

数学 IB 演習 (第 11 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 問 1 を見直すと	2
3. 双曲線関数とは	4
4. x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分について	10
5. 問 2 の解答	15
6. 問 2 を見直すと	16
7. 曲線の長さを求めるには	17
8. 曲線の長さとは *	20
9. 無限の長さを持つ曲線について *	22
10. 滑らかな曲線の長さについて *	24
11. 問 3 の解答	27
12. 問 3 を見直すと	29

1. 問 1 の解答

(1) $x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とすると,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{\sinh^2 t + 1} \\ &= \sqrt{\cosh^2 t} \\ &= \cosh t \\ dx &= \cosh t \cdot dt\end{aligned}$$

となるので, 積分定数を除いて,

$$\begin{aligned}I &= \int \cosh^2 t \, dt \\ &= \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sinh 2t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \cdot 2 \sinh t \cosh t \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) \quad (1)$$

となることが分かります.

(2) いま, $T = e^t$ とすると,

$$\begin{aligned}x &= \sinh t \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= \frac{T - T^{-1}}{2}\end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned}0 &= T^2 - 2xT - 1 \\ &= (T - x)^2 - (x^2 + 1)\end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$T = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

となることが分かりますが, $T = e^t > 0$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned}e^t &= T \\ &= x + \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (2)$$

となることが分かります. 一方,

$$\begin{aligned}\cosh t &= \sqrt{\sinh^2 t + 1} \\ &= \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

となることが分かりますから, (1) 式, (2) 式と合せて,

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x\sqrt{x^2 + 1} \right\}$$

となることが分かります.

2. 問1を見直すと

微積分学の教科書を見ると、問1に挙げたような積分は基本的な積分なので覚えることが望ましいなどと書かれているのを目にすることがあります。しかしながら、問1で見たように、 $\sqrt{x^2+1}$ の原始関数は結構複雑な形をしていて、余り覚え易い形であるとは言えません。これまでも何度か注意しましたが、数学では公式を覚えるということは余り重要なことではなくて、むしろそれを導くためのアイデアをしっかりと納得して、いつでも自分で工夫をして公式を導き出せるということが大切です。例えば、問1のような積分も、単に結果を覚えるのではなく、どうしたら積分の結果をより自然な形で理解できるのかということを考えることの方が大切です。そこで、皆さんが、問1のような積分の結果をいつでも自分で再現できるようになるための参考にならないかと考えて、問1を出題してみました。

一般に、二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて、

$$g(x) = f(x, \sqrt{x^2+1}) \quad (3)$$

という形に表わせるような一変数関数 $g(x)$ を x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式と呼びます。^{*1)} 4節で見ると、このような「 x と $\sqrt{x}$ の二次式の有理式の積分」も「できる積分」の代表的な例です。第9回の問1のところでは、「できる積分」の「裏」には代数曲線 C が隠れていて、「代数曲線 C 上の点の有理関数を用いたパラメータ付け」を考えることにより、「できる積分」が「有理関数の積分」に帰着できるということを見ました。^{*2)} そこで、一般的な状況について考える前に、ここでは、「 x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式の積分」を「対応する代数曲線 C 上の点の有理関数を用いたパラメータ付け」という観点から見直してみます。

いま、勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $(x, \sqrt{x^2+1}) \in \mathbb{R}^2$ は、

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1\} \quad (4)$$

という双曲線上の点を表わしていますから、(3)式より、「 x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式」とは「二変数関数

*1) すなわち、 x と x^2+1 の有理式 $g(x)$ とは、 x はそのままにして、 $\sqrt{x^2+1} \rightsquigarrow y$ と書き直したときに、二変数の有理関数 $f(x, y)$ になるような関数のことです。

*2) これらの事柄については、第8回と第9回の解説を参照して下さい。

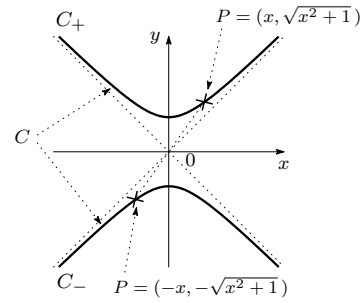


図1 双曲線 C 上の点 P は、二つの成分 C_+ , C_- 上で、それぞれ、 $P = (x, \sqrt{x^2+1}) \in C_+$, $P = (-x, -\sqrt{x^2+1}) \in C_-$ とパラメータ付けできる。

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を双曲線 C 上に制限したものであると解釈できることが分かります。すなわち、「 x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式の積分」の「裏」には、(4)式で与えられる双曲線 C が隠れていることが分かります。実際には、双曲線 C は、

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1, y > 0\}$$

$$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1, y < 0\}$$

という二つの成分からなり、双曲線 C 上の点 P は、 C_+ 上では、

$$P = (x, \sqrt{x^2+1}) \in C_+$$

というように、 C_- 上では、

$$P = (-x, -\sqrt{x^2+1}) \in C_-$$

というようにパラメータ付けできることが分かります(図1を参照)。ここで、もし、双曲線 C_+ 上の点 P が、二つの有理関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて、

$$P = (\varphi(t), \psi(t)) \in C_+ \quad (5)$$

というようにパラメータ付けできることが分かったとすると、積分変数を x から t に変数変換することで、「 x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式の積分」は、

$$\int f(x, \sqrt{x^2+1}) dx = \int f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \quad (6)$$

と姿を変えることが分かりますから、「 x と $\sqrt{x^2+1}$ の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着できることが分かります。

そこで、双曲線 C 上の点 P に対して、(5)式のような「有理関数を用いたパラメータ付け」が取れるかどうかということを考えてみます。いま、双曲線 C の定

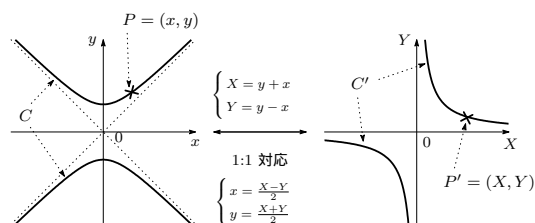


図2 $X = y + x, Y = y - x$ と $x = \frac{X-Y}{2}, y = \frac{X+Y}{2}$ という関係によって、双曲線 C 上の点 $P = (x, y)$ と双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y)$ が一対一に対応する。

義方程式 $y^2 = x^2 + 1$ は、

$$\begin{aligned} 1 &= y^2 - x^2 \\ &= (y + x)(y - x) \end{aligned}$$

というように書き直せることに注意すると、

$$\begin{cases} X = y + x \\ Y = y - x \end{cases} \quad (7)$$

と変数変換することで、双曲線 C 上の点 $P = (x, y) \in C$ は、

$$C' = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid XY = 1\}$$

という双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y) \in C'$ に写されることが分かります。このとき、(7) 式は、 (x, y) について逆に解くことができ、

$$\begin{cases} x = \frac{X-Y}{2} \\ y = \frac{X+Y}{2} \end{cases} \quad (8)$$

となりますから、(7) 式、(8) 式によって、双曲線 C 上の点 $P = (x, y)$ と双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y)$ が一対一に対応していることが分かります (図2を参照)。

さて、第9回の問1のところで見たとおり、双曲線 C' 上の点 P' は、

$$P' = \left(t, \frac{1}{t}\right) \in C' \quad (9)$$

というように有理関数を用いてパラメータ付けできますが、(8) 式を用いて、これを双曲線 C 上に写すと、双曲線 C 上の点 P も、

$$P = \left(\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right)\right) \in C \quad (10)$$

というように有理関数を用いてパラメータ付けできる

ことが分かります。したがって、(6) 式から、積分変数を x から t へ変数変換することで、「 x と $\sqrt{x^2 + 1}$ の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着できることが分かります。いま、(9) 式、(7) 式から、

$$\begin{aligned} t &= X \\ &= y + x \end{aligned} \quad (11)$$

となることが分かりますが、双曲線 C_+ 上では、

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \quad (12)$$

でしたから、(11) 式、(12) 式から、このことは、

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (13)$$

というように変数変換することを意味しています。^{*3)}

こうして、双曲線 C_+ 上の点の有理関数を用いたパラメータ付けを具体的に求めることができましたから、(6) 式、(13) 式から、例えば、 $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ と変数変換することで、

「 x と $\sqrt{x^2 + 1}$ の有理式の積分」

$$\begin{aligned} &\downarrow t = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ と変数変換} \\ &\text{「有理関数の積分」} \end{aligned}$$

というように「 x と $\sqrt{x^2 + 1}$ の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着することが分かりました。実際、 $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ としてみると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= -x + \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned} \quad (14)$$

となることが分かりますから、(13) 式、(14) 式から、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) = x \\ \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \quad (15)$$

となることが分かります。また、(13) 式、(15) 式から、

$$\begin{aligned} dt &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ &= \frac{t}{\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right)} dx \end{aligned}$$

^{*3)} (10) 式から、 $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)$ となることが分かりますが、 C_+ 上では $t > 0$ となることに注意して、この式を t について解くことで、(13) 式を求めることもできます。

$$= \frac{2t^2}{t^2 + 1} dx \quad (16)$$

となることも分かります。したがって、(15) 式、(16) 式から、

$$\begin{aligned} & \int f(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx \\ &= \int f\left(\frac{t^2 - 1}{2t}, \frac{t^2 + 1}{2t}\right) \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \quad (17) \end{aligned}$$

というように、「 x と $\sqrt{x^2 + 1}$ の有理式の積分」が「有理関数の積分」に帰着できることが分かります。

例えば、問 1 の例では、 $f(x, y) = y$ ですが、上の変数変換を用いて、

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \log t - \frac{1}{2t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log t + \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x\sqrt{x^2 + 1} \right\} \end{aligned}$$

というように、直接、計算することもできます。^{*4)}

ただし、 $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ という変数変換は、あまり記憶に易しい形はしていません。また、実際に有理関数の積分に帰着しようとしたときにも、あちらこちらに「 $\sqrt{\quad}$ 」が現われて、計算間違いをしてしまう可能性も高くなってしまいます。以下で見るように、このような「 x と $\sqrt{x}$ の二次式の有理式の積分」の場合には、いきなり「有理関数の積分」に帰着するのではなく、例えば、

「 x と $\sqrt{x^2 + 1}$ の有理式の積分」
 $\downarrow$
「双曲線関数の有理式の積分」
 $\downarrow$
「有理関数の積分」

^{*4)} 最後の等式で、(15) 式を用いました。

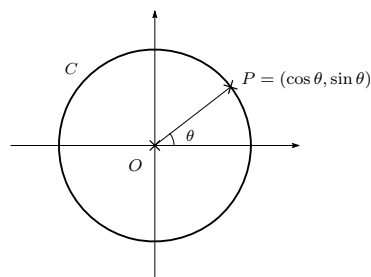


図 3 単位円 C 上の点 P には、 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ という自然なパラメータ付けが存在する。

というように二段階に分けて積分の変数変換を考察するという方針を取ることで、状況がより良く理解できるようになりますし、より信頼性のある計算もできるようになります。そうしたことを皆さんにも知っていただきたいと思って、問 1 を出題しました。

3. 双曲線関数とは

さて、2 節では、「 x と $\sqrt{x}$ の二次式の有理式の積分」の場合には、いきなり「有理関数の積分」に帰着するのではなく、二段階に分けて積分の変数変換を考察する方が状況がより良く理解できるということに注意しました。実際、4 節で見るように、「 x と $\sqrt{x}$ の二次式の有理式の積分」は「三角関数の有理式の積分」、あるいは、「指数関数の有理式の積分」に帰着できることが分かるのですが、そのときのアイデアは、単位円や双曲線の自然なパラメータ付けに注目するというところにあります。

皆さんよくご存じのように、単位円

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

上の点 P には、

$$P = (\cos \theta, \sin \theta) \in C \quad (18)$$

という三角関数を用いた自然なパラメータ付けが存在します (図 3 を参照)。そこで、ここでは、2 節に登場した双曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \quad (19)$$

に対して、(18) 式に対応するような「自然なパラメータ付け」が存在するかどうかということを考えることにします。^{*5)}

^{*5)} 2 節では、 $y^2 - x^2 = 1$ という式によって定義される双曲

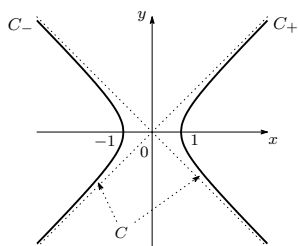


図 4 双曲線 C は、 $x \geq 1$ であるか、 $x \leq -1$ であるかに応じて、 C_+ 、 C_- という二つの成分を持つ。

いま、 $P = (x, y) \in C$ を双曲線 C 上の点とすると、

$$x^2 = y^2 + 1 \geq 1$$

となることが分かりますが、 $x \geq 1$ であるか、あるいは、 $x \leq -1$ であるかに応じて、双曲線 C は、

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \geq 1\}$$

$$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \leq -1\}$$

という二つの成分からなることが分かります (図 4 を参照)。そこで、前と同様に、

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

となることに注意して、

$$\begin{cases} X = x + y \\ Y = x - y \end{cases} \quad (20)$$

と変数変換してみると、双曲線 C 上の点 $P = (x, y) \in C$ は、

$$C' = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid XY = 1\}$$

という双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y) \in C'$ に写されることが分かります。また、(20) 式は、 (x, y) について逆に解くことができ、

$$\begin{cases} x = \frac{X+Y}{2} \\ y = \frac{X-Y}{2} \end{cases} \quad (21)$$

となりますから、(20) 式、(21) 式によって、双曲線 C 上の点 $P = (x, y)$ と双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y)$ が一対一に対応していることが分かります (図 5 を参照)。また、双曲線 C' も、 $X > 0, Y > 0$ であるか、あ

