

数学 IB 演習 (第 10 回) の略解

目次

1. 問 1 の解答	1
2. 問 1 を見直すと	2
3. 問 2 の解答	3
4. 問 2 を見直すと	4
5. 一様収束とは	7
6. 問 3 の解答	11
7. 問 3 を見直すと	12
8. パラメータに関する微分について *	13
9. Riemann 積分のアイデアとは *	17
10. 滑らかな関数の積分可能性について *	21
11. 微積分学の基本定理について	26
12. 微積分学の基本定理を見直すと *	28

1. 問 1 の解答

まず, $x^4 + 1$ は,

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\ &= \{(x^2 + 1) + \sqrt{2}x\} \{(x^2 + 1) - \sqrt{2}x\} \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

というように因数分解されることに注意します. そこで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{1}{x^4 + 1} \left\{ (Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \right. \\ &\quad \left. + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right\} \end{aligned}$$

として, 両辺の分子の各係数を比較してみると,

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -\sqrt{2}(A - C) + B + D = 0 \\ A + C - \sqrt{2}(B - D) = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \quad (1)$$

でなければならないことが分かります. よって, (1) 式から,

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}$$

となることが分かります. したがって, $\frac{1}{x^4 + 1}$ は,

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\}$$

というように部分分数展開されることが分かります.

ここで,

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)' = 2x + \sqrt{2}$$

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)' = 2x - \sqrt{2}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{2x + 2\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - 2\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)' + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)' - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\} \end{aligned}$$

というように書き直せることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x^4 + 1} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \int \frac{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)'}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)'}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \log |x^2 + \sqrt{2}x + 1| \right. \\
&\quad \left. - \log |x^2 - \sqrt{2}x + 1| \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| \\
&\quad + \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right\}
\end{aligned}$$

となることが分かります。よって、

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \\
I_2 &= \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}
\end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| \\
&\quad + \frac{1}{4} (I_1 + I_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

と表わされることが分かります。

そこで、 I_1 について考えてみます。いま、

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

と書き直せることに注意して、

$$y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と変数変換してみると、

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dy}{y^2 + \frac{1}{2}} \\
&= 2 \int \frac{dy}{2y^2 + 1} \\
&= \sqrt{2} \int \frac{\sqrt{2}dy}{(\sqrt{2}y)^2 + 1}
\end{aligned}$$

となることが分かります。そこでさらに、

$$s = \sqrt{2}y$$

と変数変換してみると、

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{2} \int \frac{ds}{s^2 + 1} \\
&= \sqrt{2} \tan^{-1} s \\
&= \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}y) \\
&= \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1)
\end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります。全く同様にして、

$$I_2 = \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \tag{4}$$

となることが分かります。よって、(2) 式、(3) 式、(4) 式から、

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) \right. \\
&\quad \left. + \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \right\}
\end{aligned}$$

となることが分かります。

2. 問 1 を見直すと

第 8 回の問 1 のところで見たように、有理関数の原始関数を求めるためのアイデアは部分分数展開を考えるとということでした。そのためには、有理関数の分母に現れる多項式の因数分解を求めなければなりません。問 1 の解答では、

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)
\end{aligned}$$

というように変形することで因数分解を求めましたが、こうした変形が思い付かないこともあります。そのような場合でも、第 8 回の問 1 のところで見たように、実数係数の多項式はいつでも一次式と二次式の積の形に因数分解されることに注意すると、

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

とおいて、両辺の係数を比べて a, b, c, d を求めることで、 $x^4 + 1$ の因数分解を求めることができます。^{*1)}

さて、問 1 の解答では、

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

という積分を求めるために、何度か変数変換を繰り返しました。皆さんの中には、 $a \neq 0$ に対して、

^{*1)} 興味のある方は、この方法で因数分解を求めてみて下さい。

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (5)$$

が成り立つという公式を覚えていて、 $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ と変数変換した後で、直接、この (5) 式を用いて、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= \int \frac{dy}{y^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}y) \\ &= \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

というように I_1 を求めた方も多いのではないかと思います。もちろん、それで全く構わないわけですが、仮に、(5) 式という公式を忘れてしまっても、

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x \quad (6)$$

という公式さえ覚えていれば困らないということを、皆さんに理解してもらおうと思い、上で挙げた解答では、さらに、 $s = \sqrt{2}y$ という変数変換をして、積分の計算を (6) 式に帰着するというような形で述べました。^{*2)} また、仮に、(6) 式という公式まで忘れてしまった場合でも、

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{x - \sqrt{-1}} - \frac{1}{x + \sqrt{-1}} \right\}$$

というように複素数の範囲で部分分数展開を行ない、右边を「強引に」積分してみると、 $\tan^{-1} x$ に辿り着くことができるということを第 8 回の問 1 のところで注意しました。

このように、数学では公式をたくさん覚えるということとはあまり大事なことでなく、基本的な事柄と考え方のアイデアをしっかりと理解して、必要に応じて自分で工夫をしてみるということが大切です。皆さんも、基本的な考え方やアイデアをしっかりと理解して、具体的な問題に当たったときに、何がアイデアであったのかということを常に意識しながら数学を学ばれると理解が一層と深まるのではないかと思います。また、アイデアが何であったのか忘れてしまったときには、すぐに教科書などを見たりせずに、何とか自力で思い出す努力をして自分なりに再構成してみるというようなことを繰り返していると、しっかりとした知識が身に

*2) このように積分が確実に計算できるような形に帰着して計算を行なった方が、例えば、(5) 式における $\frac{1}{a}$ などの係数を覚え間違いしていたために計算ミスをしてしまうというような危険性が少なくなるのではないかと思います。

つき、あれこれと自分で工夫をすることができるようになるのではないかと思います。

さて、 $x^2 + \sqrt{2}x + 1$, $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ を、さらに、

$$\begin{aligned} x^2 + \sqrt{2}x + 1 &= \left(x + \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) \\ x^2 - \sqrt{2}x + 1 &= \left(x - \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解すると、複素数の範囲で $x^4 + 1$ が一次式の積に分解されることになります。したがって、例えば、

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad \zeta = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

として、 $\frac{1}{x^4 + 1}$ も適当な複素数 $A, B \in \mathbb{C}$ によって、

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{A}{x - \eta} + \frac{\bar{A}}{x - \bar{\eta}} + \frac{B}{x - \zeta} + \frac{\bar{B}}{x - \bar{\zeta}}$$

という形に複素数の範囲で部分分数展開できることになります。第 8 回の問 1 のところで見たように、これより、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + 1} &= A \log(x - \eta) + \bar{A} \log(x - \bar{\eta}) \\ &\quad + B \log(x - \zeta) + \bar{B} \log(x - \bar{\zeta}) \end{aligned}$$

となることが「期待」されます。興味のある方は、 $A, B \in \mathbb{C}$ を具体的に求めることと、実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $x - \eta$, $x - \zeta$ などの複素数の極表示が (x の関数として) どのように与えられるのかを考えてみることで、この「期待」が正しい答を与えるかどうかということを考えてみて下さい。

3. 問 2 の解答

- (1) まず、 $x = 0$ のときには、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n(0) = 0$ となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

となることが分かります。一方、 $0 < x \leq 1$ のときには、

$$\begin{aligned} e^{nx} &= 1 + (nx) + \frac{(nx)^2}{2!} + \frac{(nx)^3}{3!} + \dots \\ &\geq \frac{(nx)^3}{3!} \end{aligned}$$

となるので、 $f_n(x)$ の大きさが、

$$0 \leq f_n(x) = \frac{n^2 x}{e^{nx}} \leq \frac{n^2 x}{\frac{(nx)^3}{3!}} = \frac{6}{nx^2} \quad (7)$$

と評価できることが分かります。そこで、 $x \in (0, 1]$ はひとつ定まった定数であると考えて、(7) 式の各辺

で, $n \rightarrow \infty$ としてみると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

となることが分かります.

