**となるように見える**のに, **左辺の表示を考えると,**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(2)} &= \boldsymbol{\frac{1}{1-2}} \\ &= \boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

**というようにきちんと値が定まる**ということに似ています. 皆さんも, この場合, $f(2) = \infty$ ではなく, $f(2) = -1$ と定める方が自然であると思われるのではないかと思います.

このように, **関数というものは「いろいろな姿」に「化け」ながら, 我々の前に立ち現われるようなもの**であり, **「ひとつの姿」だけに捕らわれていると, その関数の「真の姿」に思い至ることもないままに「欺かれてしまう」ことがある**ということを, こうした例は示唆しています. 問 2 で取り上げた $\Gamma$ 関数も, **(28) 式という積分表示だけに捕らわれていると, $x \le 0$ に対しては, $\Gamma(x)$ という値は「全く意味がない」などど早合点してしまいます**が, **「関数等式」という「魔法のメガネ」を通して眺める**と, **(28) 式という積分表示の下に隠されていた $\Gamma$ 関数の「真の姿」が垣間見られてくる**わけです. 皆さんがこれまで慣れ親しんできて良く分かっていると考えている**関数**というものは, このように人を欺くなかなか「ずる賢いもの」であるとも言えますし, 公衆の面前に「真の姿」をたやすくさらけ出したりしない「恥ずかしがり屋」であるとも言

*10) 興味のある方は確かめてみて下さい.

えるわけです．Euler は**「関数等式」という「魔法のメガネ」**を見つけることで，**$\Gamma$ 関数の「真の姿」**を垣間見ることができたわけですが，現在の数学においても，それぞれの分野に現れる**「意味ありげな関数」の「真の姿」**を何とか垣間見ることができないかと考えて，多くの数学者が努力を重ねています．

## 6. 問 3 の解答

(1) $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を項別微分すると，

$$\frac{dF}{dx}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$
$$\frac{d^2F}{dx^2}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

となることに注意して，与えられた微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}(x)+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx}(x)\\
&\qquad-\alpha\beta F(x)\\
&=(x-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\\
&\quad+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+\beta+1)na_nx^n\\
&\quad-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\beta a_nx^n
\end{aligned}\tag{44}$$

となることが分かります．ここで，第一項は，$n-1\rightsquigarrow n$ と書き直すと，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}\\
&\quad=\sum_{n=2}^{\infty}\{(n-1)+1\}(n-1)a_{(n-1)+1}x^{n-1}\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n\\
&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります．[*11] 同様に，第三項も，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\gamma na_nx^{n-1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma\{(n-1)+1\}a_{(n-1)+1}x^{n-1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma(n+1)a_{n+1}x^n
\end{aligned}$$

と表わせることが分かります．また，第二項，第四項も，

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+\beta+1)na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+\beta+1)na_nx^n$$

と表わせることに注意して，(44) 式を $x$ のベキについて整理してみると，

$$\begin{aligned}
&x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}(x)+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx}(x)\\
&\qquad-\alpha\beta F(x)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)n+\gamma(n+1)\}a_{n+1}x^n\\
&\qquad-\sum_{n=0}^{\infty}\{n(n-1)+(\alpha+\beta+1)n+\alpha\beta\}a_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}x^n\\
&\qquad-\sum_{n=0}^{\infty}\{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta\}a_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)a_n\}x^n
\end{aligned}$$

となることが分かります．したがって，ベキ級数

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

が与えられた微分方程式を満たすための必要十分条件は，すべての自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)a_n=0\tag{45}$$

が成り立つことであることが分かります． いま，$\gamma\notin\{0,-1,-2,\cdots\}$ なので，勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$

*11） このような添字の書き換えに慣れていない方は，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}\\
&\quad=2\cdot1\cdot a_2x+3\cdot2\cdot a_3x^2+4\cdot3\cdot a_4x^3+\cdots\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n
\end{aligned}$$