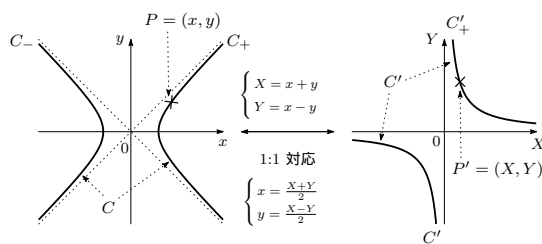


図 5 $X = x + y, Y = x - y$ と $x = \frac{X+Y}{2}, y = \frac{X-Y}{2}$ という関係によって、双曲線 C 上の点 $P = (x, y)$ と双曲線 C' 上の点 $P' = (X, Y)$ が一対一に対応する。

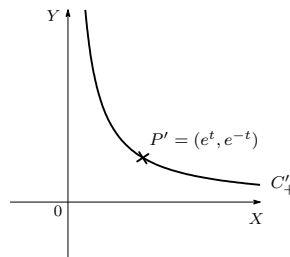


図 6 双曲線 C'_+ 上の点 P' は、指数関数を用いて、 $P' = (e^t, e^{-t})$ とパラメータ付けできる。

るいは、 $X < 0, Y < 0$ であるかに応じて、

$$C'_+ = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid XY = 1, X > 0, Y > 0\}$$

$$C'_- = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid XY = 1, X < 0, Y < 0\}$$

という二つの成分を持ちますが、上の対応のもとで、 C_+ の点は C'_+ の点に、 C_- の点は C'_- の点に対応することが分かります。

さて、第 9 回の問 1 のところで見たように、双曲線 C'_+ 上の点 P' は、

$$P' = (e^t, e^{-t}) \in C'_+ \quad (22)$$

というように指数関数を用いてパラメータ付けすることができます (図 6 を参照)*6)。そこで、前と同様に、(21) 式を用いて、このパラメータ付けを双曲線 C_+ 上に写してみると、

$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

となることが分かります。皆さんよくご存じのように、

線を考えましたが、単位円の場合との対応がよりハッキリするように、 $x \leftrightarrow y$ と文字を取り換えて、(19) 式のような双曲線を考えることにしました。

*6) 第 9 回の問 1 のところでは、指数関数の有理式を解釈するために、逆に、このようなパラメータ表示から双曲線 C' を見出したのでした。

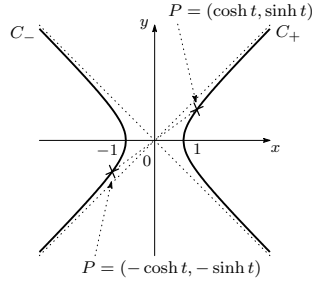


図 7 双曲線 C 上の点 P は、二つの成分 C_+, C_- 上で、それぞれ、 $P = (\cosh t, \sinh t) \in C_+$, $P = (-\cosh t, -\sinh t) \in C_-$ とパラメータ付けできる。

これは、双曲線関数

$$\begin{cases} \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad (23)$$

に他なりません。^{*7)} したがって、双曲線 C_+ 上の点 P には、

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_+ \quad (24)$$

という双曲線関数を用いたパラメータ付けが存在することが分かります (図 7 を参照)。全く同様に、双曲線 C'_- 上の点 P' は、

$$P' = (-e^t, -e^{-t}) \in C'_-$$

というように指数関数を用いてパラメータ付けすることができますが、(21) 式を用いて、このパラメータ付けを双曲線 C_- 上に写してみると、

$$\begin{cases} x = -\frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

となることが分かります。よって、双曲線 C_- 上の点 P は、

$$P = (-\cosh t, -\sinh t) \in C_-$$

というように双曲線関数を用いてパラメータ付けできることが分かります (図 7 を参照)。

さて、(23) 式から、双曲線関数の微分は、それぞれ、

$$(\cosh t)' = \sinh t, \quad (\sinh t)' = \cosh t$$

となることが分かります。また、三角関数の場合と同

様に、

$$\begin{cases} \cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \\ \sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \end{cases} \quad (25)$$

という双曲線関数の加法定理が成り立つことが分かります。^{*8)} したがって、双曲線関数の場合にも、これらの式を用いて、三角関数と同様の計算ができることが分かります。^{*9)} さらに、双曲線関数に対しては、

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

という式が成り立つことが分かりますが、^{*10)} これは、三角関数に対して、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

という式が成り立つことに似ています。こうした、三角関数と双曲線関数の類似は偶然なのでしょうか。

そこで、この点について考えてみるために、(23) 式を、指数関数 e^t, e^{-t} について、逆に解いてみます。すると、指数関数 e^t, e^{-t} は、双曲線関数 $\cosh t, \sinh t$ を用いて、

$$\begin{cases} e^t = \cosh t + \sinh t \\ e^{-t} = \cosh t - \sinh t \end{cases} \quad (26)$$

と表わせることが分かります。すると、何やら、(26) 式は、三角関数と指数関数を結びつける Euler の公式

$$\begin{cases} e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta \\ e^{-\sqrt{-1}\theta} = \cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta \end{cases} \quad (27)$$

に似ています。また、(27) 式を、三角関数 $\cos \theta, \sin \theta$ について、逆に解いてみると、

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2\sqrt{-1}} \end{cases} \quad (28)$$

となることが分かりますが、これは、(23) 式という双曲線関数の定義式とそっくりです。

第 3 回の問 2 のところで見たように、もともと、Euler の公式は、指数関数 e^t が、

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \quad (29)$$

*8) 皆さん、確かめてみて下さい。

*9) 実際、問 1 の解答では、そのような計算を行ないました。

*10) これは、双曲線 C_+ 上の点が、 $P = (\cosh t, \sinh t)$ とパラメータ付けできるということに他なりません。

というように「多項式の姿」に「化ける」ことに注目して、(29) 式の右辺の表示を用いて、変数 t のところに複素数を代入することによって得られたものでした。そこで、ここでも、変数 t のところに複素数を代入することを許して、複素関数としての指数関数を考えてみることにします。すなわち、勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

と定めることにします。

こうして、指数関数を複素関数に拡張して考えることができるようになりましたから、

$$\begin{cases} \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{cases} \quad (30)$$

というように、双曲線関数も複素関数に拡張して考えてみることにします。すると、(23) 式、(30) 式から、(複素) 双曲線関数 $\cosh z, \sinh z$ の実数軸上の点 $z = t \in \mathbb{R}$ での値が、それぞれ、 $\cosh t, \sinh t$ であることが分かります。一方、(28) 式、(30) 式から、(複素) 双曲線関数 $\cosh z, \sinh z$ の虚数軸上の点 $z = \sqrt{-1}\theta \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ での値は、それぞれ、 $\cos \theta, \sqrt{-1} \sin \theta$ となることが分かります。すなわち、複素数の世界にまで関数を拡張して考えてみると、 $t, \theta \in \mathbb{R}$ として、

$$\begin{aligned} \cosh t &\xleftarrow{z=t} \cosh z \xrightarrow{z=\sqrt{-1}\theta} \cos \theta \\ \sinh t &\xleftarrow{z=t} \sinh z \xrightarrow{z=\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \sin \theta \end{aligned} \quad (31)$$

というように、本質的に双曲線関数と三角関数は同じ関数であることが分かります。

さて、第3回の問2のところでも注意したように、勝手な複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (32)$$

となることが分かります。^{*11)} また、(30) 式を(複素) 指数関数 e^z, e^{-z} について、逆に解いてみると、

$$\begin{cases} e^z = \cosh z + \sinh z \\ e^{-z} = \cosh z - \sinh z \end{cases} \quad (33)$$

となることが分かります。よって、(30) 式、(32) 式、(33) 式から、勝手な複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \frac{1}{2}(e^{z+w} + e^{-z-w}) \\ &= \frac{1}{2}(e^z e^w + e^{-z} e^{-w}) \end{aligned}$$

*11) これを指数関数の加法定理と呼びます。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(e^z e^w + e^{-z} e^{-w}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\cosh z + \sinh z)(\cosh w + \sinh w) \\ &\quad + (\cosh z - \sinh z)(\cosh w - \sinh w)\} \\ &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \end{aligned}$$

となることが分かります。全く同様に、

$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

となることが分かります。すなわち、複素数の世界に拡張して考えても、

$$\begin{cases} \cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \\ \sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w \end{cases} \quad (34)$$

という双曲線関数の加法定理が成り立つことが分かります。そこで、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として、 $z = \alpha, w = \beta$ というように z や w の値を実数軸上に特殊化してみると、(31) 式から、(34) 式は(25) 式の加法定理になることが分かります。一方、勝手な実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\sinh \sqrt{-1}\theta = \sqrt{-1} \sin \theta \quad (35)$$

となることに注意して、 $z = \sqrt{-1}\alpha, w = \sqrt{-1}\beta$ というように z や w の値を虚数軸上に特殊化してみると、やはり、(31) 式から、(34) 式は、

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \quad (36)$$

という三角関数の加法定理に「化ける」ことが分かります。すなわち、三角関数の加法定理と双曲線関数の加法定理は本質的に同じものであることが分かりました。また、(25) 式と(36) 式の間に「微妙な符号の違い」が見られるのは、(35) 式のように、 $\sinh z$ と $\sin z$ の定義の間に $\sqrt{-1}$ 倍の「微妙なずれ」があることが原因であることも分かりました。

さて、第9回の問1のところでは、与えられた代数曲線が有理曲線かどうかということ、すなわち、代数曲線上の点が有理関数を用いてパラメータ付けできるかどうかということは、代数曲線を「複素化」して考えるとハッキリするということを注意しました。そこで、我々の双曲線 C も、

$$C^{\mathbb{C}} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 - w^2 = 1\}$$

というように「複素化」して考えてみることにします。また、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ がどのような形をしているのかを考えてみるために、双曲線 C' の方も

$$C'^{\mathbb{C}} = \{(Z, W) \in \mathbb{C}^2 \mid ZW = 1\}$$

というように「複素化」して考えてみることにします。すると、前と同様に、「複素化」しても、

$$\begin{cases} Z = z + w \\ W = z - w \end{cases}, \quad \begin{cases} z = \frac{Z+W}{2} \\ w = \frac{Z-W}{2} \end{cases} \quad (37)$$

という対応によって、 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点 $P = (z, w)$ と $C'^{\mathbb{C}}$ 上の点 $P' = (Z, W)$ がぴったり一対一に対応することが分かります。すなわち、

$$C^{\mathbb{C}} \ni P = (z, w) \longleftrightarrow P' = (Z, W) \in C'^{\mathbb{C}} \quad (38)$$

という対応によって、

$$C^{\mathbb{C}} \cong C'^{\mathbb{C}}$$

というように(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ と(複素) 双曲線 $C'^{\mathbb{C}}$ が同一視できることが分かります。また、 $ZW = 1$ という定義式に注目すると、

$$C'^{\mathbb{C}} \ni P' = (Z, \frac{1}{Z}) \longleftrightarrow Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (39)$$

という対応によって、

$$C'^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

というように同一視できることが分かります。したがって、(37) 式、(38) 式、(39) 式から、

$$C^{\mathbb{C}} \ni P = (z, w) \longleftrightarrow z + w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (40)$$

という対応によって、

$$C^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (41)$$

というように、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ は複素平面から原点を取り除いた空間 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ と同一視できることが分かりました。いま、

$$\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}} (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

というように、複素平面 $\mathbb{C}$ を Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ の部分集合とみなすことにすると、

$$C^{\mathbb{C}} \cong \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$$

というように、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ は Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ から二点を取り除いた曲面と同じ形をしていること

が分かります。^{*12)}

次に、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点のパラメータ付けについて考えてみることにします。いま、勝手な複素数 $u \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \cosh^2 u - \sinh^2 u \\ &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - (e^{2u} - 2 + e^{-2u}) \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$P = (\cosh u, \sinh u) \in C^{\mathbb{C}}$$

となることが分かります。一方、(37) 式と (39) 式から、(40) 式の同一視は、

$$C^{\mathbb{C}} \ni P = \left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}, \frac{Z-Z^{-1}}{2} \right) \longleftrightarrow Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (42)$$

と表わせることに注意します。すると、 $Z \neq 0$ となる勝手な複素数 $Z \in \mathbb{C}$ は適当な複素数 $u \in \mathbb{C}$ を用いて、

$$Z = e^u \quad (43)$$

という形に表わすことができますから、(42) 式、(43) 式から、 $C^{\mathbb{C}}$ 上の勝手な点 $P \in C^{\mathbb{C}}$ は適当な複素数 $u \in \mathbb{C}$ を用いて、

$$P = (\cosh u, \sinh u) \quad (44)$$

と表わせることが分かります。したがって、(44) 式によって、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点は漏れなくパラメータ付けされることが分かります。ただし、(43) 式には、 $n \in \mathbb{N}$ として、 u を $u \rightsquigarrow u + 2\pi\sqrt{-1}n$ と取り換えても Z の値は変わらないという不定性がありますから、(44) 式のパラメータ付けにも同じ不定性があるということになります。

さて、定義から、もともとの双曲線 C は、

$$C \subset C^{\mathbb{C}}$$

というように、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ の部分集合と見なせます。すなわち、(複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点のうち、 z 座標も w 座標もともに実数になる点が双曲線 C 上の点であると考えられます。一方、(複素) 双

^{*12)} Riemann 球面については、第 8 回と第 9 回の解説を参照して下さい。

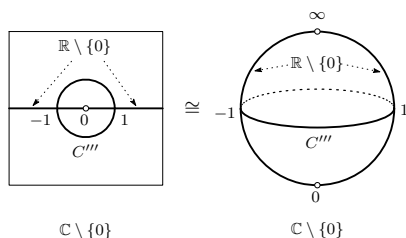


図 8 複素平面 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ とその部分集合である実数軸 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ や単位円 C''' の様子. 右図は左図の状況を Riemann 球面上で描いたもの.

曲線 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点のうち, z 座標は実数で w 座標は純虚数となる点を考えてみます. すると, $x, y \in \mathbb{R}$ として,

$$P = (x, \sqrt{-1}y) \in C^{\mathbb{C}} \iff x^2 + y^2 = 1 \quad (45)$$

となることが分かりますから, (45) 式の対応によって, 単位円

$$C'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

も, (複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ の部分集合と見なせることが分かります. すなわち, (複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ 上の点のうち, z 座標は実数で w 座標が純虚数になる点が単位円 C'' 上の点であると考えられます.