以上より, 勝手な実数 $x \in [0, 1]$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

となることが分かります.

(2) まず, $f_n(x)$ の積分を考えると,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \int_0^1 x e^{-nx} dx$$

となりますが,

$$x \cdot e^{-nx} = x \left(\frac{-1}{n} e^{-nx} \right)'$$

であると考えて部分積分してみると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \left[\frac{-x}{n} e^{-nx} \right]_0^1 + n \int_0^1 e^{-nx} dx \\ &= -n e^{-n} + n \left[\frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 \\ &= 1 - (n+1)e^{-n} \end{aligned} \quad (8)$$

となることが分かります. ここで, (1) と同様にして, e^n の大きさを, 例えば,

$$\begin{aligned} e^n &= 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots \\ &\geq \frac{n^2}{2!} \end{aligned}$$

というように評価してみると, $(n+1)e^{-n}$ の大きさが,

$$0 \leq (n+1)e^{-n} = \frac{n+1}{e^n} \leq \frac{n+1}{\frac{n^2}{2}} = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

というように評価できることが分かります. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)e^{-n} = 0 \quad (9)$$

となることが分かります. よって, (8) 式, (9) 式から,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - (n+1)e^{-n}\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かります.

一方, (1) より, 勝手な実数 $x \in [0, 1]$ に対して, $f(x) = 0$ となるので,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

となることが分かります. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

となることが分かります.

(3) (1) より, $f(x) = 0$ となるので,

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= f_n(x) \\ &= n^2 x e^{-nx} \end{aligned}$$

となることが分かります. このとき,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^2 e^{-nx} + n^2 x \cdot (-n) e^{-nx} \\ &= n^2 (1 - nx) e^{-nx} \end{aligned}$$

となることに注意して, $0 \leq x \leq 1$ における関数 $f_n(x)$ の増減表を調べてみると,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned} M_n &= \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \\ &= f_n\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{n}{e} \end{aligned} \quad (10)$$

となることが分かります. よって, (10) 式より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} = +\infty$$

となることが分かりますから, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ は一様収束ではないことが分かります.

4. 問2を見直すと

さて, 「数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する」ということは, 直感的には, 「 n が大きくなるときに a_n が a に近づく」ということでした. これを, 「 a_n と a との間の距離が 0 に近づく」というように解釈すると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$$

というように表現することもできました.*3) このよう

*3) 興味を持たれた方のために, 第9回の問3のところでも, こうした数列の極限の数学的に正確な定義について少し説明しました.

に数列の収束については、ただ一通りの定義に落ち着くわけですが、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の収束については、「収束の仕方」に応じていくつかの「収束のパターン」を考えることができます。その中で、最も都合の良い収束の仕方というのが一様収束というものです。例えば、微積分学においては、問2で考えたような極限をとる操作「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」と積分を考える操作「 $\int$ 」とが、いつ交換するのかということをきちんと考えておくことが大切になりますが、「一様収束」はこうした操作が交換することを保証してくれます。

そこで、皆さんに、関数列に対しては一様収束という概念があるということと、一様収束していないような関数列に対しては、極限をとる操作「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」と積分を考える操作「 $\int$ 」とは必ずしも交換するとは限らないということを知ってもらおうと思い、問2を出題してみました。

そこで、まず、関数列が収束するとはどういうことであるのかということを思い出すことにします。後で、関数の定義域 $I \subset \mathbb{R}$ が $[0, 1]$ のような有界な閉区間かどうかということが大切になるのですが、一様収束ということを考える上では必要ないので、一般的な形で説明することにします。そこで、 $I \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の勝手な部分集合であるとして、 I 上の関数

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が勝手にひとつ与えられているとします。^{*4)} このとき、 $f_1, f_2, f_3, \dots$ という関数の列が考えられますが、数列との類推で、 $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ のことを関数列と呼ぶことにします。ただし、 f_n という表記では、数列と紛らわしいと思われる方もあるかもしれないので、関数であることをハッキリさせるために、以下では、変数 x を明示して関数 f_n のことを $f_n(x)$ と表わすことにします。

さて、このような関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が与えられたときに、 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の「極限」を定義したいわけですが、これは次のように考えるのが自然なことのようによれます。

いま、 $x_0 \in I$ を勝手にひとつ取ってきて、関数 $f_n(x)$ たちの $x = x_0$ だけでの値を考えると $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ という数列ができます。これはただの数列ですから、この数列の極限を問題にすることができます。そこで、いま、勝手にひとつ取ってきた点 $x_0 \in I$ に対して、数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ が存在する

^{*4)} これでは抽象的で考えにくいと思われる方は、問2の例を考えてもらって構いません。

と仮定してみます。このとき、それぞれの点 $x_0 \in I$ に対して、この極限値を対応させる

$$f : x_0 \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

という関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を考えることができますが、こうして定まる関数 $f(x)$ が関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の極限であると考えられます。実際、第2回の問4のところでは、Taylor 展開の右辺に現われる無限和からなる関数をこのような形で解釈したのでした。

このように、それぞれの点 $x_0 \in I$ に対して、 x_0 の値を集めてできる数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ が収束するときに、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ は各点収束と呼びます。例えば、問2の例では、(1) で見たように、勝手な実数 $x \in [0, 1]$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ となることが確かめられますから、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ は恒等的に零となる定数関数 $f(x) = 0$ に各点収束しているわけです。これが最も素朴な関数列の収束の概念ですが、問2の(2)で見たように、このような素朴な収束の仕方だけを考えてのでは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \quad (11)$$

という「極限」と「積分」の交換は必ずしも成り立たないことが分かります。

そこで、この節では、問2の例で、どうして(11)式が成り立たなくなってしまったのかということのを少し反省してみることにします。

いま、問2の例では、 $f_n(x)$ は、

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

という形で与えられていました。そこで、この関数 $f_n(x)$ のグラフを $x \geq 0$ の範囲で考えてみることにします。すると、

$$f_n(x) \geq 0, f_n(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

となることと、(3)で見たように、

$$f'_n(x) = n^2(1 - nx)e^{-nx}$$

となることに注意して $f_n(x)$ の増減表を書いてみると、 $f_n(x)$ のグラフは、 $x = \frac{1}{n}$ のところに高さ $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$ のピークをひとつだけ持った「山の形」をしていることが分かります(図1を参照)。このとき、

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - (n+1)e^{-n}$$

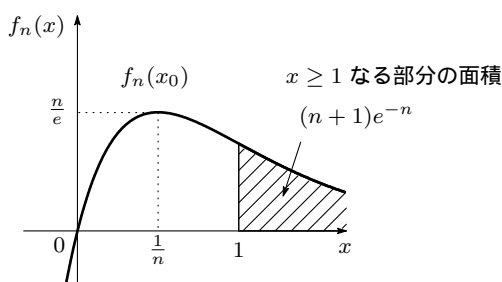


図1 $f_n(x)$ のグラフは, $x = \frac{1}{n}$ のところに, 高さ $\frac{n}{e}$ のピークを持つ山の形になる.

