

数学 IB 演習 (第 12 回)

問 1. $a > 0, b > 0$ とするとき, 積分

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$$

の値を求めよ.

問 2. $x > 0$ のとき,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

という積分の値がきちんと定まるとは認めて, 次の問に答えよ.

- (1) $\Gamma(1), \Gamma(2)$ の値を求めよ.
- (2) 勝手な正の実数 $0 < x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

となることを示せ.

- (3) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\Gamma(n)$ の値を求めよ.

問 3.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ に対して,

$$x(1-x) \frac{d^2 F}{dx^2}(x) + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{dF}{dx}(x) - \alpha\beta F(x) = 0$$

という微分方程式を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 上の微分方程式を満たすベキ級数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

をすべて求めよ.

- (2) $\alpha, \beta \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ のとき, (1) で求めたベキ級数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

で, $F(0) = 1$ となるものに対して, その収束半径を求めよ.