そこで, (41) 式の同一視のもとで, これら二つの部分集合が $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内のどのような部分集合と対応するのかを考えてみます. いま, (37) 式から,

$$z, w \in \mathbb{R} \iff Z, W \in \mathbb{R}$$

となることが分かりますから, (39) 式と合わせて考えると, 双曲線 C は,

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid Z \in \mathbb{R}\}$$

という実数軸 (から原点を取り除いたもの) と対応することが分かります. 一方, (40) 式から,

$$C^{\mathbb{C}} \ni P = (x, \sqrt{-1}y) \iff x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

と対応することが分かりますから, $\mathbb{R}^2$ 内の単位円 C'' は複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円

$$C''' = \{Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |Z| = 1\}$$

に対応することが分かります (図 8 を参照). また, これらの部分集合を Riemann 球面上に描いてみると, 図 8 の右図のような状況になることが分かります. そこで, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ がもう少し双曲線らしく見えるように, 北

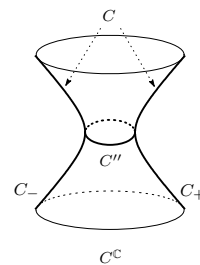


図 9 (複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ とその部分集合である双曲線 C や単位円 C'' の様子.

極や南極の近くでは Riemann 球面を少し押し広げて描くことにすると, 結局, (複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ とその部分集合である双曲線 C や単位円 C'' の様子は図 9 のようになっていることが分かります.

また, $t, \theta \in \mathbb{R}$ として, $u = t + \sqrt{-1}\theta$ と表わすことにすると,

$$Z = e^{t+\sqrt{-1}\theta} \in R \iff e^{\sqrt{-1}\theta} = \pm 1$$

となることが分かりますから, (44) 式のパラメータ付けは, 双曲線 C 上では,

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_+$$

$$P = (-\cosh t, -\sinh t) \in C_-$$

と表わせることが分かります. 一方,

$$|Z| = |e^{t+\sqrt{-1}\theta}| = 1 \iff e^t = 1$$

となることが分かりますから, (44) 式のパラメータ付けは, 単位円 C'' 上では,

$$\begin{aligned} P &= (\cosh \sqrt{-1}\theta, \sinh \sqrt{-1}\theta) \\ &= (\cos \theta, \sqrt{-1} \sin \theta) \end{aligned} \quad (46)$$

と表わせることが分かります. ただし, 二番目の等号では, (31) 式を用いました. いま, 単位円 C'' は, (45) 式のような形で (複素) 双曲線 $C^{\mathbb{C}}$ に埋め込まれていたことに注意すると, (46) 式のパラメータ付けは, 単位円 C'' 上の点 $P'' \in C''$ に対する

$$P'' = (\cos \theta, \sin \theta) \in C''$$

という三角関数を用いた自然なパラメータ付けに他ならないことが分かります.

以上から, 単位円

$$C'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

上の点 P'' に対する

$$P'' = (\cos \theta, \sin \theta) \in C''$$

という「三角関数を用いた自然なパラメータ付け」の対応物として、双曲線

$$C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \geq 1\}$$

上の点 P に対する

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_+$$

という「双曲線関数を用いた自然なパラメータ付け」や、双曲線

$$C'_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0, y > 0\}$$

上の点 P' に対する

$$P = (e^t, e^{-t}) \in C'_+$$

という「指数関数を用いた自然なパラメータ付け」が理解できることが分かりました。また、複素数の世界に拡張して考えると、これらのパラメータ付けは本質的に同じパラメータ付けであることも分かりました。4節で見るように、これらの「自然なパラメータ付け」が「 x と $\sqrt{x}$ の二次式」の有理式の積分を「三角関数の有理式の積分」、あるいは、「指数関数の有理式の積分」に帰着する際に活躍することになります。

4. x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式の積分について

いま、 $a, b, c \in \mathbb{R}$ として、 x の二次式 $ax^2 + bx + c$ が、勝手にひとつ与えられているとします。このとき、二変数の有理関数 $f(x, y)$ を用いて、

$$g(x) = f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

という形に表わせるような一変数関数 $g(x)$ を x と $\sqrt{x}$ の二次式 の有理式、あるいは、二次の無理関数と呼びます。そこで、ここでは、

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (47)$$

という「 x と $\sqrt{x}$ の二次式」の有理式の積分について考えてみることにします。

以下では、本当の二次式の場合を問題としたいので、 $a \neq 0$ であると仮定することにします。^{*13)} また、二次式が重根を持つ場合、すなわち、 $D = b^2 - 4ac = 0$ と

^{*13)} 興味のある方は、 $a = 0$ のときには、(47) 式の積分の「裏」に隠れている代数曲線 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = bx + c\}$

なる場合には、 $ax^2 + bx + c = 0$ の根を $\alpha \in \mathbb{R}$ として、

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

と表わすことができますから、

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot |x - \alpha|$$

となることが分かります。よって、この場合には、 $x \leq \alpha$ となる場合と $x \geq \alpha$ となる場合とで、場合分けをして考えることで、(47) 式の積分は初めから有理関数の積分に帰着していることが分かります。

そこで、以下では、 $a \neq 0$ 、 $D = b^2 - 4ac \neq 0$ であるとして、「 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の有理式の積分」が「三角関数の有理式の積分」、あるいは、「指数関数の有理式の積分」に帰着できることを順番に見てゆくことにします。そのためのアイデアは、「二次式を見やすい形に変換する」ということと、「単位円や双曲線の自然なパラメータ付けに注目する」ということです。

そこで、まず、「二次式を見やすい形に変換する」ということを考えてみることにします。いま、二次式に現われる三つの項のうち一次式の項を消すことを考えて、二次式を平方完成してみると、

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} \end{aligned}$$

となることが分かります。よって、 $x' = x + \frac{b}{2a}$ と変数変換することで、

「 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の有理式の積分」

$$\downarrow x' = x + \frac{b}{2a} \text{ と変数変換}$$

「 x' と $\sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}}$ の有理式の積分」

と帰着できることが分かります。

そこで、さらに、二次式の定数項を ± 1 にすることを考えてみます。すると、 $a > 0$ 、 $D > 0$ の場合には、

$$\begin{aligned} \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} &= \sqrt{|a|x'^2 - \frac{|D|}{4|a|}} \\ &= \sqrt{\frac{|D|}{4|a|}} \cdot \sqrt{\frac{4|a|^2}{|D|} x'^2 - 1} \end{aligned}$$

と変形できることが分かりますから、 $X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}} x'$ と

上の点が、 y というパラメータを用いて有理関数によるパラメータ付けができることを確かめてみて下さい。また、 $x \rightsquigarrow y = \sqrt{bx + c}$ と変数変換することで、実際に、(47) 式の積分が有理関数の積分に帰着できることを確かめてみて下さい。

変数変換することで,

$$\begin{aligned} & \text{「 } x' \text{ と } \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} \text{ の有理式の積分」} \\ & \quad \downarrow X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}x' \text{ と変数変換} \end{aligned}$$

「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

と帰着できることが分かります. また, $a > 0, D < 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} &= \sqrt{|a|x'^2 + \frac{|D|}{4|a|}} \\ &= \sqrt{\frac{|D|}{4|a|}} \cdot \sqrt{\frac{4|a|^2}{|D|}x'^2 + 1} \end{aligned}$$

と変形できることが分かりますから, $X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}x'$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned} & \text{「 } x' \text{ と } \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} \text{ の有理式の積分」} \\ & \quad \downarrow X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}x' \text{ と変数変換} \end{aligned}$$

「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

と帰着できることが分かります. さらに, $a < 0, D > 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} &= \sqrt{-|a|x'^2 + \frac{|D|}{4|a|}} \\ &= \sqrt{\frac{|D|}{4|a|}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4|a|^2}{|D|}x'^2} \end{aligned}$$

と変形できることが分かりますから, $X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}x'$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned} & \text{「 } x' \text{ と } \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} \text{ の有理式の積分」} \\ & \quad \downarrow X = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}x' \text{ と変数変換} \end{aligned}$$

「 X と $\sqrt{1 - X^2}$ の有理式の積分」

と帰着できることが分かります. 最後に, $a < 0, D < 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} \sqrt{ax'^2 - \frac{D}{4a}} &= \sqrt{-|a|x'^2 - \frac{|D|}{4|a|}} \\ &= \sqrt{-\left(|a|x'^2 + \frac{|D|}{4|a|}\right)} \end{aligned}$$

となり, 「 $\sqrt{\quad}$ 」の中身が負になってしまいますから, そもそも, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ という式が意味を持たないことが分かります.

以上から, 適当な実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて, $X = \alpha(x + \beta)$ と変数変換することで,

「 x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ の有理式の積分」

$$\downarrow X = \alpha(x + \beta) \text{ と変数変換}$$

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

(ロ) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

(ハ) 「 X と $\sqrt{1 - X^2}$ の有理式の積分」

というように「見やすい形」の二次式の場合に帰着できることが分かります. 上で行なった議論から, 実際には,

$$\alpha = \frac{2|a|}{\sqrt{|D|}}, \quad \beta = \frac{b}{2a} \quad (48)$$

となることが分かりますが, 個々の具体的な積分に対して上のような式変形を行なってみれば, α, β の値をどう取るべきかということは自然に分かりますから, (48) 式のような値を覚える必要は全くありません.

そこで, 後は, 上の (イ), (ロ), (ハ) の三つのタイプの積分が計算できれば良いということになります. この節の最初にも注意したように, そのためのアイデアは, それぞれの積分の「裏」に隠れている双曲線や単位円の自然なパラメータ付けに注目するということです.

さて, 2 節では, (ロ) のタイプの積分の「裏」には双曲線が隠れていることを見ましたが, 同様に考えると, (イ), (ロ), (ハ) の三つのタイプの積分の「裏」には, それぞれ,

$$(イ) \quad C_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1\}$$

$$(ロ) \quad C_2 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y^2 - X^2 = 1\}$$

$$(ハ) \quad C_3 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 = 1\}$$

という双曲線や単位円が隠れていることが分かります.

3 節で見たように, これらの双曲線や単位円には「双曲線関数や三角関数を用いた自然なパラメータ付け」が存在します. そこで, それぞれの積分を, 対応する双曲線や単位円の「自然なパラメータ」を用いて表わすとどうなるかということを順番に見てみることにします.

まず, (イ) のタイプの積分について考えてみます. すると, 3 節で見たように, 双曲線 C_1 は,

$$C_{1,+} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1, X \geq 1\}$$

$$C_{1,-} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 - Y^2 = 1, X \leq -1\}$$

という二つの成分を持ち, 双曲線 $C_{1,+}$ 上の点 P は,

$$P = (\cosh t, \sinh t) \in C_{1,+} \quad (49)$$

というように「双曲線関数を用いた自然なパラメータ付け」を持つのでした (図 10 を参照). そこで,

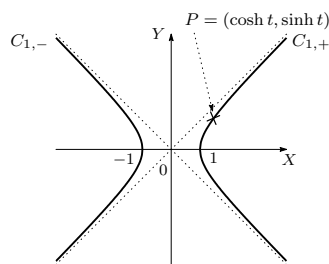


図 10 双曲線 $C_{1,+}$ 上の点 P は双曲線関数を用いて, $P = (\cosh t, \sinh t)$ とパラメータ付けできる.

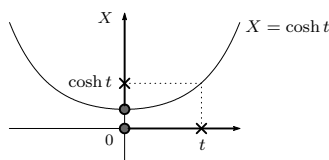


図 11 t と $X = \cosh t$ を一対一に対応させるためには, t の動く範囲として, $0 \leq t$ という範囲と $t \leq 0$ という範囲のうちのいずれかを選ばなければならない.

$$X = \cosh t \quad (50)$$

と変数変換したときに, (イ) のタイプの積分がどのように姿を変えるのかということを考えてみます.

このとき注意しないといけないことは, 勝手な実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\cosh(-t) = \cosh t$ となりますから, (50) 式によって, $1 \leq X$ となる実数 $X \in \mathbb{R}$ と実数 $t \in \mathbb{R}$ とを一対一に対応させるためには, t の動く範囲として, $0 \leq t$ という範囲と $t \leq 0$ という範囲のうちのいずれかを選ばなければならないということです (図 11 を参照). そこで, ここでは, t の動く範囲として, $0 \leq t$ という範囲を選んでみることにします.*14) このとき, $\sinh t \geq 0$ となりますから,

$$\begin{aligned} \sqrt{X^2 - 1} &= \sqrt{\cosh^2 t - 1} \\ &= \sqrt{\sinh^2 t} \\ &= \sinh t \end{aligned}$$

となることが分かります. また, (50) 式から,

$$dX = \sinh t \, dt$$

となることが分かりますから, 結局, (イ) のタイプの積分は, $X = \cosh t$ という変数変換のもとで,

*14) これは, (49) 式のパラメータ付けのもとで, 双曲線 $C_{1,+}$ の $Y > 0$ なる部分にのみ注目するということです.

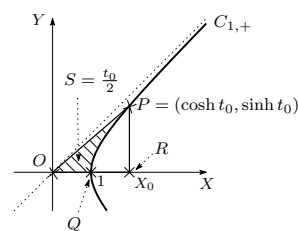


図 12 点 O, P, Q で囲まれる斜線部の面積は $S = \frac{t_0}{2}$ となる.

$$\int f(X, \sqrt{X^2 - 1}) dX = \int f(\cosh t, \sinh t) \sinh t \, dt$$

と姿を変えることが分かります. よって, $X = \cosh t$ と変数変換することで,

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

↓ $X = \cosh t$ と変数変換

「双曲線関数の有理式の積分」

というように, (イ) のタイプの積分は「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります.