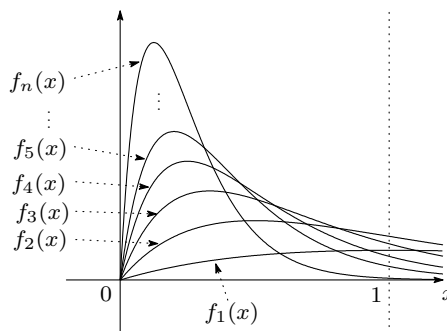


図2 n が大きくなるとともに, 山のピークが原点に近づきながら鋭くなっていく.

は, $0 \leq x \leq 1$ におけるこの「山」の面積であると理解できます. ここで, $(n+1)e^{-n}$ という数が出てきますが, (2) と同様にして部分積分することで, $f_n(x)$ を $x \geq 0$ の範囲で積分してみると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_n(x) dx &= n^2 \left[\frac{-x}{n} e^{-nx} \right]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-nx} dx \\ &= 0 + n \left[\frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^\infty \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $x \geq 0$ における $f_n(x)$ という「山」の総面積 1 のうち, $x \geq 1$ の部分のしめる面積が $(n+1)e^{-n}$ であることが分かります (図1を参照).

このとき, (3) で見たように,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)e^{-n} = 0$$

となりますが, このことは, n が大きくなるときに, $f_n(x)$ という山の総面積 1 のほとんどが, $x = \frac{1}{n}$ という山のピークの近傍に集中してくるということを意味しています.*5) したがって, (2) のところで見た,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

という等式は, n が大きくなるとともに「山」の総面積 1 が山のピークの近傍に集中してくることを表わしていると解釈できます.

そこで, 次に, (1) で見た, 勝手な実数 $x \in [0, 1]$ に対して,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (12)$$

となるということが, どのように解釈できるのかということを考えてみます. 上で見たように, これは, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が定数関数 $f(x) = 0$ に各点収束するということでした. ここで, 各点収束というのは, 勝手にひとつ取ってきた点 $x_0 \in [0, 1]$ に対して, $f_n(x_0)$ という x_0 での値だけに注目するということでした. いま,

$$f_n(x_0) = n^2 x_0 e^{-nx_0}$$

となりますが, 勝手にひとつ固定された点 $x_0 \in [0, 1]$ に対して, この $f_n(x_0)$ という値が $n \in \mathbb{N}$ とともにどのように変化するかということを考えてみます. そこで, $f_n(x_0)$ を「形式的に n で微分」してみると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \{f_n(x_0)\} &= 2nx_0 e^{-nx_0} + n^2 x_0 \cdot (-x_0) e^{-nx_0} \\ &= nx_0(2 - nx_0) e^{-nx_0} \end{aligned} \quad (13)$$

となることが分かります.*6) 上で見たように, n が大きくなるにつれて $f_n(x)$ という山のピークは, 左に移動しながらどんどん高くなっていくわけですが, (13) 式と合わせて考えると, x_0 での値 $f_n(x_0)$ は, 初めは n とともに大きくなり, $n = \frac{1}{x_0}$ くらいで「山」のピークが通りすぎ, $n = \frac{2}{x_0}$ くらいで最大になり, その後 n とともに減少しながら最終的に 0 に落ち着くというように変化することが分かります. これが, (12) 式という等式の意味でした.

このように, 各点収束という見方では, それぞれの点 x_0 を勝手にひとつ決めて, x_0 での値しか考慮しな

*5) 皆さんは, 実際に $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ のグラフを描いてみることで, 山のピークが原点に近づきながら鋭くなっていく様子を観察してみてください (図2を参照).

*6) ここで, $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n \in \mathbb{R}$ というように, n を実数の範囲にまで拡張して考えてみることにしました.

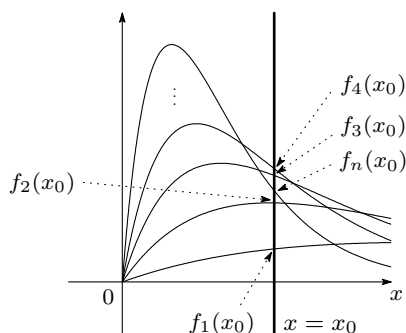


図3 各点収束という見方では、 $x = x_0$ 上の関数の値の変化しか追えない。

いために、 x_0 を右から左に通り返って行った山のピークが、その後どのような運命に見舞われることになるのかという情報がスッポリと抜け落ちてしまうことに注意して下さい（図3を参照）。すなわち、各点収束という見方では、 n が大きくなるとともに $f_n(x)$ という山のピークがどんどん痩せ細っていくという情報までは捕らえ切ることができず、最終的に山のピークが痩せ細り切って消滅した後に残された $f(x) = 0$ という「成れの果て」の姿しか捕らえることができないことが分かります。前に見たように、山の面積は、 n が大きくなるとともに山のピークの近くに集中しますから、 $n \rightarrow \infty$ という極限で、こうして山のピークが消滅すると、それとともに山の面積も失われてしまうことになります。これが、(2) で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

となってしまった原因であると理解することができます。

5. 一様収束とは

さて、問2の例は、「各点収束」だけ考えたのでは、一般に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \quad (14)$$

という「極限」と「積分」の交換が必ずしも成り立たないことを表わしています。前節で考察したように、問2の例では、その原因が関数 $f_n(x)$ のグラフとして存在していた山が、 $n \rightarrow \infty$ の極限で消滅してしまうこと、すなわち、もともとの関数 $f_n(x)$ とその極限である $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ という関数が本質的に形を変えてしまったことにあることが分かりました。そこ

で、このことを逆に考えれば、もともとの関数 $f_n(x)$ とその収束先の関数 $f(x)$ の形があまり変わらないような場合には、問2のように $n \rightarrow \infty$ という極限で「面積を持ち去られる」ようなこともなく、(14) 式が成り立つのではないかと予想してみることができます。このようなことを保証する考え方として一様収束という概念があります。