というように，一旦，「$\sum$」を外してから，$x^n$ の係数がどうなるかということを考えて，式変形をしてみて下さい．

に対して, $\gamma+n\neq 0$ となることに注意すると, (45) 式は,

$$a_{n+1}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\cdot a_n$$

と表わされることが分かります. ここで, $n+1\rightsquigarrow n$ と書き直すと, $n\geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}\cdot a_{n-1}\\&=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}\cdot\\&\quad\frac{(\alpha+n-2)(\beta+n-2)}{(n-1)(\gamma+n-2)}\cdot a_{n-2}\\&=\cdots\\&=\frac{(\alpha+n-1)\cdots\alpha(\beta+n-1)\cdots\beta}{n!\cdot(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\cdots\gamma}\cdot a_0\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\cdot a_0\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, ベキ級数で表わされる微分方程式の解は, 勝手な実数 $a_0\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}F(x)=a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\&\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n\end{aligned}$$

と表わされることが分かります.

(2) $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ に対して, $F(0)=a_0$ となるので, $F(0)=1$ となる解は, $a_0=1$ として, (1) の結果から,

$$\begin{aligned}F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\&\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n\end{aligned}\qquad(46)$$

という式で与えられることが分かります. いま, $x\in\mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってきて,

$$\begin{aligned}c_0&=1\\c_n&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n,\ (n\geq 1)\end{aligned}$$

と定めると,

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

と表わされることが分かります. また, $\alpha,\beta\notin\{0,-1,-2,-3,\cdots\}$ なので, $x\neq 0$ のとき, 勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $c_n\neq 0$ となることに注意します.[*12)]

そこで, この級数の収束, 発散を調べるために, $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ を考えてみると,

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|&=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\cdot x\right|\\&=\left|\frac{(\frac{\alpha}{n}+1)(\frac{\beta}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n})(\frac{\gamma}{n}+1)}\cdot x\right|\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\frac{\alpha}{n}+1)(\frac{\beta}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n})(\frac{\gamma}{n}+1)}\cdot x\right|\\&=|x|\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, 第 5 回の問 2 のところで説明した**級数の収束判定法**より,

$$\begin{cases}|x|<1\Longrightarrow F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\ \text{は絶対収束する.}\\|x|>1\Longrightarrow F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\ \text{は発散する.}\end{cases}$$

となることが分かります. よって, (46) 式で与えられるベキ級数の収束半径 $r$ は, $r=1$ となることが分かります.

## 7. 問 3 を見直すと

**微分方程式の解を求める方法**として, **ベキ級数を用いて解を求めるという方法**があります. 皆さんに, このような方法を紹介することと, **ベキ級数の収束半径**を求めるちょうど良い演習問題になるのではないかと思い, 問 3 を出題してみました.

そこで, ここでは, 問 3 の例をもとにして, こうした**微分方程式の解法**について見返してみることにします. 問 3 では, 取りあえず**収束の問題**などは全く無視して, **ベキ級数**

$$\boldsymbol{F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}$$

**を形式的に考えて, これを形式的に項別微分したものを微分方程式に代入してから $\boldsymbol{x}$ のベキについて整理してみる**ことで,

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}(x)+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx}(x)$$

*12) $n_0\in\mathbb{N}$ として, $\alpha=-n_0$, または, $\beta=-n_0$ となるときには, $n>n_0$ となる自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $c_n=0$ となることが分かりますから, $F(x)$ は $n_0$ 次の多項式になることが分かります.

$$
\begin{aligned}
&-\alpha\beta F(x)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}\\
&\qquad -(\alpha+n)(\beta+n)a_n\}\,x^n \qquad (47)
\end{aligned}
$$

という表示を得ました．このとき, (47) 式の右辺に現われた級数の $x^n$ の各係数がすべて 0 であれば, この級数は恒等的に 0 となる定数関数を表わすことになりますから,**「形式的に」微分方程式が満たされる**ことになります.*13)

そこで, この条件を具体的に書いてみると,

$$
\begin{aligned}
&(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}\\
&\qquad =(\alpha+n)(\beta+n)a_n,\ (n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

というように, $\boldsymbol{F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}$ **の係数からなる数列** $\boldsymbol{\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}}$ **に対する漸化式が得られる**ことが分かります．さらに, この漸化式を具体的に解いてみることで,

$$
\begin{aligned}
F(x)=a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\
&\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n
\end{aligned}
\qquad (48)
$$

という表示が得られました．こうして, 形式的に (48) 式という解が得られましたが, このようにベキ級数が収束するかどうかということを全く気にせずに, 形式的に求めた微分方程式の解のことを**形式解**と呼んだりします.