例えば, 問 1 の例に合わせて, $f(X, Y) = Y$ の場合の積分を考えてみると, $t_0 \geq 0$, $X_0 = \cosh t_0$ として,

$$\begin{aligned} \int_1^{X_0} \sqrt{X^2 - 1} \, dX &= \int_0^{t_0} \sinh^2 t \, dt \\ &= \int_0^{t_0} \frac{\cosh 2t - 1}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t - t \right]_0^{t_0} \\ &= \frac{1}{2} (\cosh t_0 \sinh t_0 - t_0) \quad (51) \end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

いま, $P = (\cosh t_0, \sinh t_0) \in C_{1,+}$ として, 図 12 のように, $O = (0, 0)$, $Q = (1, 0)$, $R = (X_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ と定めます. このとき, 点 O, P, Q で囲まれる図の斜線部の面積を S とし, 直角三角形 $\triangle OPR$ の面積を S' とすると, 図 12 から,

$$S = S' - \int_1^{X_0} \sqrt{X^2 - 1} \, dX \quad (52)$$

となることが分かります. そこで,

$$S' = \frac{1}{2} \cosh t_0 \sinh t_0$$

となることに注意して, (51) 式, (52) 式と合わせると,

$$S = \frac{t_0}{2}$$

となることが分かります. よって, 双曲線 $C_{1,+}$ 上の自

然なパラメータ付けを与えるパラメータ t は、幾何学的には、図 12 の斜線部の面積 (の半分) として解釈できることが分かります。

また、問 1 と同様に、 $T = e^t$ とすると、

$$\begin{aligned} X &= \cosh t \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ &= \frac{T + T^{-1}}{2} \end{aligned}$$

となりますが、これを、 T について解いてみると、

$$T = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$$

となることが分かります。上で注意したように、与えられた実数 $X \geq 1$ に対して、(50) 式によって、 $\pm t$ という二つの実数 $t \in \mathbb{R}$ が対応しますから、これらは、 $T = e^t, e^{-t}$ と対応していることが分かります。いま、 $0 \leq t$ と仮定していましたから、 $e^{-t} \leq e^t$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} e^t &= T \\ &= X + \sqrt{X^2 - 1} \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$t = \log(X + \sqrt{X^2 - 1})$$

となることが分かりますから、(51) 式から、

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{X^2 - 1} dX \\ &= \frac{1}{2} \left\{ X \sqrt{X^2 - 1} - \log(X + \sqrt{X^2 - 1}) \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります。

そこで、次に、(口) のタイプの積分について考えてみます。すると、双曲線 C_2 上の点 P は、 $Y \geq 1$ なる部分で、

$$P = (\sinh t, \cosh t)$$

というような「双曲線関数を用いた自然なパラメータ付け」を持つことが分かります。そこで、前と同様に、

$$X = \sinh t$$

と変数変換してみると、(口) のタイプの積分は、

$$\int f(X, \sqrt{X^2 + 1}) dX = \int f(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt$$

と姿を変えることが分かります。^{*15)} したがって、

^{*15)} 皆さん、確かめて下さい。

$X = \sinh t$ と変数変換することで、

(口) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

$$\downarrow X = \sinh t \text{ と変数変換}$$

「双曲線関数の有理式の積分」

というように、(口) のタイプの積分も「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります。実際、問 1 では、 $f(X, Y) = Y$ の場合に、このような変数変換を用いて、(口) のタイプの積分を求めることができるのを見ました。

以上から、(イ)、(口) の二つのタイプの積分の場合には、双曲線上の自然なパラメータに変数変換することにより、「双曲線関数の有理式の積分」に帰着できることが分かりました。3 節で見たように、双曲線関数と指数関数は、

$$\begin{cases} \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} e^t = \cosh t + \sinh t \\ e^{-t} = \cosh t - \sinh t \end{cases}$$

というように、互いに相手の関数を用いて表わすことができますから、

「双曲線関数の有理式」=「指数関数の有理式」

となることが分かります。したがって、(イ)、(口) の二つのタイプの積分は、

(イ) 「 X と $\sqrt{X^2 - 1}$ の有理式の積分」

(口) 「 X と $\sqrt{X^2 + 1}$ の有理式の積分」

$$(イ) X = \cosh t \text{ と変数変換} \quad \downarrow \quad (口) X = \sinh t \text{ と変数変換}$$

「双曲線関数の有理式の積分」

=「指数関数の有理式の積分」

というように「指数関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります。第 9 回の問 1 のところで見たように、「指数関数の有理式の積分」は、 $T = e^t$ と変数変換することにより、

「指数関数の有理式の積分」

$$\downarrow T = e^t \text{ と変数変換} \quad (53)$$

「有理関数の積分」

というように「有理関数の積分」に帰着できますから、必要であれば、さらに、(53) 式の変数変換を施すことで、(イ)、(口) の二つのタイプの積分も「有理関数の積分」に帰着できることが分かります。

最後に、(ハ) のタイプの積分について考えてみます。

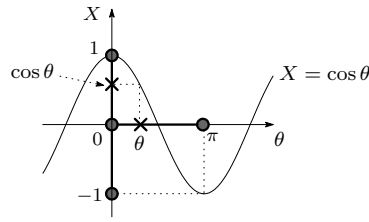


図 13 t の動く範囲を, $0 \leq \theta \leq \pi$ に制限すると, θ と $X = \cos t$ が一対一に対応する.

すると, 皆さん良くご存じのように, 単位円 C_3 上の点 P は,

$$(X, Y) = (\cos \theta, \sin \theta) \in C_3$$

というような「三角関数を用いた自然なパラメータ付け」を持ちます. そこで,

$$X = \cos \theta \quad (54)$$

と変数変換したときに, (ハ) のタイプの積分がどのように姿を変えるのかということを考えてみます.

(イ) のときと同様に, (54) 式によって, $-1 \leq X \leq 1$ となる実数 $X \in \mathbb{R}$ と実数 $\theta \in \mathbb{R}$ とを一対一に対応させるために, 例えば, $0 \leq \theta \leq \pi$ という範囲で θ を考えてみることにします (図 13 を参照). すると, このとき, $\sin \theta \geq 0$ となりますから,

$$\begin{aligned} \sqrt{1-X^2} &= \sqrt{1-\cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta} \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

となることが分かります. また, (54) 式から,

$$dX = -\sin \theta d\theta$$

となることが分かりますから, 結局, (ハ) のタイプの積分は, $X = \cos \theta$ という変数変換のもとで,

$$\int f(X, \sqrt{1-X^2}) dX = - \int f(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

と姿を変えることが分かります. よって, $X = \cos \theta$ と変数変換することで,

(ハ) 「 X と $\sqrt{1-X^2}$ の有理式の積分」

$$\downarrow X = \cos \theta \text{ と変数変換}$$

「三角関数の有理式の積分」

というように, (ハ) のタイプの積分は「三角関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります.

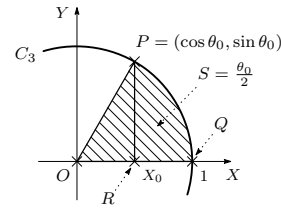


図 14 点 O, P, Q で囲まれる斜線部の面積は $S = \frac{\theta_0}{2}$ となる.

例えば, 問 1 の例に合わせて, $f(X, Y) = Y$ の場合の積分を考えてみると, $0 \leq \theta_0 \leq \pi, X_0 = \cos \theta_0$ として,

$$\begin{aligned} \int_1^{X_0} \sqrt{1-X^2} dX &= - \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta d\theta \\ &= - \int_0^{\theta_0} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\theta_0} \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta_0 \sin \theta_0 - \theta_0) \quad (55) \end{aligned}$$

となることが分かります.

いま, $P = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ として, 図 14 のように, $O = (0, 0), Q = (1, 0), R = (X_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ と定めます. このとき, 点 O, P, Q で囲まれる図の斜線部の面積を S とし, 直角三角形 $\triangle OPR$ の面積を S' とすると, 図 14 から,

$$\begin{aligned} S &= S' + \int_{X_0}^1 \sqrt{1-X^2} dX \\ &= S' - \int_1^{X_0} \sqrt{1-X^2} dX \quad (56) \end{aligned}$$

となることが分かります. そこで,

$$S' = \frac{1}{2} \cos \theta_0 \sin \theta_0$$

となることに注意して, (55) 式, (52) 式と合わせると,

$$S = \frac{\theta_0}{2}$$

となることが分かります.*16) よって, 双曲線 C_1 の場合と同様に, 単位円 C_3 上の自然なパラメータ付けを与えるパラメータ θ は, 幾何学的には, 図 14 の斜線部の面積 (の半分) として解釈できることが分かります.

さらに,

*16) もちろん, S は内角が θ_0 で半径が 1 の扇型の面積ですから, 上のように積分を計算しなくとも, $S = \frac{\theta_0}{2}$ となることは分かります.

$$\theta = \cos^{-1} X$$

と表わせることに注意すると, (55) 式から, 結局,

$$\int \sqrt{1-X^2} dX = \frac{1}{2} (X\sqrt{1-X^2} - \cos^{-1} X)$$

となることが分かります. これは, よく微積分学の教科書に載っている

$$\int \sqrt{1-X^2} dX = \frac{1}{2} (X\sqrt{1-X^2} + \sin^{-1} X)$$

という式とは, 一見, 異なるように見えますが, 例えば, $\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} X &= \cos t \\ &= -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \sin^{-1} X &= \frac{\pi}{2} - t \\ &= \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} X \end{aligned}$$

となることが分かり, これらの表示は積分定数の差を除いて一致していることが分かります.

上では, $X = \cos \theta$ という変数変換を考えましたが, 積分変数を $X \rightsquigarrow Y$ と書き換えて, (ハ) のタイプの積分を

$$\int f(\sqrt{1-Y^2}, Y) dY$$

というように表わしてみると, 今度は,

$$Y = \sin \theta$$

というように変数変換することが自然であるように見えてきます. 実際, $X = \sin \theta$ と変数変換してみても,

(ハ) 「 X と $\sqrt{1-X^2}$ の有理式の積分」

$$\downarrow X = \sin \theta \text{ と変数変換}$$

「三角関数の有理式の積分」

というように, (ハ) のタイプの積分は「三角関数の有理式の積分」に帰着できることが分かります.*17)

第 9 回の問 1 のところで見たように, 「三角関数の有理式の積分」は, $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換することにより,

「三角関数の有理式の積分」

$$\downarrow t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ と変数変換} \quad (57)$$

「有理関数の積分」

というように「有理関数の積分」に帰着できますから, 必要であれば, さらに, (57) 式の変数変換を施すことで, (ハ) のタイプの積分も「有理関数の積分」に帰着できることが分かります.

以上から, 「 x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分」は,

- (i) 二次式を見やすい形に変換する.
- (ii) (イ), (ロ), (ハ) のタイプの積分を, 対応する双曲線や単位円の自然なパラメータで表わすことで「双曲線関数の有理式の積分」=「指数関数の有理式の積分」, あるいは, 「三角関数の有理式の積分」に帰着する.
- (iii) 「指数関数の有理式の積分」や「三角関数の有理式の積分」を, 対応する双曲線や単位円の有理関数によるパラメータ付けを考えることで「有理関数の積分」に帰着する.

というステップに分けて考えると, それぞれのステップは変数変換の意味がより良く理解できるようなものになっていることが分かりました. 多くの微積分学の教科書では, 直接, 「 x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分」を「有理関数の積分」に帰着するような変数変換が天下りのように述べてありますが, 興味がある方は, 上のような変数変換を順番に辿って, 一番最初の変数と一番最後の変数がどのような関係になっているのかということを考えてみて下さい.

5. 問 2 の解答

一般に, $a < b$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $g(x)$ が与えられたときに, 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 $A = (a, g(a)) \in \mathbb{R}^2$ から点 $B = (b, g(b)) \in \mathbb{R}^2$ までの曲線 $y = g(x)$ の長さ l は,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{g'(x)\}^2} dx$$

という式によった与えられることに注意します. いま, $g(x)$ は,

$$g(x) = \frac{\alpha}{2} x^2$$

と与えられていますから,

$$g'(x) = \alpha x$$

*17) 皆さん, 確かめてみて下さい.

となり、求める長さ l は、

$$l = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (\alpha x)^2} dx$$

となることが分かります。ここで、 $t = \alpha x$ と変数変換すると、 $0 \leq x \leq x_0$ のとき、 $0 \leq t \leq \alpha x_0$ となることと、

$$dt = \alpha dx$$

となることから、 l は、

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\alpha x_0} \sqrt{1 + t^2} \frac{dt}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x_0} \sqrt{t^2 + 1} dt \end{aligned} \quad (58)$$

と表わされることが分かります。そこで、問 1 の結果を用いると、(58) 式から、

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left\{ \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) + t\sqrt{t^2 + 1} \right\} \right]_0^{\alpha x_0} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left\{ \log(\alpha x_0 + \sqrt{\alpha^2 x_0^2 + 1}) + \alpha x_0 \sqrt{\alpha^2 x_0^2 + 1} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります。

6. 問 2 を見直すと

さて、第 10 回の問 3 のところで、Riemann 積分という考え方を説明しましたが、こうした積分の考え方をい用いると、例えば、曲線の長さを積分を用いて表わすことができるということが分かります。そこで、皆さんにこうしたことの具体例に触れてもらおうと思い、問 2 を出題してみました。

問 2 の解答では、前回までと同様に、公式の覚え間違いからくる計算ミス避けるために、 $t = \alpha x$ と変数変換することで、標準的な形の積分に直してから、実際に積分を計算するという方針を取りました。このような方針を取ると、例えば、よく微積分学の教科書に載っている $\int \sqrt{x^2 + A^2} dx$, ($A > 0$) というような積分も、

$$\int \sqrt{x^2 + A^2} dx = A \int \sqrt{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + 1} dx$$

と書き直せることに注意して、 $X = \frac{x}{A}$ と変数変換してみると、 $dX = \frac{dx}{A}$ となることから、

$$\int \sqrt{x^2 + A^2} dx = A^2 \int \sqrt{X^2 + 1} dX \quad (59)$$

というように、問 1 のところで考えたような積分に帰着できることが分かります。そこで、対応する代数曲線を考えると、このような積分に対しては、 $X = \sinh t$