そこで、まず、 $\mathbb{R}$ の部分集合 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された二つの関数 $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 f と g のグラフの形があまり変わらないということを数学的にどのように表現したら良いのかということを考えてみます。すると、 f と g のグラフの形の差を計る目安として、例えば、

$$M = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

という量を考えることができそうです。^{*7)}

このとき、勝手な点 $x \in I$ に対して、

$$|f(x) - g(x)| \leq M \quad (15)$$

が成り立つことになりましたが、例えば、これを、

$$f(x) - M \leq g(x) \leq f(x) + M \quad (16)$$

という形に書き直してみることができます。^{*8)} すると、この(16)式は、 $f(x)$ のグラフを上下にそれぞれ M だけの幅をつけて「帯状に太らせて」描き直したときに、この帯状の領域に $g(x)$ のグラフがすっぽりと含まれてしまうということを意味していると解釈することができます（図4を参照）。皆さんは、例えば、極細のボールペンで $f(x)$ と $g(x)$ のグラフを同じ平面内に描いた後で、極太のマジックで $f(x)$ のグラフをなぞったみたら、 $g(x)$ のグラフまで塗りつぶされてしまったというところを想像してみると、考えている状況がイメージしやすいかもしれません。このとき、マジックの太さが M の大きさと対応していますから、 M の大きさが小さければ小さいほど、 $f(x)$ と $g(x)$ は「同じ形をしている」と考えることができそうです。

例えば、問2の例では、(3)の結果より、 $f_n(x)$ と

^{*7)} 一般的な状況を考えると、本当は、このような最大値が存在しないこともあり得ますが、ここでは一様収束という概念を説明することが目的なので、この問題は気にしないことにします。気になる方は、 I は $I = [0, 1]$ のような有界な閉区間で、 $f(x), g(x)$ など考える関数はすべて連続関数であると考えるもらっても構いません。

^{*8)} ここで、(15)式を、 $g(x)$ という値は $f(x)$ という値から高々 M しか離れていないと解釈しました。

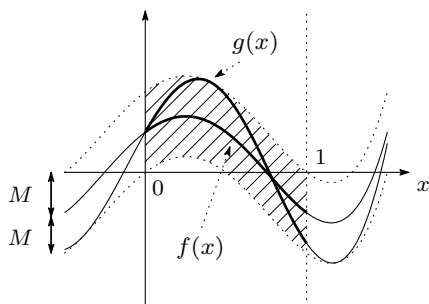


図 4 区間 $I = [0, 1]$ 上で, $f(x)$ のグラフに M だけ幅をつけると, $g(x)$ のグラフは, この帯状の領域にスッポリと含まれる.

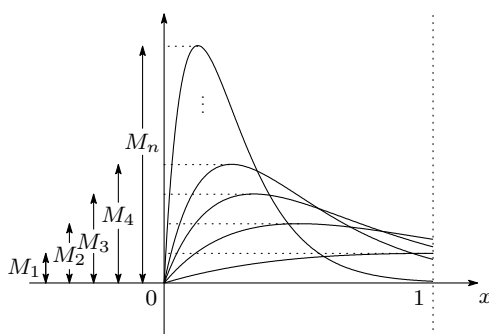


図 5 n が大きくなると, $f_n(x)$ のグラフは, $f(x) = 0$ のグラフから, どんどんずれていく.

$f(x)$ のグラフの差は,

$$\begin{aligned} M_n &= \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \frac{n}{e} \end{aligned} \quad (17)$$

で与えられていました. ここで, $f(x)$ は, $f(x) = 0$ という恒等的に零となる定数関数でしたから, $f(x)$ のグラフは x 軸 (の一部) と一致しています. したがって, 上の (17) 式は, x 軸をマジックでなぞったときに $f_n(x)$ のグラフまで塗りつぶすためには, 最低 $2M_n = \frac{2n}{e}$ の太さをもったマジックが必要であることを意味しています. このとき, n が大きくなるとともに M_n も大きくなりますが, このことが各点収束した極限の関数である $f(x)$ のグラフの形と収束直前の $f_n(x)$ のグラフの形が n が大きくなるとともに益々ずれてゆくことを表わしていると解釈することができます (図 5 を参照).

以上の考察から, $\mathbb{R}$ の部分集合 $I (\subset \mathbb{R})$ 上で定義された二つの関数 $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 「 $f(x)$ のグラフの形と $g(x)$ のグラフの形の近さ」を計る尺度と

して,

$$\|f - g\| = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad (18)$$

という量を考えてみるのができそうです. ここで, $|f(x) - g(x)|$ という数は, $f(x)$ という数と $g(x)$ という数の間の距離を表わしているわけですが, 同様に, $\|f - g\|$ という数は, 関数 f と関数 g の間の「距離」を表わしていると考えて, $\|\cdot\|$ という記号で表わしました.*9)

そこで, $\|f - g\|$ が関数 f と関数 g の間の「距離」を表わしていると解釈することができる根拠として, もうひとつ I 上の関数 $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ を取ってきて, f, g, h という三つの関数の間の「距離」にどのような関係があるのかということを考えてみます. いま, 勝手な実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

という不等式が成り立つことに注意すると, 勝手にひとつ取ってきた点 $x \in I$ に対して,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \end{aligned} \quad (19)$$

という不等式が成り立つことが分かります. このとき, $\|f - h\|, \|h - g\|$ の定義から, 勝手な点 $x \in I$ に対して,

$$|f(x) - h(x)| \leq \|f - h\|, \quad (20)$$

$$|h(x) - g(x)| \leq \|h - g\| \quad (21)$$

が成り立つことに注意すると, (19) 式, (20) 式, (21) 式から, $|f(x) - g(x)|$ の大きさが,

$$|f(x) - g(x)| \leq \|f - h\| + \|h - g\| \quad (22)$$

というように見積もれることが分かります. この評価式は, 勝手な点 $x \in I$ に対して成り立ちますから, (22) 式において, 特に, $|f(x) - g(x)|$ の最大値を与えるような点 x を考えると,

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| + \|h - g\| \quad (23)$$

という不等式が成り立つことが分かります.

この (23) 式は, f と g の間の「距離」は, f と h

*9) 議論を行なうときに, 実数や複素数など数の世界での絶対値と区別して表わした方が混乱を招くおそれが少なくなるので, 関数どうしの間の距離を $\|\cdot\|$ というように二重線でして表わす習慣があります.