さて, (48) 式で与えられる級数は具体的な級数ですから, **その収束半径を問題にする**ことができます．実際, 問 3 の (2) で見たように, ( $a_0\neq 0$ のとき, ) この級数の収束半径 $r$ は, $r=1$ となることが分かります．したがって, $\boldsymbol{x\in(-1,1)}$ **に対して, (48) 式で与えられる級数の値** $\boldsymbol{F(x)}$ **はきちんと定まる**ことが分かりますから, $F(x)$ は $F:(-1,1)\to\mathbb{R}$ という関数を定めることが分かります．そこで, ここまで議論を進めてから, **この** $\boldsymbol{F:(-1,1)\to\mathbb{R}}$ **という関数に対して, 最初の議論を行なった**のだと考えてみることにします．すると, 第 5 回の問 3 のところで見たように, **このような関数は何度でも微分ができ, その導関数はベキ級数による表示を項別微分することによって得られます**から, 今度は, (47) 式の右辺もきちんとした意味を持ち, **区間** $\boldsymbol{(-1,1)}$ **において (47) 式が成り立つ**ということが分かります．ところが, $F(x)$ の係数は, もともと (47) 式の右辺が 0 になるように定めたのですから, **区間** $\boldsymbol{(-1,1)}$ **において,**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}(x)+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx}(x)}\\
\boldsymbol{-\alpha\beta F(x)=0}
\end{aligned}
$$

**となる**ことが分かります．こうして, (48) 式で求めた**形式解**は, **ベキ級数表示の収束域である区間** $\boldsymbol{(-1,1)}$ **上で本当の解を定めている**ことが確かめられました.

以上のように, この方法の戦略は,

(イ) **最初に, 形式的にベキ級数を微分方程式に代入することで「形式解」を求める.**

**(ロ) 次に, こうした形式解に対する収束半径** $\boldsymbol{r}$ **をきちんと求めることで, ベキ級数の収束域である区間** $\boldsymbol{(-r,r)}$ **上で形式解が本当の解であることを保証する.**

という二つのステップを通して微分方程式の解を求めるということであることが分かります．こうした方法で, 微分方程式の解の構造がすっきりと理解できるような代表的な例が,

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x)-3\frac{dF}{dx}(x)+2F(x)=0$$

や

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x)-2\frac{dF}{dx}(x)+F(x)=0$$

というような形をした**定数係数の線型微分方程式**です．興味のある方は, **上で述べたような戦略でこれらの方程式の解を求めてみて, それらの解がどのような関数の Taylor 展開になっているのか**ということを考えてみて下さい．その際に,

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)'=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

となることに注目して,

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

というように係数を付け替えて議論を行なってみると, 少し議論が見やすくなるかもしれません.

さて, 問 3 で取り上げた微分方程式は **Gauss の超幾**

*13) ここで,「形式的に」と言ったのは, 今の段階では, それぞれの実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して, $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ という値がきちんと定まっているのかどうかということが分からないので, (47) 式の右辺の意味があまりハッキリしないからです.

**何微分方程式**と呼ばれていて, Gauss や Riemann などの研究を受け継ぐ形で, 現在でも多くの数学者を魅了し続けている微分方程式の代表格です. また, (48) 式で与えられる超幾何微分方程式のベキ級数解 ( の $a_0 = 1$ としたもの ) を **Gauss の超幾何関数**と呼んだりします. いま, **二項展開**を一般化して, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = (1-x)^{-\alpha} \tag{49}$$

という関数を考えると, $f(x)$ の Taylor 展開は,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} x^n$$

となることが分かります.[*14] これを, (48) 式と比べてみると, **Gauss の超幾何級数とは, (49) 式の関数 $f(x)$ を一般化したような関数である**ことが分かります.

*14) 皆さん, 確かめてみて下さい.