と変数変換してみることが自然であったということだけを思い出すことができれば、問 1 で見たように比較的簡単に、

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{X^2 + 1} dX \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log(X + \sqrt{X^2 + 1}) + X\sqrt{X^2 + 1} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、(59) 式と合わせて、

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{x^2 + A^2} dx \\ &= \frac{A^2}{2} \left\{ \log\left(\frac{x}{A} + \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + 1}\right) + \frac{x}{A} \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + 1} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります。ここで、

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x}{A} + \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + 1}\right) &= \log(x + \sqrt{x^2 + A^2}) - \log A \\ \frac{x}{A} \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + 1} &= \frac{x\sqrt{x^2 + A^2}}{A^2} \end{aligned}$$

と書き直せることに注意すると、結局、 $-\frac{A^2}{2} \log A$ という積分定数を除いて、

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{x^2 + A^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ A^2 \log(x + \sqrt{x^2 + A^2}) + x\sqrt{x^2 + A^2} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります。こうして、微積分学の教科書に載っているような公式が再現できるようになります。

実際の積分の計算に当たっては、一生懸命に覚えた公式を機械的に当てはめてみる方が手取り早いことも多いわけですし、シチ面倒臭い理屈などどうでもよいと思われる方もいるかもしれません。けれども、基本的なアイデアをより良く理解して、少し理解が曖昧だなと気になるたびに時間を惜しまずに自分で公式を導き出すということを繰り返していると、数学的な内容がより良く理解できるようになりますし、それにより自分であれこれ工夫をしてみることができるようになると思います。数学者の間の業界用語では、このようにして数学に対する理解を深めることを「手を汚す」と言ったりします。世界のいろいろな数学者を見ていると、どれだけきちんと手を汚したかということが、その数学者の数学に対する理解度にびったり反映されているような気がしますし、私の経験でも、いっぱい手を汚して理解した事柄ほど、その理解度は深いような気がします。皆さんも手間暇を惜しまずに、たくさん「手

を汚して」、物事をより良く理解するという楽しみを経験してゆかれると良いのではないかと思います。

7. 曲線の長さを求めるには

次に、Riemann 積分の考え方にもとづいて、「曲線の長さ」を積分を用いてどのように表わすことができるのかということを考えてみることにします。そのために、まず、Riemann 積分というものの考え方を少し思い出してみることにします。

第 10 回の問 3 のところで見たように、 $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できるような関数 $f(t)$ と $\mathbb{R}$ 内の有界閉区間 $I = [a, b]$ が与えられたときに、区間 I の分割 $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ と、各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における代表点 $\gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ によって定まる Riemann 和

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i)(t_i - t_{i-1})$$

を考え、分割の幅

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$$

が 0 に近づくときの Riemann 和の極限として、

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

というように積分の値が定義できるのでした。^{*18)}

ここで、 $t_i - t_{i-1}$ を、区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ に対する i 番目の小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における t の微小変位であると見なして、

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

と書くことにすると、Riemann 積分は、

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta t_i \quad (60)$$

と表わすことができます。このように表わすと、積分とは、積分区間 $[a, b]$ を非常に細かい小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ たちに分け、「それぞれの小区間での関数 $f(t)$ の値」 $f(\gamma_i)$ にその小区間での t の微小変位 Δt_i を掛けて、それらをすべて足し合わせたものであるというように理解することができます。

積分とは、このような無限に細かい分割に対する和であるということは、皆さんも区分求積法という考え方を通してご存じのことではないかと思います。積分に

^{*18)} 興味のある方は、第 10 回の解説を参照してみてください。

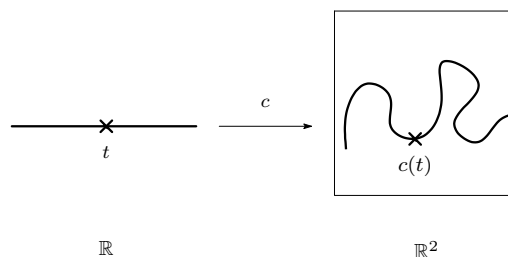


図 15 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線.

対するこのような直観的な理解は、図形の面積や体積など、実際に考察の対象としている量が、積分を用いてどのように表わされるのかということを考える上で、とても大切になります。したがって、積分を用いている量を自由に計算できるようになるためにも、こうした積分に対する直観的な理解のもとで、曲線の長さや図形の面積や体積などが、積分を用いてどのように表わすことができるのかということをきちんと納得することが、取りあえず、皆さんにとって何よりも大切なことではないかと思います。

そこで、ここでは、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線の長さが、積分を用いてどのように表わすことができるのかということを考えてみることにします。^{*19)}

いま、 $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる二つの関数 $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて、

$$c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

という式によって、 $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ という写像がひとつ与えられているとします。数学では、このような写像 $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ のことを (パラメータ付けられた) $\mathbb{R}^2$ 内の曲線と呼んだりします (図 15 を参照)。ここで、変数 $t \in \mathbb{R}$ を「時間」であると考えて、時刻 t での「点粒子」の位置が $c(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2$ であると解釈すると、時間とともに平面 $\mathbb{R}^2$ 上をフラフラと動いてゆく点粒子の軌跡として $\mathbb{R}^2$ 内の曲線がイメージできることになります。ここで、何も「点粒子」などという変なものを持ち出してこなくとも、例えば、猫が気ままに散歩していると解釈しても何も問題ないわけですが、そうすると猫のいる場所だけでなく、どちらを向いてどんな格好をして何を考えているのかなどといった余計なことが気になってしまうといけなないので、物

^{*19)} この節では、少し直観的な議論を行ない、興味の方のために、次の節以降で、もう少し進んだ考察を試みることにします。

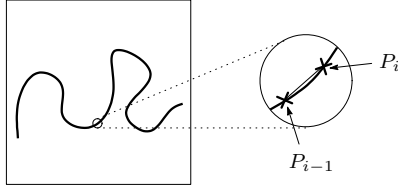


図 16 P_{i-1} と P_i がとても近くにいとすると、点粒子の動いた距離は直線距離 $\overline{P_{i-1}P_i}$ にほぼ等しいと思われる。

理学などでは大きさや構造を全く持たない「粒子」を仮想的に考えて、これを「点粒子」と名付けて考察を進めることがよくあります。こうした考察では味気ないと思われる方は、自分でイメージしやすい状況に置き換えて考えてみて下さい。

そこで、 $a < b$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつずつ取ってきて、時刻 $t = a$ から時刻 $t = b$ までの間に、この点粒子が動いた距離 l がどのように与えられるのかということを考えてみます。そのために、第 10 回のときと同様に、有界閉区間 $I = [a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ を勝手にひとつ考えて、各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の間に点粒子が動いた距離を見積もってみることにします。

いま、分割 Δ の分割点である時刻 $t = t_i$ での点粒子の位置を、

$$P_i = c(t_i) = (\varphi(t_i), \psi(t_i)) \in \mathbb{R}^2$$

と書くことにします。ここで、区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ の幅が十分小さいとすると、各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ での時間間隔 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ はとても小さいはずですから、 $P_i, P_{i-1} \in \mathbb{R}^2$ という二つの点もとても近くにいると考えられます。したがって、この間に点粒子が動いた距離も P_i と P_{i-1} との間の直線距離 $\overline{P_i P_{i-1}}$ にほぼ等しいはず（図 16 を参照）。すると、全体の移動距離 l は、だいたい、

$$l \doteq \sum_{i=1}^n \overline{P_i P_{i-1}} \quad (61)$$

というように見積もることができるのではないかと期待されます。

そこで、 $\overline{P_i P_{i-1}}$ という直線距離を調べてみることにします。いま、

$$\begin{aligned} P_i &= c(t_i) = (\varphi(t_i), \psi(t_i)), \\ P_{i-1} &= c(t_{i-1}) = (\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1})) \end{aligned}$$

でしたから、 $\overline{P_i P_{i-1}}^2$ は、

$$\overline{P_i P_{i-1}}^2 = (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2 \quad (62)$$

と表わされることが分かります。ここで、各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ での t の微小変位を、

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

と書くことにすると、 $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ と表わせますから、

$$\varphi(t_i) = \varphi(t_{i-1} + \Delta t_i)$$

と表わすことができます。そこで、 $\varphi(t_{i-1} + \Delta t_i)$ の Taylor 展開を考えて、 Δt_i は非常に小さいとして、 Δt_i について二次式以上の項を無視してしまうと、

$$\begin{aligned} \varphi(t_i) &= \varphi(t_{i-1} + \Delta t_i) \\ &\doteq \varphi(t_{i-1}) + \varphi'(t_{i-1})\Delta t_i \end{aligned}$$

と見積もることができます。したがって、

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \doteq \varphi'(t_{i-1})\Delta t_i \quad (63)$$

となるはずであることが分かります。同様に考えると、

$$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) \doteq \psi'(t_{i-1})\Delta t_i \quad (64)$$

となるはずであることが分かります。よって、(62) 式、(63) 式、(64) 式より、

$$\overline{P_i P_{i-1}}^2 \doteq \{\varphi'(t_{i-1})^2 + \psi'(t_{i-1})^2\} \cdot (\Delta t_i)^2$$

となることが分かりますから、(61) 式と合わせて、全体の移動距離 l が、

$$l \doteq \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2 + \psi'(t_{i-1})^2} \cdot \Delta t_i \quad (65)$$

というように見積もることができることが分かります。これを (60) 式という Riemann 積分の定義式と見比べてみると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \\ \gamma_i &= t_{i-1} \end{aligned}$$

として、(65) 式の右辺の和は、(60) 式の右辺に現れる和に一致することが分かります。いま、分割 Δ の幅 $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ を 0 に近づけると、(65) 式の「 $\doteq$ 」は「 $=$ 」になると期待できますから、(60) 式よ

り、時刻 $t = a$ から時刻 $t = b$ までに点が移動した距離 l は、

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \quad (66)$$

という式で与えられることが分かります。

この (66) 式という結果は、次のように考えると直観的に納得できるかもしれません。いま、

$$c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

と表わす代わりに、

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

と表わすことにします。また、区間 $[a, b]$ の分割 Δ におけるそれぞれの小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の幅 Δt_i も最初からとても小さいということを意識して、象徴的に dt と表わすことにします。すると、対応する $x(t), y(t)$ の微小変位も

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt$$

で与えられると期待できますから、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の微小な移動距離 dl は、

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ &= \{x'(t)^2 + y'(t)^2\} \cdot (dt)^2 \end{aligned}$$

となることから、

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (67)$$

という式で与えられると期待されます。上で得られた (66) 式は、この (67) 式の両辺の「和」を取った式であると理解することができます。

さて、 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $c(t)$ が、

$$c(t) = (t, g(t))$$

というように、関数 $g(t)$ のグラフの形をしているときには、変数を $t \rightsquigarrow x$ と書き直すことで、(66) 式から、点 $A = (a, g(a)) \in \mathbb{R}^2$ から点 $B = (b, g(b)) \in \mathbb{R}^2$ までの曲線 $y = g(x)$ の長さ l が、

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

という式で与えられることが分かります。この場合には、平面 $\mathbb{R}^2$ 上に $y = g(x)$ のグラフを描き、 x 軸上の有界閉区間 $[a, b]$ に対する分割 Δ を考えてみると、 x の微小変位 dx に対する y 方向の微小変位が、

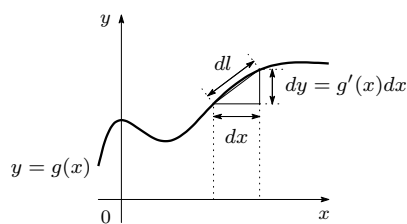


図 17 曲線が $y = g(x)$ のグラフで与えられているとき、曲線の微小距離 dl は $dl = \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$ という式で与えられる。

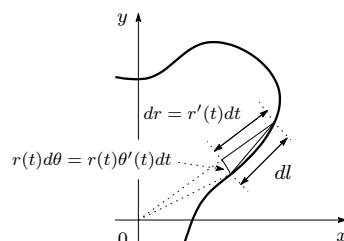


図 18 曲線が極座標を用いて、 $c(t) = (r(t), \theta(t))$ と与えられているとき、曲線の微小距離 dl は $dl = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \cdot \theta'(t)^2} dt$ という式で与えられる。

$$dy = g'(x)dx$$

となることから、

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + g'(x)^2} dx \end{aligned}$$

となることが分かると考えた方が直観的により理解しやすいかもしれません (図 17 を参照)。

また、ここでは、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の (x, y) という直交座標にもとづいて考察しましたが、 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $c(t)$ が、

$$c(t) = (r(t), \theta(t))$$

というように極座標を用いて表わされている場合にも全く同様の考察を行うことができます。この場合には、微小な時間変位 dt のもとで、 r 方向の微小な移動距離が、

$$dr = r'(t)dt$$

となり、これに直交する θ 方向の微小な移動距離が、

$$r(t)d\theta = r(t) \cdot \theta'(t)dt$$

となると考えられます (図 18 を参照)。したがって、

この場合の微小な移動距離 dl は,

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2} \\ &= \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \cdot \theta'(t)^2} dt \end{aligned}$$

となると期待されますから、全体の移動距離 l は,

$$l = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \cdot \theta'(t)^2} dt$$

という式で与えられることが分かります。

さて、曲線の長さというものは、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の特定の座標系の取り方や、曲線自体のパラメータの取り方には無関係に定まっていると考えられます。興味のある方は、単位円など平面 $\mathbb{R}^2$ 上の具体的な曲線をひとつ取ってきて、その曲線を直交座標や極座標など $\mathbb{R}^2$ 上の異なる座標で表わしたり、曲線自体のパラメータ表示などを取り替えるなどして、それぞれの場合に対応する積分表示やその値を求めてみると、曲線の長さというものに対する理解が深まるかもしれません。