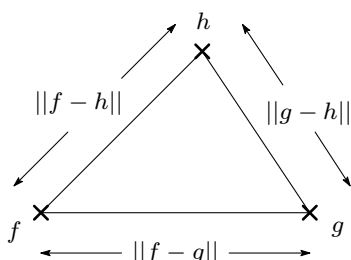


図 6 $\|\cdot\|$ は、関数の間の「距離」を与えていると解釈できる。

の間の「距離」と h と g の間の「距離」の和よりも大きくないということを示していますが、平面上に描かれた三角形の頂点に f, g, h と書いて、この式と見比べると、(23) 式は三角形の一边の長さは他の二つの辺の長さの和より大きくないということに対応していることが分かります (図 6 を参照)。こうした理由で (23) 式は三角不等式と呼ばれています。三角不等式が成り立つということが「距離」の持つ最も基本的な性質であると考えられますが、(23) 式が成り立つということは、 $\|f - g\|$ を「関数 f と関数 g の間の距離」とイメージしても構わないということを保証してくれます。

こうして I 上の関数全体の集合には、 $\|\cdot\|$ という距離が入ることになりますが、 I 上の関数列 $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたときに、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が、 $\|\cdot\|$ という距離に関して関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ に近づくとき、すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

となるときに、関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ は関数 $f(x)$ に「一様収束」と言います。

いま、 $\|\cdot\|$ の定義から、勝手な点 $x \in I$ に対して、

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$$

となることに注意すると、 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束していれば、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから、 $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することが分かります。すなわち、

$f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束する。

$\Rightarrow f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束する。

となることが分かります。一方、問 2 の例は、各点収束していても一様収束しているとは限らないということを表わしています。すなわち、勝手にひとつ点 $x_0 \in I$ を取ってきて、 x を $x = x_0$ というようにひとつ固定して考えたときには、 $\{f_n(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ という数列は $f(x_0) = 0$ という数に収束するわけですが、

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \frac{n}{e} \end{aligned}$$

でしたから、 $f_n(x)$ と $f(x)$ とは $\|\cdot\|$ という距離に関してどんどん離れていってしまうわけです。このように $\|\cdot\|$ という距離に関してどんどん離れていってしまうということが、 $n \rightarrow \infty$ という極限を取った途端に、 $f_n(x)$ と $f(x)$ のグラフの形がすっかり変わってしまうということを表わしていると解釈することができます。

さて、 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

という式が成り立つことでしたが、これを第 9 回の問 3 のところで説明した論理記号を用いて表わせば、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N},$$

$$\text{s.t. } N_0 \leq n \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon \quad (24)$$

ということになります。これは、勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、 ε に応じて自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が定まって、関数 $f(x)$ のグラフを太さ 2ε のマジックでなぞると、 $n \geq N_0$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、関数 $f_n(x)$ のグラフは、すべて一緒に塗りつぶされてしまうということを意味しています。我々がグラフを描くときには鉛筆などを用いますが、こうして描かれたグラフは鉛筆の芯の太さから決まるある幅を持っています。いま、上の ε として鉛筆の芯の太さよりずっと小さい数を取って考えると、 $n \geq N_0$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、関数 $f_n(x)$ のグラフはどれもこれも関数 $f(x)$ のグラフと全く見分けが付かないということになります。したがって、(24) 式は、どんなに鉛筆の芯を鋭く削ってグラフを描こうしても、ある番号から先の $f_n(x)$ のグラフはどれもこれも見分けが付かなくなってしまうということの意味していると解釈することができます。このように考えてみると、皆さんにも、「一様収束」とはグラフの形を変えないような収束の仕方であるということが納得できるかもしれま

せん。

そこで、次に、 I が $I = [a, b]$ というように有界な閉区間であり、 I 上で関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束しているときに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (25)$$

というように「極限」と「積分」が交換できることを確かめてみることにします。

このとき示したいことは、 $\{\int_a^b f_n(x) dx\}_{n=1,2,\dots}$ という数列が、 $\int_a^b f(x) dx$ という数に収束するということです。これらの数の間の距離である

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \end{aligned}$$

という数が 0 に近づくことを示せば良いことになります。そのために、 I 上で定義された勝手な関数 $g(x)$ に対して、

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| dx \quad (26)$$

という不等式が成り立つことに注意します。^{*10)} そこで、

$$g(x) = f_n(x) - f(x)$$

として、(26) 式を適用してみると、

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned} \quad (27)$$

と評価できることが分かります。また、 $\|\cdot\|$ の定義により、勝手な点 $x \in [a, b]$ に対して、

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \|f_n - f\| \end{aligned} \quad (28)$$

となることが分かりますから、(27) 式と (28) 式から、

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\| dx \\ &= \|f_n - f\| \cdot \int_a^b dx \\ &= \|f_n - f\| \cdot (b - a) \end{aligned} \quad (29)$$

と評価できることが分かります。いま、 $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束していると仮定しましたから、(29) 式より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq (b - a) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| \\ &= (b - a) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。よって、(25) 式が成り立つことが分かりました。

ここで、上の証明を見直すと、一様収束という仮定のもとで (25) 式が成り立つことを示すために、(29) 式という評価式が議論のポイントになっていることが分かります。この (29) 式の右辺には、

$$b - a = \int_a^b dx$$

という値が登場していて、これが有限の値であるということ、すなわち、考えている区間 $I = [a, b]$ が有界な区間であるということが上の証明では用いられていることに注意します。

そこで、積分区間が無限に伸びている場合には、どのようなことが起こり得るのかということを理解するために、問 2 の例を少し変形して考えてみます。4 節で見たように、

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

という関数のグラフは、 $x = \frac{1}{n}$ のところで $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$ という高さのピークを持つ山の形をしていて、 n が大きくなるに従ってこの山のピークがどんどん鋭くなりながら左へ移動していくのでした。そこで、 $n \rightsquigarrow \frac{1}{n}$ と

*10) 例えば、正の実数に値を取る関数の積分の値は正の実数になるということから、

$$\begin{aligned} 0 &\leq |g(x)| \pm g(x) \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_a^b \{|g(x)| \pm g(x)\} dx \\ &= \int_a^b |g(x)| dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \Rightarrow -\int_a^b |g(x)| dx &\leq \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b |g(x)| dx \end{aligned}$$

と議論してすることで、(26) 式が成り立つことを確かめることができます。

取り代えて,

$$g_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$$

という関数列を考えてみることにします. すると, 問 2 と全く同様に, 勝手な点 $x \in [0, \infty)$ に対して,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

と定めると, やはり $g(x)$ も $g(x) = 0$ という恒等的に零となる定数関数となることが分かります. また,

$$\begin{aligned} \|g_n - g\| &= \max_{x \in [0, \infty)} |g_n(x) - g(x)| \\ &= g_n(n) \\ &= \frac{1}{ne} \end{aligned}$$

となることも分かります.*11) したがって, 今の場合,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, 半直線 $[0, \infty)$ 上で $g_n(x)$ は $g(x)$ に一様収束していることが分かります. ところが, 問 2 と同様に, 山の総面積を求めてみると,

$$\int_0^\infty g_n(x) dx = 1$$

となることが確かめられますから, やはり, この場合にも,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^\infty g(x) dx$$

となっていることが分かります. すなわち, 関数 $g_n(x)$ は関数 $g(x)$ に「形を保ったまま収束している」にもかかわらず, 「極限」と「積分」は交換しないことが分かります. このように, 積分区間が無限に伸びている場合には, 関数 $g_n(x)$ が関数 $g(x)$ に一様収束していても, $g_n(x)$ の持っていた面積が無限区間に一様に分散されてしまうことで面積を失ってしまうことがあることが分かりました (図 7 を参照).

以上より, $I = [a, b]$ という有界な閉区間上において $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束しているときに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

というように「極限」と「積分」が交換できるということは, 「関数 $f_n(x)$ が形を保ったまま関数 $f(x)$ に

*11) 皆さん, 確かめて下さい.

