数学 IB 演習 (第 11 回)

問 **1.**

$I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ とする．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と変数変換することで, I は積分定数を除いて,

$$I = \frac{1}{2}\,(\,t + \sinh t \cosh t\,)$$

と表わせることを示せ.

(2) e^t を x で表わすことを試みることで,

$$I = \frac{1}{2}\left\{\log(x + \sqrt{x^2+1}\,) + x\sqrt{x^2+1}\right\}$$

と表わせることを示せ.

問 **2.** $\alpha > 0$ に対して, 点 $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ から点 $P = (x_0, \frac{\alpha}{2}x_0^2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0 > 0)$ までの放物線 $y = \frac{\alpha}{2}x^2$ の長さ l を求めよ.

問 **3.**

(1) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数とする．このとき,

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$$

となることを示せ.

(2) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(x)$ が $2n$ 次の多項式であるとすると,

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)\right\}$$

となることを示せ.

(3) $p, q \in \mathbb{N}$ に対して,

$$f(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$$

という $2n$ 次の多項式を考える．このとき, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2n$ に対して, $f^{(m)}(0)$, $f^{(m)}(\frac{p}{q})$ はすべて整数になることを示せ.

♠ 裏に続きがあります.

(4) (3) で与えられる関数 $f(x)$ は, $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$ のとき,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x^n p^n}{n!}$$

となることを示せ.

(5) もし, 円周率 π が, $\pi = \frac{p}{q}$, $(p, q \in \mathbb{N})$ と表わせたとすると, (3) で与えられる多項式 $f(x)$ に対して,

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx \leq \int_0^{\pi} \frac{x^n p^n}{n!} \, dx = \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!}$$

となることを示せ.

(6) 以上の結果を用いて, 円周率 π は有理数ではないことを示せ.