8. 曲線の長さとは *

7 節では、積分を用いて平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線の長さを求めるにはどうすればよいのかということを考えてみました。皆さんにとっては、どうして 7 節で見たような積分を考えれば曲線の長さを求めることができるのかということをしかりと納得し、それにより具体的な曲線の長さが計算できるようになるということが、最も大切なことではないかと思えます。しかし、7 節の議論では、いくらか直観的な考察で済ました部分もあり、皆さんの中には、そうした直観が本当に正しいのか少し気に掛かるという方がいるかもしれません。そこで、そうした方のために、7 節では直観的な議論で済ませたような事柄について、少し反省してみることにします。第 10 回の Riemann 積分についての議論を読まれた方は、そのときに行った議論とほぼ同じ議論が展開されることに気が付かれるのではないかと思います。

さて、7 節で問題にしていたことは、曲線の長さを求めるということでした。そこで、まず、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線とは何かということが問題になりますが、7 節では、これを、 $\mathbb{R}$ 上の二つの関数 $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて、

$$c(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

と表わされるような写像 $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ のことであると考えました。7 節では、 $\varphi(t), \psi(t)$ は何度でも微分できるような関数であると仮定しましたが、例えば、折れ

線のように、所々に尖った点があったとしても、曲線には違いありませんから、 $\varphi(t), \psi(t)$ が連続関数でありさえすれば、 $c(t)$ は曲線を表わすと考えることができそうです。そこで、ここでは、 $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ という連続写像のことを（パラメータ付けられた）平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線と呼ぶことにします。その意味では、7 節で考えたように、 $\varphi(t), \psi(t)$ が何度でも微分ができるような関数である場合には、これを滑らかな曲線と呼んで、単なる連続曲線と区別することもあります。このように曲線の概念を一般化して考えることができるということ念頭に置いて、7 節の議論を見直ししながら、曲線の長さというものを、数学的にどのように考えたら良いのかということを反省してみることにします。

さて、7 節では、変数 $t \in \mathbb{R}$ を「時間」とであると考え、時刻 t での「点粒子」の位置が $c(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2$ で与えられていると解釈して、時間の経過とともに平面 $\mathbb{R}^2$ 上をフラフラと連続的に彷徨っていく点粒子の軌跡として、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線をイメージしました。直観的には、このような曲線が勝手にひとつ与えられると、その曲線の長さがきちんと定まるように思われますが、よくよく考えてみると、これまでの議論では、「曲線の長さ」というものを数学的にどのように表現したら良いのかということがどうもハッキリしていないことに気が付きます。そこで、曲線の長さという概念をハッキリとさせるために、 $a < b$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきて、時刻 $t = a$ から時刻 $t = b$ までの間に点粒子が移動した距離 l に対して、7 節で行なったような推論を見返してみると、曲線の長さというものを数学的にどのように表現したらよいのかということを考えてみることにします。以下では、 $\alpha < \beta$ となる勝手な実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して、時刻 $t = \alpha$ から時刻 $t = \beta$ までに点粒子が移動した距離を $l_{\alpha \rightarrow \beta}$ などと表わすことにします。このとき、求めたい移動距離 l は $l = l_{a \rightarrow b}$ ということになります。

いま、時刻 $t = a, t = b$ での点粒子の位置を、

$$A = c(a) = (\varphi(a), \psi(a)) \in \mathbb{R}^2,$$

$$B = c(b) = (\varphi(b), \psi(b)) \in \mathbb{R}^2$$

と定めると、幾何学的には、点 A から点 B までの曲線 c の長さが移動距離 l ということになります。我々の日常的な直観によれば、「最も短い距離で点 A から点 B まで進もうとすれば、直線で進めば良い」ということになりますから、「曲線の長さ」の数学的な定義がど

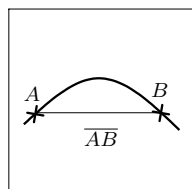


図 19 点 A から点 B へ至る間に点粒子が進んだ距離は、直線距離 $\overline{AB}$ より長いはず。

のようなものであれ、 $[a, b]$ という時間間隔の間に点粒子が進んだ距離 l は、点 A から点 B までの直線距離 $\overline{AB}$ より長いはずですが (図 19 を参照)。したがって、

$$l \geq \overline{AB} \quad (68)$$

と見積もれることが分かります。

そこで、次に、第 10 回の問 3 のところで Riemann 積分について考察したときと同様に、 $a < t_1 < b$ となるような時刻 $t = t_1$ を、勝手にひとつ取ってきて、区間 $I = [a, b]$ を $I = [a, t_1] \cup [t_1, b]$ というように二つの区間に分割して、それぞれの時間間隔の間に点粒子が進んだ距離 $l_{a \rightarrow t_1}$, $l_{t_1 \rightarrow b}$ を別々に見積もってみることにします。すると、(68) 式と同様に、

$$P = c(t_1) = (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \in \mathbb{R}^2$$

として、

$$l_{a \rightarrow t_1} \geq \overline{AP}, \quad l_{t_1 \rightarrow b} \geq \overline{PB}$$

となることが分かりますから、全体の移動距離 l が、

$$\begin{aligned} l &= l_{a \rightarrow b} \\ &= l_{a \rightarrow t_1} + l_{t_1 \rightarrow b} \\ &\geq \overline{AP} + \overline{PB} \end{aligned} \quad (69)$$

と見積もれることが分かります。

ここで、平面 $\mathbb{R}^2$ 上に A, B, P を頂点とする三角形を描いてみると、いわゆる三角不等式から、

$$\overline{AP} + \overline{PB} \geq \overline{AB}$$

となることが分かりますから、区間 $I = [a, b]$ を二つの小区間に分割して考えることにより、(68) 式という見積もりは (69) 式という見積もりに「改善する」ことが分かります (図 20 を参照)。

より一般に、区間 $I = [a, b]$ の分割

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

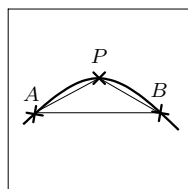


図 20 A と B の間の点 P を取って考えると、点粒子の進んだ距離に対するより良い評価が得られる。

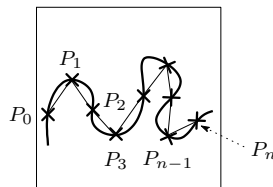


図 21 点粒子の進んだ距離は、折れ線の長さより長いと考えられる。

に対して、時刻 $t = t_i$ での点粒子の位置を、

$$P_i = c(t_i) = (\varphi(t_i), \psi(t_i)) \in \mathbb{R}^2$$

と表わすことにすると、全体の移動距離 l が、

$$l \geq \sum_{i=1}^n \overline{P_i P_{i-1}} \quad (70)$$

というように見積もれることが分かります。ここで、(70) 式の右辺に現れる和は、分割 Δ を与えるごとに定まるような数ですから、これを、

$$\begin{aligned} l_\Delta &= \sum_{i=1}^n \overline{P_i P_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{c(t_i) c(t_{i-1})} \end{aligned}$$

と表わすことにします。幾何学的には、点 P_i たちを順番に線分で結ぶことによってできる折れ線の長さが l_Δ であるということになります。すると、(70) 式は、

$$l \geq l_\Delta$$

というように簡潔な形で表わすことができます (図 21 を参照)。また、(68) 式が (69) 式に改善されるといいう上で行なった議論と同様に考えると、分割 Δ の細分 Δ' を考えることにより、全体の移動距離 l に対する見積もりが改善すること、すなわち、

$$\Delta \subset \Delta' \implies l \geq l_{\Delta'} \geq l_\Delta \quad (71)$$

となることが分かります.*20) そこで、第 10 回の問 3 のところでの Riemann 積分に対する議論を思い出すと、分割 Δ の分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしていったときに、 l_Δ たちが共通の極限に近づくことが分かれば、

$$l = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta$$

として曲線の長さが定義できそうなことが分かります。

9. 無限の長さを持つ曲線について *

8 節では、曲線の長さ l を求めるために、有界閉区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ に対して、分割点に対応した曲線上の点 $P_i \in \mathbb{R}^2$ を順番に線分で結ぶことによって得られる折れ線の長さ l_Δ を考え、分割 Δ の幅 $|\Delta|$ をどんどん小さくしてゆくことで、 l_Δ は l にどんどん近づくのではないかとということを述べました。直観的には、分割の幅 $|\Delta|$ をどんどん小さくしてゆけば、それぞれの小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に対応した部分の曲線は端点 P_i と P_{i-1} を結んだ線分と見分けが付かなくなると思われるので、このことは当然のことのように思われます。実際、7 節で滑らかな曲線の長さに対する積分表示を考察したときにも、 t_i と t_{i-1} が十分近ければ、区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における曲線の形は、点 P_i と点 P_{i-1} を結ぶ線分にほぼ等しいということを前提として話を進めたのでした。こうしたことは全く明らかなことのように思えますが、ここでは慎重を期して、滑らかとは限らない一般の曲線に対しても、この直観が正しいのかどうかということを反省してみることにします。

そこで、いま、

$$f(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$$

という関数を考えてみます (図 22 を参照)。このとき、 $t = 0$ では、 $\frac{\pi}{2t}$ が上手く定義できませんが、 $t \neq 0$ に対して、

$$|f(t)| = |t \cos \frac{\pi}{2t}| \leq |t|$$

となることが注意すると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} |f(t) - 0| &= \lim_{t \rightarrow 0} |f(t)| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

となることが分かりますから、 $f(0) = 0$ であると解釈

*20) 興味のある方は、第 10 回の Riemann 積分についての考察の中で (71) 式に対応した部分を見つけて、そのときの議論を参考にして、(71) 式を確かめてみて下さい。

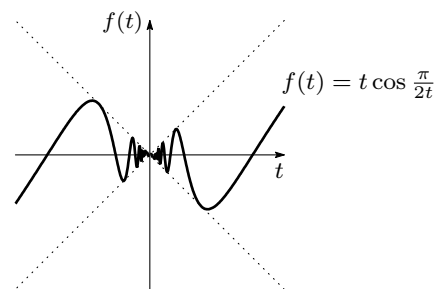


図 22 $f(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$ のグラフ。

することにすれば、 $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数になることが分かります.*21) そこで、関数 $f(t)$ のグラフとして与えられる $c(t) = (t, f(t))$ という曲線を考えて、この曲線に対して上で述べた直観が正しいかどうかということを考察してみることにします。

一般には、 $\cos \frac{\pi}{2t}$ という値はどのような数なのか良く分かりませんから、ここでは、 $\cos \frac{\pi}{2t} = 0, \pm 1$ となるような点だけに注目して考えてみることにします。すると、

$$\cos \theta = 0, \pm 1 \iff \theta \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{m\pi}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

となりますから、 $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ に対して、 $t = \frac{1}{m}$ となるような点がこのような点であることが分かります。そこで、このような点を、

$$P_m = \left(\frac{1}{m}, f\left(\frac{1}{m}\right) \right) \in \mathbb{R}^2$$

と書くことにすれば、

- (1) m が奇数 $\implies P_m = (\frac{1}{m}, 0)$
- (2) $m = 2k$ が偶数 $\implies P_m = P_{2k} = (\frac{1}{2k}, \frac{(-1)^k}{2k})$

となることが分かります.*22) いま、 y 座標の差だけに注目してみると、

$$\begin{aligned} \overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2 &= \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{2k} - 0 \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、隣り合った整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対する点 P_m たちの直線距離 $\overline{P_mP_{m+1}}$ は、

$$\overline{P_{2k}P_{2k+1}} \geq \frac{1}{2k} \quad (73)$$

と評価できることが分かります (図 23 を参照)。

*21) ここで、(72) 式を「 $f(t)$ と 0 の間の距離が 0 に近づく」と解釈しました。

*22) 皆さん、確かめてみて下さい。

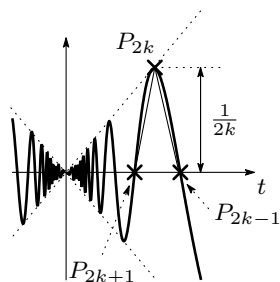


図 23 点 P_{2k-1} と点 P_{2k} の間の移動距離、あるいは、点 P_{2k} と点 P_{2k+1} の間の移動距離は、それぞれ、直線距離 $P_{2k}P_{2k\pm 1}$ より長い、この直線距離は $\frac{1}{2k}$ より長い。

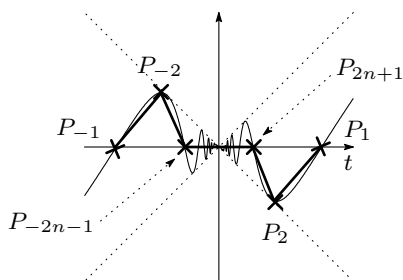


図 24 曲線の長さは、 $P_{-1}, \dots, P_{-2n-1}, P_{2n+1}, \dots, P_1$ を順番に結んだ折れ線の長さより長い。

そこで、0 でない勝手な整数 $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ に対して、 $-1 \leq \frac{1}{m} \leq 1$ となることに注意して、区間 $I = [-1, 1]$ におけるこの曲線の長さ $l = l_{-1 \rightarrow 1}$ を考えてみます。いま、勝手にひとつ自然数 $n \in \mathbb{N}$ を取ってきて、

$$\Delta_n = \left\{ -1, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{-1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}, \dots, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

という区間 $I = [-1, 1]$ の分割 Δ_n を考えてみます。このとき、分割 Δ_n に対応した折れ線の長さ l_{Δ_n} は、(73) 式より、

$$l_{\Delta_n} \geq 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (74)$$

となることが分かります (図 24 を参照)。

8 節で見たように、区間 $I = [-1, 1]$ の勝手な分割 Δ に対して、曲線の長さ l は、

$$l \geq l_{\Delta} \quad (75)$$

となることが分かりますが、特に、 $\Delta = \Delta_n$ とすれば、(74) 式、(75) 式から、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$l \geq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

となることが分かります。ところが、第 1 回の問 2 で見たように、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

となることが分かりますから、

$$l = +\infty$$

でなければならないことが分かります。すなわち、このような曲線は、 $I = [-1, 1]$ という有界閉区間上の連続関数で定義されているのにも拘わらず、その長さは無限大になってしまっていることが分かります。このことは、第 10 回の問 3 のところで注意した、 $\mathbb{R}$ 上の連続関数は、勝手な有界閉区間上で積分の値が有限の値としてきちんと定まるという事実と対照的です。