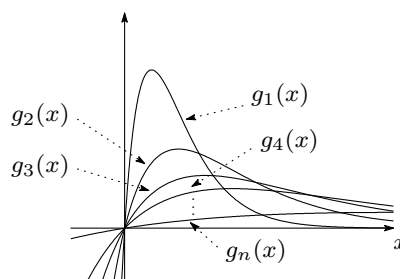


図 7 n が大きくなると, $g_n(x)$ のグラフの持っていた面積は, 半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上に一様に分散されてしまう.

収束している」ということと, 「 $[a, b]$ が有界な区間であるために, 関数 $f_n(x)$ の持っていた面積が区間全体に一様にバラまかれても, 面積を失ってしまうことはない」という二つの事実が根拠となって成り立っていることが分かりました.

6. 問 3 の解答

- (1) 被積分関数は, $\cos^2 \theta$, $\sin^2 \theta$ の有理式なので,

$$t = \tan \theta$$

と変数変換してみることにします. このとき,

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = (1+t^2) d\theta \end{cases}$$

となることと, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq t \leq \infty$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\frac{a^2}{1+t^2} + \frac{b^2 t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{(\frac{b}{a} t)^2 + 1} \end{aligned}$$

となることが分かります. そこでさらに,

$$s = \frac{b}{a} t$$

と変数変換してみると,

$$\frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{(\frac{b}{a} t)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \int_0^\infty \frac{\frac{b}{a} dt}{(\frac{b}{a} t)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{ab} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2 + 1} \\
&= \frac{1}{ab} \cdot [\tan^{-1} s]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{2ab}
\end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2ab}$$

となることが分かります。

(2) いま、 $b > 0$ は、ひとつ定まった定数であると考えて、与えられた積分を、

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta$$

と表わすことで、 a の関数であると考えてみることにします。このとき、 $I(a)$ を a で微分してみると、

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{da}(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \{ \log(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \cos^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
&= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2} d\theta \\
&= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{a^2 - b^2} \{ (a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2 \} - \frac{b^2}{a^2 - b^2}}{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2} d\theta \\
&= \frac{2a}{a^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&\quad - \frac{2ab^2}{a^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2} \\
&= \frac{a\pi}{a^2 - b^2} - \frac{2ab^2}{a^2 - b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}
\end{aligned}$$

となることが分かります。ここで、(1) の結果から、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2ab}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{da}(a) &= \frac{a\pi}{a^2 - b^2} - \frac{2ab^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{\pi}{2ab} \\
&= \frac{a - b}{a^2 - b^2} \pi \\
&= \frac{\pi}{a + b}
\end{aligned} \tag{30}$$

となることが分かります。そこで、(30) 式の両辺を積分してみると、適当な定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して、 $I(a)$ は、

$$I(a) = \pi \log(a + b) + C \tag{31}$$

と表わされることが分かります。いま、 $I(a)$ において、 $a = b$ としてみると、

$$\begin{aligned}
I(b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(b^2) d\theta \\
&= \log(b^2) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \log b^2 \\
&= \pi \log b
\end{aligned} \tag{32}$$

となることが分かります。よって、(32) 式に注意して、(31) 式において、 $a = b$ としてみると、

$$\begin{aligned}
C &= I(b) - \pi \log(2b) \\
&= \pi \log b - \pi(\log 2 + \log b) \\
&= -\pi \log 2
\end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \pi \log(a + b) - \pi \log 2 \\
&= \pi \log \left(\frac{a + b}{2} \right)
\end{aligned}$$

となることが分かります。

7. 問3を見直すと

第9回の問2のところでも見たように、被積分関数が積分変数の他にパラメータを持っている場合には、積分の値をこのパラメータに関する関数であると考えて、パラメータについての微分を行なってみることで、より簡単な形をした積分を求める問題に帰着することができる場合があります。例えば、第9回の問2のところでは、

$$I_0(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha}$$

という積分の値を具体的に求めた後で、これを α に関して何度か微分することで、

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

という積分の値が計算できるということを説明しました。

今回の問題では、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta$$

という積分の値を求めようとしたときに、このままの形ではすぐに積分を求めることができそうもないので、例えば、一度パラメータ a で微分してみることで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \cos^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

というようなもう少し積分の値が求めやすい形に変形して、この積分を計算してから最後にパラメータ a で積分することで求めたい積分の値を得るという方法を紹介してみました。これは、 $\tan^{-1} x$ という関数の Taylor 展開を求めるために、

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

となることに注目して、

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

というように $\frac{1}{1+x^2}$ の Taylor 展開を先に求めておき、($\tan^{-1} 0 = 0$ となることに注意して、) これを積分することによって、

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

という $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開を求めるという方法に似ています。皆さんに、このような方法もあるということを知ってもらうために、問 3 の問題を出題してみました。

さて、第 9 回の問 2 のところでも注意したように、こうした方法を試みるときに鍵となる事実は、

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha) dx$$

というように積分の値をパラメータ α の関数であると考えたときに、関数 $I(\alpha)$ の α に関する微分が、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x; \alpha) dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) dx \end{aligned} \quad (33)$$

というように計算できるということにありました。このようにパラメータに関する微分をする操作「 $\frac{d}{d\alpha}$ 」と積分をする操作「 $\int$ 」とが交換するということは積分の定義からすぐに従うことではなく、問 2 のところで有界閉区間上の関数列が一様収束しているときに極限を取る操作「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」と積分をする操作「 $\int$ 」とが交換するということを確かめたように、被積分関数

$f(x; \alpha)$ に対する適当な条件を定めることで、そうした条件下で (33) 式が成り立つということを一度きちんと確かめてみる必要があります。

興味がある方のために、8 節で、(33) 式に対する確認作業を行なってみようと思いますが、皆さんにとって大切なことは、問 2 の例のように、パラメータに関する微分を行なってみることで、「与えられた積分の値を求める問題」を「より簡単な形の積分の値を求める問題」に帰着できることがあるということをしかり理解することではないかと思います。そのためには、取りあえず、(33) 式が成り立つことは認めてしまって、実際にいくつか具体的な積分をこの方法で求めてみることで、こうした方法に対する感覚を養うことをまず第一に心がけたら良いのではないかと思います。第 9 回の問 2 のところで注意するように、実際には、一見パラメータが入っていないような積分の値を求めるために、わざわざ自分で「隠れたパラメータ」を導入してこの方法を試みることで、上手く積分の値を計算できることがあります。その際に、どのようにパラメータを導入するのが腕の見せどころになるわけですが、皆さんもこうした方法があるということを頭の片隅に置いておくと、場合によっては上手く積分の値が計算できることもあるのではないかと思います。

8. パラメータに関する微分について *

さて、ここで、どうして (33) 式のような計算を行なってもよいのかということが気になる方もいるのではないかと思いますので、そうした方の参考のために、 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかな関数、 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間として、

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha) dx \quad (34)$$

という α を変数とする関数を考えたときに、関数 $I(\alpha)$ の微分が、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x; \alpha) dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) dx \end{aligned} \quad (35)$$

