

数学 IB 演習 (第 11 回) のヒント

問 1.

- (1) $x = \sinh t$ と変数変換してみよ.
- (2) 例えば, $T = e^t$ とすると, $t = \frac{T-T^{-1}}{2}$ となることから, T を t で表わしてみよ. また, $T = e^t > 0$ となることにも注意せよ.

問 2. 一般に, $a < b$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数 $g(x)$ が与えられたときに, 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 $A = (a, g(a)) \in \mathbb{R}^2$ から点 $B = (b, g(b)) \in \mathbb{R}^2$ までの曲線 $y = g(x)$ の長さ l は,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{g'(x)\}^2} dx$$

という式によって与えられることに注意せよ.

問 3.

- (1) 被積分関数を, $f(x) \sin x = f(x)(-\cos x)'$ などと考えて部分積分を繰り返すとどうなるか考えてみよ.
- (2) まず, (1) と同様に, 部分積分を繰り返すことで, 勝手な自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \{f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)\} \\ &\quad + (-1)^{N+1} \int_0^\pi f^{(2N+2)}(x) \sin x dx \end{aligned}$$

となることを確かめよ. さらに, $f(x)$ が $2n$ 次の多項式であるときに, 例えば, $N = n$ と取るとどうなるか考えてみよ.

- (3) まず, 多項式 $f(x)$ を x のべきの形に表わしたときに, その係数は,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \cdots \quad (1)$$

で与えられることに注意する. 次に, $(p - qx)^n$ を,

$$(p - qx)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (2)$$

と表わしたときに, それぞれの係数 a_k はすべて整数となることに注意する. そこで, (2) 式を $f(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ に代入することで, $f(x)$ を x のべきの形

に表わしてみよ. さらに, そうして得られた式と (1) 式の係数を比べるとどんなことが分かるのか考えてみよ.

全く同様に, 例えば, $X = x - \frac{p}{q}$ として, 多項式 $f(x)$ を X のべきの形に表わすことを試みることで, $f^{(m)}(\frac{p}{q})$ がどうなるのか考えてみよ.

- (4) $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$ のとき, $0 \leq p - qx \leq p$ となることに注意せよ.
- (5) (4) の結果から, $0 \leq x \leq \pi = \frac{p}{q}$ のとき, $0 \leq f(x) \sin x \leq \frac{x^n p^n}{n!}$ となることに注意せよ.
- (6) 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ として,

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x dx$$

という積分の値を考えてみると, (2), (3) の結果から, I_n は整数となることを確かめよ. 一方, (5) の結果から, 十分大きな自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $0 < I_n < 1$ となることを確かめよ. さらに, $0 < I < 1$ となるような整数 I は存在しないことに注意せよ.