上の議論を見返すと、 $I = [-1, 1]$ の代わりに、勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $I_m = [0, \frac{1}{2m-1}]$ という有界閉区間を考えても、この部分の曲線の長さ $l_{0 \rightarrow \frac{1}{2m-1}}$ が、やはり無限大になることが分かります。^{*23)} 一方、区間 $I_m = [0, \frac{1}{2m-1}]$ の端点に対応する原点 $O \in \mathbb{R}^2$ と点 $P_{2m-1} = (\frac{1}{2m-1}, 0) \in \mathbb{R}^2$ の間の直線距離は、

$$\overline{OP_{2m-1}} = \frac{1}{2m-1}$$

となりますから、こちらは、 $m \rightarrow \infty$ のときに 0 に近づくことが分かります。すなわち、このような曲線に対しては、この節の最初で述べた「 t_i と t_{i-1} が十分近ければ、区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における曲線の形は、点 P_i と点 P_{i-1} を結ぶ線分にほぼ等しいだろう」という直観は裏切られてしまうことが分かります。

上の例では、

$$f(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$$

でしたから、 $t = 0$ 以外では、 $f(t)$ は何度でも微分ができる関数であることが分かります。一方、 $0 \neq h \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{f(h)}{h} \\ &= \cos \frac{\pi}{2h} \end{aligned}$$

となりますから、 $f(t)$ は、 $t = 0$ では微分できないことが分かります。このように、微分できないような点がたったひとつ存在しただけで、我々の直観は裏切られることがあるということが分かりました。

^{*23)} 皆さん、確かめてみて下さい。

10. 滑らかな曲線の長さについて *

さて、7 節で、滑らかな曲線の長さに対する積分表示を求めましたが、9 節で取り上げたような曲線が存在は、そのときに行なった直観的な議論がきちんと正当化できることを確認する必要性を認識させてくれます。そこで、ここでは、「滑らかな曲線に対して、区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ に対応した折れ線の長さ l_Δ が、分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしてゆくことで、どれもこれも同じような値に落ち着く」ということと、「その落ち着き先が、直観的な議論で求めた積分の値に等しくなる」ということを確かめてみることにします。そのためには、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \quad (76)$$

となることが示せれば良いことになります。これは、分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さくなりさえすれば、対応する折れ線の長さ l_Δ が、(76) 式の右辺の積分の値に近づくということですが、いきなり l_Δ と積分の値を比べるのは比べにくいので、

$$f(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$$

として、同じ分割 Δ に対する関数 $f(t)$ の Riemann 和

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta t_i$$

と l_Δ を比べてみることにします。

そのために、まず、求める曲線の長さとして、(76) 式の右辺の積分の形を導いたときの議論を思い出してやることにします。すると、分割 Δ の分割点 $t = t_i$ に対応する曲線上の点を、

$$P_i = c(t_i) = (\varphi(t_i), \psi(t_i)) \in \mathbb{R}^2$$

とすると、

$$\overline{P_i P_{i-1}}^2 = (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2$$

となることに注目して、さらに、 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ が微小量であるとして、Taylor 展開を用いて、

$$\begin{cases} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \doteq \varphi'(t_{i-1}) \Delta t_i \\ \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) \doteq \psi'(t_{i-1}) \Delta t_i \end{cases} \quad (77)$$

と近似してみることで、

$$\overline{P_i P_{i-1}} \doteq \sqrt{\varphi'(t_{i-1})^2 + \psi'(t_{i-1})^2} \cdot \Delta t_i$$

という式を導いたことが分かります。

これらの推論をより正確な形で考察してみるためには、上の「 $\doteq$ 」を「 $=$ 」で置き換えて考察する必要がありますが、これまでに何度も見てきたように、このような置き換えを可能にする手段が「平均値の定理」であるわけです。すなわち、平均値の定理によれば、(77) 式の右辺に現れる $\varphi'(t_{i-1})$, $\psi'(t_{i-1})$ の代わりに、同じ $[t_{i-1}, t_i]$ という区間における適当な点 $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ での値 $\varphi'(\xi_i)$, $\psi'(\eta_i)$ に置き換えると、

$$\begin{cases} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \Delta t_i \\ \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\eta_i) \Delta t_i \end{cases} \quad (78)$$

というように「 $=$ 」で表わすことができるということが保証されるのでした。したがって、(78) 式から、

$$\overline{P_i P_{i-1}} = \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

となることが分かりますから、折れ線の長さ l_Δ も、

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} \cdot \Delta t_i$$

というように「正確な表示」が得られることになります。この表示を用いると、同じ分割 Δ に対応する折れ線の長さ l_Δ と Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の間の誤差が、

$$\begin{aligned} |l_\Delta - S(\Delta; \gamma)| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - f(\gamma_i) \right) \cdot \Delta t_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - f(\gamma_i) \right| \cdot \Delta t_i \quad (79) \end{aligned}$$

と評価できることが分かりますから、後は、

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - f(\gamma_i) \right| \\ &= \left| \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - \sqrt{\varphi'(\gamma_i)^2 + \psi'(\gamma_i)^2} \right| \quad (80) \end{aligned}$$

の大きさが上手く評価できれば良いことになります。

これは、一見、とても複雑そうに見えますが、

$$\begin{aligned} X &= \varphi'(\xi_i), \quad Y = \psi'(\eta_i), \\ x &= \varphi'(\gamma_i), \quad y = \psi'(\gamma_i) \end{aligned}$$

と書き直してみると、

$$\left| \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right|$$

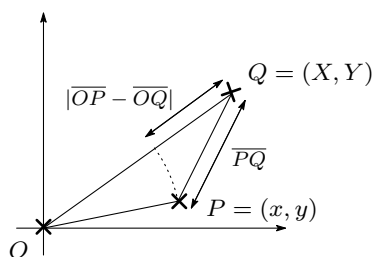


図 25 $|\overline{OP} - \overline{OQ}|$ は $\overline{PQ}$ より小さい.

という大きさを評価するという問題であることが分かります. そこで, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に, $P = (X, Y)$, $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ という点を描いて考えてみると, $\mathbb{R}^2$ の原点を $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ として,

$$\left| \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right| = |\overline{OP} - \overline{OQ}| \quad (81)$$

と表わされることが分かります. このことに注意して, O, P, Q を頂点とする三角形を描いてみると, どうやら,

$$|\overline{OP} - \overline{OQ}| \leq \overline{PQ} \quad (82)$$

と評価できそうなことが分かります (図 25 を参照). 実際, (82) 式を,

$$\begin{cases} \overline{OP} - \overline{OQ} \leq \overline{PQ} \\ -(\overline{OP} - \overline{OQ}) \leq \overline{PQ} \end{cases}$$

と二つの式に分けて表わしてみると, これらは単に三角不等式の帰結であることが分かります.*24) よって, (81) 式, (82) 式から,

$$\left| \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} \quad (83)$$

となることが分かりました.

これでだいぶスッキリとした形になってきましたが, (83) 式の右辺には依然として平方根が頑張っていますから, 次に, この平方根を外すことを考えてみます. そのために, 上と同様にして, $R = (X-x, Y-y) \in \mathbb{R}^2$ という点を考えてみると,

$$\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = \overline{OR}$$

と表わされることが分かります. ここで, $\overline{OR}$ の表示に平方根が現われてしまうのは, 点 R の x 座標と y 座標の両方が現われるからであることに注意すると, 例

*24) 皆さん, 確かめて下さい.

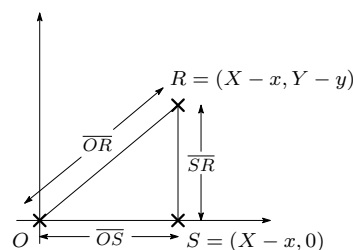


図 26 $\overline{OR}$ は $\overline{OS} + \overline{SR}$ より小さい.

えば, 点 R の y 座標を 0 とした $S = (X-x, 0) \in \mathbb{R}^2$ という点を補助的に考えてみたくになります. そこで, 再び, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に O, R, S を頂点とする三角形を描いてみると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} \overline{OR} &\leq \overline{OS} + \overline{SR} \\ &= |X-x| + |Y-y| \end{aligned}$$

と評価できることが分かります (図 26 を参照). したがって, (83) 式と合わせて,

$$\left| \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right| \leq |X-x| + |Y-y|$$

というように評価できることが分かりました. すなわち, 最初に考えていた (80) 式の形に戻せば, 結局,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - f(\gamma_i) \right| \\ \leq |\varphi'(\xi_i) - \varphi'(\gamma_i)| + |\psi'(\eta_i) - \psi'(\gamma_i)| \quad (84) \end{aligned}$$

というように評価できることが分かりました.

ここまで来ると, 後は, 勝手な実数 $s, t \in \mathbb{R}$ に対して, $|\varphi'(s) - \varphi'(t)|$ などの大きさを評価するという問題になります. 第 10 回の Riemann 積分について考察したところで, 何度でも微分できる関数に対して, 与えられた分割 Δ に対する特別な Riemann 和 S_{Δ}, s_{Δ} の間の誤差を見積もろうとしたときに, 同様な問題が登場しました. そこで, そのときと同様に考えると, 次のように議論することができます.

いま, 平均値の定理によれば, 勝手な実数 $s, t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\varphi'(s) - \varphi'(t) = \varphi''(u) \cdot (s-t) \quad (85)$$

となるような実数 $u \in \mathbb{R}$ が s と t の間に存在することが分かります. このことに注意して,

$$L = \max_{t \in [a, b]} |\varphi''(t)|$$

と定めてみます. すると, (85) 式より, 勝手な実数

$s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ に対して,

$$\begin{aligned} |\varphi'(s) - \varphi'(t)| &= |\varphi''(u)| \cdot |s - t| \\ &\leq L \cdot |s - t| \\ &\leq L \cdot |t_i - t_{i-1}| \\ &\leq L \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (86)$$

となることが分かります.*25) 同様にして,

$$M = \max_{t \in [a, b]} |\psi''(t)|$$

と定めると, 勝手な実数 $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ に対して,

$$|\psi'(s) - \psi'(t)| \leq M \cdot |\Delta| \quad (87)$$

となることが分かります. いま, $\xi_i, \eta_i, \gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ でしたから, (84) 式, (86) 式, (87) 式から,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2} - f(\gamma_i) \right| &\leq L \cdot |\Delta| + M \cdot |\Delta| \\ &= (L + M) \cdot |\Delta| \end{aligned}$$

と見積もれることが分かりました.

そこで, (79) 式に戻って考えると, 結局, 分割 Δ に対応する折れ線の長さ l_Δ と Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の間の誤差が,

$$\begin{aligned} |l_\Delta - S(\Delta; \gamma)| &\leq \sum_{i=1}^n (L + M) \cdot |\Delta| \cdot \Delta t_i \\ &\leq (L + M) \cdot |\Delta| \cdot \sum_{i=1}^n \Delta t_i \\ &= (L + M)(b - a) \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (88)$$

と評価できることが分かります. ここで, L, M, a, b などは, 分割 Δ に依らない定数ですから, (88) 式より, 分割の幅 $|\Delta|$ が小さくなりさえすれば, l_Δ と $S(\Delta; \gamma)$ は同じような値になることが分かります. いま, $\varphi(t), \psi(t)$ は何度でも微分できる関数であると仮定しましたから,

$$f(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$$

は連続関数となることに注意します.*26) 第 10 回の問

*25) ここで, 最後から二番目の不等式では, 「 $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ 」なので, s と t の間の距離 $|s - t|$ は, t_i と t_{i-1} の間の距離 $|t_i - t_{i-1}|$ より小さくなる」と考えました.

*26) $h(x) = \sqrt{x}$ という関数は, $x = 0$ では微分できませんから, $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) = (0, 0)$ となるような点 $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在すると, $f(t)$ は $t = t_0$ では微分することができなくなってしまう. 逆に考えると, 勝手な実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $(\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0, 0)$ となるならば, すなわち, 曲線上のすべての点での「速度ベクトル」が 0 でなければ, $f(t)$ は何度でも微分できる関数になることが分かります.

3 のところで注意したように, 連続関数は勝手な有界閉区間上で Riemann 積分可能ですから, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ の方は, 分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしていったときの極限が存在して,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \quad (89)$$

$$= l$$

となることが分かります. そこで, Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を仲立ちとして, 分割 Δ に対応する折れ線の長さ l_Δ と (89) 式の右辺の積分の値 l との間の誤差を,

$$\begin{aligned} 0 \leq |l_\Delta - l| &= |(l_\Delta - S(\Delta; \gamma)) + (S(\Delta; \gamma) - l)| \\ &\leq |l_\Delta - S(\Delta; \gamma)| + |S(\Delta; \gamma) - l| \end{aligned}$$

と評価してみると, (88) 式, (89) 式から,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |l_\Delta - l| \\ &\leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |l_\Delta - S(\Delta; \gamma)| + \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |S(\Delta; \gamma) - l| \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, めでたく,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \quad (90)$$

となることが確かめられました.

以上の考察から, 一般に, 曲線の長さの定義として, $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta$ という極限を採用することができそうなことが分かります. そこで, $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ という曲線と $I = [a, b]$ という有界閉区間に対して, $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta$ という極限が有限の値としてきちんと定まるときに, 曲線 c は (区間 $[a, b]$ において) 長さを持つと言い,

$$l = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} l_\Delta$$

という極限の値 l を (区間 $[a, b]$ における) 曲線 c の長さとして定義することができます. すると, この節で見たことは, 滑らかな曲線は勝手な有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で長さを持ち, 曲線の長さ l は (90) 式のような積分で与えられるということになります. 9 節で考えた長さが無限大になる曲線の例では, $t = 0$ 以外では滑らかな曲線になっていましたから, 原点 $t = 0$ を含まないような勝手な有界閉区間上ではきちんと長さが定まることが分かります. したがって, この曲線の場合には, 原点 $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ のどんなに小さい近傍を考えても, 長さが無限大になってしまっていることが分かります.