というように計算できるということをきちんと確かめてみることにします。

そこで、まず、 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきいたときに、 $\alpha = \alpha_0$ における関数 $I(\alpha)$ の微分係数 $\frac{dI}{d\alpha}(\alpha_0)$ が、どのように計算できそうかということに

「当たり」を付けてみることにします。いま, (34) 式から, $h \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{aligned} I(\alpha_0 + h) - I(\alpha_0) &= \int_a^b f(x; \alpha_0 + h) dx - \int_a^b f(x; \alpha_0) dx \\ &= \int_a^b \{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)\} dx \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} \frac{I(\alpha_0 + h) - I(\alpha_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_a^b \{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)\} dx \\ &= \int_a^b \frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} dx \quad (36) \end{aligned}$$

となることが分かります。よって, (36) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha}(\alpha_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(\alpha_0 + h) - I(\alpha_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} dx \quad (37) \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります。ここで, (37) 式の右辺において, 極限を取る操作「 $\lim_{h \rightarrow 0}$ 」と積分をする操作「 $\int$ 」とが交換すると仮定すると,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha}(\alpha_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} dx \\ &= \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (35) 式のような計算ができるのではないかと期待することは自然なことのようによに思われます。

そこで, 実際に, この期待が正しいということを, きちんと確かめてみることにします。そのためには,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} dx &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \quad (38) \end{aligned}$$

という式が成り立つことが確かめられれば良いということになりますが, このときのアイデアは, (38) 式の左辺に現われる積分の被積分関数を平均値の定理を用いて書き直して考えるということです。すなわち, このままの形で, $\frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h}$ という関数と $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0)$

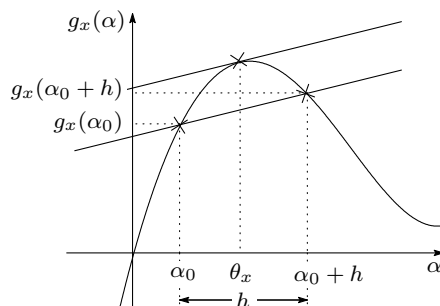


図 8 $g_x(\alpha_0 + h) - g_x(\alpha_0) = \frac{dg_x}{d\alpha}(\theta_x) \cdot h$ となる実数 $\theta_x \in \mathbb{R}$ が α_0 と $\alpha_0 + h$ の間に存在する。

という関数は外見が随分違って見えるために少し比べ難いので, $\lim_{h \rightarrow 0}$ という極限を考える前に, 平均値の定理を用いて, α に関する偏微分を先に行なってしまうということです。

そこで, いま, $x \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ固定して,

$$g_x(\alpha) = f(x; \alpha)$$

という α を変数とする一変数関数を補助的に考えてみます。^{*12)}すると, 平均値の定理から,^{*13)}

$$\begin{aligned} f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0) &= g_x(\alpha_0 + h) - g_x(\alpha_0) \\ &= \frac{dg_x}{d\alpha}(\theta_x) \cdot h \\ &= \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) \cdot h \quad (39) \end{aligned}$$

となる実数 $\theta_x \in \mathbb{R}$ が α_0 と $\alpha_0 + h$ の間に存在することが分かります (図 8 を参照)。^{*14)} よって, (39) 式から,

$$\frac{f(x; \alpha_0 + h) - f(x; \alpha_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x)$$

というように表わせることが分かりますから, (38) 式は,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \quad (40)$$

というように書き直せることが分かります。このように書き直して考えてみると, 結局, 問題は, 「 $h \rightarrow 0$ の

*12) 平たく言えば, 関数 $g_x(\alpha)$ とは, 関数 $f(x; \alpha)$ を, x の値は固定して, α だけの関数と思ったもののことです。

*13) 本質的に同じことですが, 「Taylor の定理から」と言った方が分かりやすいと思われる方が, そろそろ皆さんの中にも増えてきたかもしれません。

*14) ここで, 平均値の定理を適用する関数 $g_x(\alpha)$ は, $x \in \mathbb{R}$ に応じて異なり得ますから, 対応する θ の値も θ_x というように「 x 」という添え字を付けて表わすことにしました。

とき、 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x)$ という関数と $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0)$ という関数がほぼ同じ形をしているのか」ということ、すなわち、「 $h \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x)$ という関数は $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0)$ という関数に一樣収束するのか」という問題に帰着することが分かります。^{*15)}

そこで、(40) 式が成り立っていることを確かめてみるために、 $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx \in \mathbb{R}$ という (h に依存して決まる) 数と $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \in \mathbb{R}$ という数の間の距離を見積もることを考えてみます。すると、

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \quad (41) \end{aligned}$$

となることが分かりますから、後は、

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0)$$

という関数の大きさが評価できれば良いということになります。

そこで、再び、 $x \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ固定して、

$$k_x(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha)$$

という α を変数とする一変数関数を補助的に考えてみます。^{*16)} すると、前と同様に、平均値の定理から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) &= k_x(\theta_x) - k_x(\alpha_0) \\ &= \frac{dk_x}{d\alpha}(\eta_x) \cdot (\theta_x - \alpha_0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \eta_x) \cdot (\theta_x - \alpha_0) \quad (42) \end{aligned}$$

となる実数 $\eta_x \in \mathbb{R}$ が α_0 と θ_x の間に存在することが分かります。^{*17)} よって、 θ_x は α_0 と $\alpha_0 + h$ の間の

^{*15)} ここで、 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x)$ と表わすと、どこにも h が現われないような感じがしますが、実際には、平均値の定理を適用したときに現われる θ_x は h の取り方にも依りますから、 θ_x の中に h が含まれていることになります。その意味で、 θ_x も、例えば、 $\theta_{(x, h)}$ というように表わす方がより正確なのですが、たくさんの添え字を付けて表わすと式がゴタゴタしてしまいますから、ここでは、単に、 θ_x と表わすことにしました。

^{*16)} 前と同様、平たく言えば、関数 $k_x(\alpha)$ とは、関数 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha)$ を、 x を固定して、 α だけの関数と思ったもののことです。

^{*17)} 上で注意したように、本当は θ_x は h の取り方にも依りますから、 η_x の方も h の取り方にも依ることになりますが、式がゴタゴタしてしまうことを避けるために、こちらも、単に、 η_x と表わすことにしました。

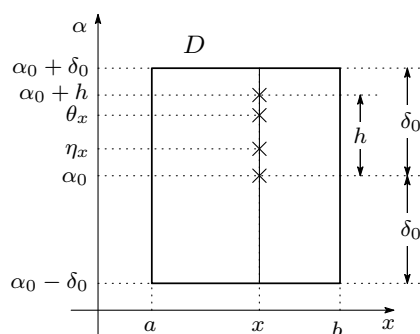


図 9 領域 D と、 $|h| < \delta_0$ のときの θ_x, η_x などの様子。

数であることに注意すると、(42) 式から、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| \\ &= \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \eta_x) \right| \cdot |\theta_x - \alpha_0| \\ &\leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \eta_x) \right| \cdot |h| \quad (43) \end{aligned}$$