11. 問3の解答

- (1) 被積分関数を, $f(x) \sin x = f(x)(-\cos x)'$ であると考えて部分積分をしてみると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= [-f(x) \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\ &= f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \quad (91) \end{aligned}$$

となることが分かります. ここで, 右辺第三項の積分の被積分関数を, $f'(x) \cos x = f'(x)(\sin x)'$ であると考えて, さらに部分積分をしてみると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f'(x) \cos x dx &= [f'(x) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx \\ &= - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx \quad (92) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (91) 式, (92) 式から,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx \quad (93) \end{aligned}$$

となることが分かります.

- (2) (93) 式において, $f(x) \rightsquigarrow f''(x)$ と置き換えてみると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f''(x) \sin x dx &= f''(0) + f''(\pi) - \int_0^\pi f^{(4)}(x) \sin x dx \quad (94) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (93) 式, (94) 式から,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= \{f(0) + f(\pi)\} - \{f''(0) + f''(\pi)\} \\ &\quad + \int_0^\pi f^{(4)}(x) \sin x dx \end{aligned}$$

となることが分かります. 以下同様に考えると, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \{f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)\} \\ &\quad + (-1)^{N+1} \int_0^\pi f^{(2N+2)}(x) \sin x dx \quad (95) \end{aligned}$$

となることが分かります.*27)

ここで, $f(x)$ が $2n$ 次の多項式であるとする, $N \geq n$ となる勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(2N+2)}(x) = 0$ となることが分かりますから, 例えば, (95) 式で $N = n$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \{f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)\} \end{aligned}$$

となることが分かります.

- (3) 最初に, $f^{(m)}(0)$ がどうなるかということを調べてみることにします. そのために, $f(x)$ の $x = 0$ での Taylor 展開がどうなるかということを考えてみます. いま, $(p - qx)^n$ を,

$$(p - qx)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

というように二項展開して表わすことにします.*28)

このとき, それぞれの係数 a_k はすべて整数となることに注意します. これより, $f(x)$ の $x = 0$ での Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n}{n!} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= \frac{a_0}{n!} x^n + \frac{a_1}{n!} x^{n+1} + \frac{a_2}{n!} x^{n+2} + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^{2n} \quad (96) \end{aligned}$$

という形で与えられることが分かります. したがって, (96) 式と, Taylor 展開の一般式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m + \cdots \end{aligned}$$

を比べてみると,

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} \frac{m!}{n!} a_{m-n}, & n \leq m \leq 2n \text{ のとき} \\ 0, & 0 \leq m < n, 2n < m \text{ のとき} \end{cases}$$

*27) 数学的帰納法を用いると, きちんと証明することができま

す.

*28) 実際には, $a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{n-k} (-q)^k$ となるわけですが, このように a_k を具体的な数として書き表さない方が, 以下の議論のポイントがよりハッキリするのではないかと思います.

となることが分かります。^{*29)} ここで、 $n \leq m$ のときには、

$$\frac{m!}{n!} \in \mathbb{N}$$

となることと、

$$a_k \in \mathbb{Z}, (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

であることに注意すると、すべての自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $f^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ となることが分かります。

同様に、 $f(x)$ の $x = \frac{p}{q}$ での Taylor 展開を考えてみます。そのために、

$$X = x - \frac{p}{q}$$

として、 $f(x)$ を X のべきの形に展開することを考えてみます。このとき、 $x = X + \frac{p}{q}$ となりますから、

$$\begin{aligned} x^n(p - qx)^n &= \left(X + \frac{p}{q}\right)^n \left\{p - q\left(X + \frac{p}{q}\right)\right\}^n \\ &= \left(X + \frac{p}{q}\right)^n \cdot (-q)^n \cdot X^n \\ &= (-1)^n (qX + p)^n X^n \quad (97) \end{aligned}$$

と表わされることが分かります。そこで、前と同様に、 $(qX + p)^n$ を、

$$(qX + p)^n = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$$

というように二項展開して表わすことにすると、それぞれの係数 b_k はすべて整数になることが分かります。^{*30)} したがって、(97) 式と合わせて、 $f(x)$ の $x = \frac{p}{q}$ での Taylor 展開は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} (qX + p)^n X^n \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} (b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n) X^n \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} (b_0X^n + b_1X^{n+1} + \dots + b_nX^{2n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ b_0 \left(x - \frac{p}{q}\right)^n + b_1 \left(x - \frac{p}{q}\right)^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + b_n \left(x - \frac{p}{q}\right)^{2n} \right\} \end{aligned}$$

となることが分かります。そこで、後は、 $f^{(m)}(0)$ のときと同様に議論すれば、すべての自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $f^{(m)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$ となることが分かります。

*29) あるいは、(96) 式の両辺を x で m 回微分した後で、 $x = 0$ としたとしても構いません。

*30) 実際は、 $b_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^{n-k} q^k$ です。

(4) $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$ のとき、

$$0 \leq p - qx \leq p$$

となることが分かりますから、

$$0 \leq f(x) = \frac{x^n(p - qx)^n}{n!} \leq \frac{x^n p^n}{n!}$$

となることが分かります。

(5) いま、円周率 π が、 $\pi = \frac{p}{q}$ と表わされたと仮定します。すると、(4) の結果から、 $0 \leq x \leq \pi = \frac{p}{q}$ のとき、

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x^n p^n}{n!}$$

となることが分かります。一方、この範囲では、

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

となるので、結局、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、

$$0 \leq f(x) \sin x \leq \frac{x^n p^n}{n!} \quad (98)$$

となることが分かります。ここで、(98) 式の左側の不等式の等号は、 $x = 0, \pi$ でのみ成り立っていることに注意して、両辺を $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で積分してみると、

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^\pi f(x) \sin x dx \\ &\leq \int_0^\pi \frac{x^n p^n}{n!} \\ &= \frac{p^n}{n!} \int_0^\pi x^n dx \\ &= \frac{p^n}{n!} \cdot \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)} \\ &= \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} \end{aligned}$$

となることが分かります。

(6) いま、勝手な自然数 $p, n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{p\pi}{1}\right) \cdot \left(\frac{p\pi}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$$

と表わせることに注意します。このとき、

$$\frac{p\pi}{N_0} < \frac{1}{2}$$

となるような自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ を、勝手にひとつ取ってくると、 $n \geq N_0$ となる勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$0 \leq \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{p\pi}{1}\right) \cdot \left(\frac{p\pi}{2}\right) \cdots \left(\frac{p\pi}{N_0}\right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{p\pi}{N_0+1}\right) \cdots \left(\frac{p\pi}{n+1}\right) \\
&\leq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{p\pi}{1}\right) \cdot \left(\frac{p\pi}{2}\right) \cdots \left(\frac{p\pi}{N_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N_0}
\end{aligned}$$

となることが分かります。そこで、このような自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ を、勝手にひとつ固定して、

$$C = \frac{2^{N_0}}{p} \cdot \left(\frac{p\pi}{1}\right) \cdot \left(\frac{p\pi}{2}\right) \cdots \left(\frac{p\pi}{N_0}\right)$$

と定めると、 $n \geq N_0$ となる勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$0 \leq \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} \leq C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となることが分かります。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} = 0 \quad (99)$$

となることが分かります。

さて、円周率 π が、 $\pi = \frac{p}{q}$, ($p, q \in \mathbb{N}$) と表わせたことと仮定してみます。このとき、(99) 式から、 $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば、

$$\frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} < 1$$

となることが分かります。そこで、

$$\frac{(p\pi)^{n_0+1}}{p(n_0+1)!} < 1 \quad (100)$$

となる自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ を、勝手にひとつ取ってきて、

$$f(x) = \frac{x^{n_0}(p-qx)^{n_0}}{n_0!}$$

として、

$$I = \int_0^\pi f(x) \sin x dx$$

という積分の値を考えてみます。すると、(2), (3) の結果から、

$$I = \sum_{k=0}^{n_0} (-1)^k \left\{ f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi) \right\}$$

は整数になることが分かります。一方、(5) の結果と (100) 式から、

$$0 < I < \frac{(p\pi)^{n_0+1}}{p(n_0+1)!} < 1$$

となることが分かりますが、 $0 < I < 1$ となるよう

な整数 $I \in \mathbb{Z}$ は存在しませんから、これは矛盾です。よって、 $\pi = \frac{p}{q}$ と表わされると仮定したことが間違いであったことが分かります。したがって、 π は有理数ではないことが分かります。

12. 問3を見直すと

第9回の問3では、小学校以来、皆さんが慣れ親しんできた円周率 π が、実際に、 $\pi = 3.14 \cdots$ であることを、Machin による工夫をもとにして確かめてみました。このように、微積分学の理解が進むと、いままで単に覚えていただけの事柄を、いろいろと自分で確かめてみることができるようになります。第1回の問4のところで見たように、 $\sqrt{2}$ が無理数であるということ、したがって、 $\sqrt{2} = 1.4142 \cdots$ に現われる「 $\cdots$ 」の部分は果てしなく続くということは、その証明の仕方まで込めて、皆さん良くご存じのことではないかと思います。それでは、円周率 $\pi = 3.14 \cdots$ の場合はどうだろうかと考えてみると、わざわざ「 π 」と名前を付けるくらいだから、きっと有理数ではないのだろうと想像されますが、このことを確かめてみたことがある方は少ないのではないかと思います。問3で見たように、Taylor 展開や部分積分などを用いると、比較的簡単に円周率 π が無理数であることが証明できるので、微積分学のちょうど良い演習問題として、その証明を皆さんに紹介してみました。といっても、この証明も私が考えついたものではなく、微積分学の教科書の演習問題として挙げてあったものなので、誰が考えた証明方法なのかということまで調べる暇がありませんでした。問3により、円周率 π は無理数であることが分かりますから、 $\pi = 3.14 \cdots$ の「 $\cdots$ 」の部分もまた、果てしなく続くということが分かります。

さて、数学に現われる代表的な定数としては、もうひとつ自然対数の底 $e = 2.718 \cdots$ がありますが、Taylor の定理を用いると、 e もやはり無理数であることを、次のように確かめることができます。^{*31)}

いま、Taylor の定理によれば、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} \quad (101)$$

となるような実数 $\theta_n \in \mathbb{R}$ が 0 と 1 の間に存在することが分かります。そこで、 e が、自然数 $p, q \in \mathbb{N}$ を

^{*31)} これも微積分学の教科書の演習問題として挙げてあったものです。

用いて, $e = \frac{p}{q}$ というように表わされたと仮定してみます. このとき, (101) 式から,

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} \quad (102)$$

となることが分かりますが, (102) 式の両辺に $n!$ を掛けてから, 適当に移項をしてみると,

$$\frac{e_n^\theta}{n+1} = \frac{p \cdot n!}{q} - n! \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right\} \quad (103)$$

となることが分かります. ここで,

$$I_n = \frac{e_n^\theta}{n+1}$$

と定めると, (103) 式の右辺の表示から, $n \geq q$ のとき, $I_n \in \mathbb{Z}$ となることが分かります. 一方, $\theta_n \in \mathbb{R}$ は, $0 < \theta_n < 1$ となることに注意すると,

$$0 < I_n = \frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{e}{n+1}$$

となることが分かりますから, $\frac{e}{n+1} < 1$ のとき, すなわち, $n > e - 1$ のとき,

$$0 < I_n < 1$$

となることが分かります. 以上から, $n \geq q$, かつ, $n > e - 1$ のとき, I_n は $0 < I_n < 1$ となる整数であることが分かりますが, このような整数は存在しませんから, これは矛盾です. よって, $e = \frac{p}{q}$ と表わされると仮定したことが間違いであったことが分かります. こうして, e も無理数であることが分かりました.

さて, $\sqrt{2}$ は無理数ではありますが, $x^2 - 2 = 0$ という有理数係数の多項式の根として得られます. このように有理数係数の多項式の根として得られるような複素数は代数的数と呼ばれています. また, 代数的数は, 無理数とはいいながら, 「有理数の親戚のようなもの」であると考えられていて, 代数的整数論という名のもとに, その性質を調べることができることが知られています.

一方, どんな有理数係数の多項式の根にもならないような複素数は超越数と呼ばれているのですが, 実は, π や e は, 無理数というだけでなく, もっと強く, 超越数であるということが知られています. このことは, 例えば, 勝手な二つの有理数係数の多項式 $f(x), g(x)$ を取ってきて, $f(\pi), g(\pi)$ という数を考えてみると,

$$f(x) \neq g(x) \implies f(\pi) \neq g(\pi)$$

となるということを意味していますから,^{*32)} π と有理数をもとにして, 足したり, 引いたり, 掛けたりしながら数を作ってみると, 有理数係数の多項式と同じくらいたくさん異なる数が作れることが分かります. 一方, $\sqrt{2}$ の場合には, $\sqrt{2}$ が, $x^2 - 2 = 0$ の根となるということは, 有理数係数の多項式 $f(x)$ をいろいろ取ってきて, $f(\sqrt{2})$ という数を作っても, 結局,

$$a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

という形の数しか作れないことが分かります.^{*33)}

このように, 代数的な性質に注目してみると, 「代数的数」と「超越数」とでは随分様子が違うことが分かります. 代数的数が, ある有理数係数の多項式の根になっているということは, その多項式が, 根である代数的数の何らかの情報を与えてくれているのではないかと期待することができますが, 実際, このような情報を読み取ることで代数的数の性質を理解することができるというのが代数的整数論の基本的な考え方です. その意味では, 何の情報も与えてくれない超越数というのは, 文字通り捕らえ所のない数であると言えます. 数学において, 極めて基本的な役割を果たしている π や e といった数が, このように捕らえ所のない超越数であるというのは, とても不思議なことであるような気がします. 少し前に出版された小林昭七著「円の数学」(裳華房)には, π や e が超越数であることの証明も含めて, 円周率にまつわる様々な事柄やエピソードが解説されています. 数学的な内容も微積分学を学ばれている皆さんにピッタリという気がしますので, 興味のある方は, この本の気に入った章を読んでみると良いのではないかと思います.

*32) もし, $f(\pi) = g(\pi)$ であるとすれば, π は $h(x) = f(x) - g(x)$ という有理数係数の多項式の根になってしまいます.

*33) 興味のある方は, 考えてみて下さい.