となることが分かります。

以上の準備のもとで、(40) 式が成り立っていることを確かめてみることにします。そこで、いま、 $0 < \delta_0 \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきて、

$$\begin{aligned} D &= [a, b] \times [\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0] \\ &= \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \alpha \in [\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0]\} \end{aligned}$$

として、領域 D における関数 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \alpha) \right|$ の最大値を、

$$M = \max_{(x, \alpha) \in D} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \alpha) \right|$$

と表わすことにします。このとき、 $|h| < \delta_0$ とすると、 θ_x, η_x などの様子は、図 9 のようになっていることが分かります。特に、 $(x, \eta_x) \in D$ となることが分かりますから、(43) 式から、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \eta_x) \right| \cdot |h| \\ &\leq M \cdot |h| \quad (44) \end{aligned}$$

となることが分かります。よって、(44) 式の両辺を a から b まで積分することで、

$$\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b M|h| dx \\
&= M|h| \cdot \int_a^b dx \\
&= M|h| \cdot (b-a) \\
&= M(b-a) \cdot |h|
\end{aligned} \tag{45}$$

となることが分かりますから、結局、(41) 式、(45) 式から、

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \right| \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \\
&= M(b-a) \cdot |h|
\end{aligned} \tag{46}$$

となることが分かります。したがって、(46) 式の両辺で、 $h \rightarrow 0$ という極限を考えることで、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \right| = 0 \tag{47}$$

となることが分かりますから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx$$

となることが分かります。^{*18)}

こうして、無事、(40) 式を確かめることができましたから、

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx$$

となることが分かりました。ここで、 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ は何でも良かったことに注意して、 $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha$ と書き直すことにすると、結局、関数 $I(\alpha)$ の微分が、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x; \alpha) dx \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) dx
\end{aligned}$$

というように計算できることが分かりました。

さて、上の議論を見返すと、(47) 式の結論を導くに当たり、(46) 式という評価式が議論のポイントになっていることが分かります。すると、5 節での議論と同様に、(46) 式の右辺には、

^{*18)} ここで、(47) 式を「 $h \rightarrow 0$ のとき、 $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx \in \mathbb{R}$ という (h に依存して決まる) 数と $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \in \mathbb{R}$ という数の間の距離が 0 に近づく」と解釈しました。

$$b-a = \int_a^b dx$$

という値が登場していて、これが有限の値であるということ、すなわち、考えている区間 $I = [a, b]$ が有界な区間であるということが上の証明では用いられていることに注意します。

一方、第 9 回の問 2 のところで考えた

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}$$

という積分の場合には、 $b-a = \infty$ というように、積分区間の長さが無限大になってしまいますから、このような場合まで考えようとする、上の議論を少し修正して考える必要があります。そこで、興味を持たれた方の参考のために、 $m \in \mathbb{N}$ として、

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^m}$$

という例をもとにして、上の議論に対して、どのような修正を加えればよいのかということを説明してみることになります。

いま、

$$f(x; \alpha) = \frac{1}{(x^2 + \alpha)^m}$$

とすると、

$$I(\alpha) = \int_0^\infty f(x; \alpha) dx$$

と表わすことができますが、このとき確かめたいことは、 $\alpha > 0$ のとき、^{*19)}

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty f(x; \alpha) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) dx
\end{aligned} \tag{48}$$

というような計算ができるということになります。そこで、上で行なった議論を見返すと、(43) 式までの書き換えは、このような場合にも、全く同様に行なえることが分かります。ただし、単純に $[a, b] \rightsquigarrow [0, +\infty)$ と置き換えて考えたのでは、一般には、

$$M = \max_{(x, \alpha) \in D} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \alpha) \right|$$

という値が (有限値として) 定まるとは限りませんし、

^{*19)} $\alpha \leq 0$ のときには、そもそも、 $I(\alpha) = \int_0^\infty f(x; \alpha) dx$ という値が定まらないことに注意して下さい。

$$\int_0^\infty dx = +\infty$$

ともなってしまいますから、上の議論はそのままの形では使えないということになります。

そこで、このような場合には、「更なる工夫」が必要になりますが、このときのアイデアは、 $0 < R$ となる実数 $R \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきて、

$$\int_0^\infty = \int_0^R + \int_R^\infty$$

というように、積分区間を二つに分けて考えてみるということです。すると、 $\int_0^R$ という第一項の積分の部分に関しては、 $a = 0, b = R$ として、上の議論がそのままの形で成り立ちますから、(45) 式から、

$$\int_0^R \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \leq MR \cdot |h| \quad (49)$$

となることが分かります。

一方、 $\int_R^\infty$ という第二項の積分の部分に関しては、そのままの形では議論が成り立ちませんから、上の議論を少し修正する必要があります。いま、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha) &= \frac{-m}{(x^2 + \alpha)^{m+1}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \alpha) &= \frac{m(m+1)}{(x^2 + \alpha)^{m+2}} \end{aligned}$$

となることと、 $\alpha > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \alpha) \right| &= \frac{m(m+1)}{(x^2 + \alpha)^{m+2}} \\ &\leq \frac{m(m+1)}{x^{2m+4}} \end{aligned} \quad (50)$$

となることが分かります。よって、(43) 式、(50) 式から、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| &\leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(x; \eta_x) \right| \cdot |h| \\ &\leq \frac{m(m+1)}{x^{2m+4}} \cdot |h| \end{aligned} \quad (51)$$

となることが分かります。そこで、(44) 式の代わりに、(51) 式を用いて議論するということが、「更なる工夫」ということになります。すると、(51) 式の両辺を R から ∞ まで積分することで、

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx &\leq m(m+1)|h| \cdot \int_R^\infty \frac{dx}{x^{2m+4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= m(m+1)|h| \cdot \left[-\frac{1}{2m+3} \cdot \frac{1}{x^{2m+3}} \right]_R^\infty \\ &= \frac{m(m+1)}{(2m+3)R^{2m+3}} \cdot |h| \end{aligned} \quad (52)$$

となることが分かります。こうして、(44) 式の代わりに、(51) 式を用いて議論することで、(45) 式の代わりに、(52) 式という評価式が得られることが分かりました。したがって、後は、(49) 式と (52) 式を合わせることで、

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \\ &\leq \int_0^R \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \\ &\quad + \int_R^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) \right| dx \\ &\leq MR \cdot |h| + \frac{m(m+1)}{(2m+3)R^{2m+3}} \cdot |h| \end{aligned} \quad (53)$$

となることが分かりますから、(53) 式の両辺で、 $h \rightarrow 0$ という極限を考えることで、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \theta_x) dx = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x; \alpha_0) dx$$

となることが分かります。よって、今の場合にも、(48) 式のような計算ができることが分かりました。このように、積分区間の長さが無限大の場合でも、(50) 式のような評価式を見つけることができ、(52) 式のような (45) 式の代わりになるような評価式が得られるような場合には、やはり、(48) 式のような計算ができることが分かります。

興味のある方は、教科書や演習書に載っている具体的な積分に対して、(48) 式のような計算を試みるに当たり、(50) 式のような評価式を見つけることができるかどうかということや、その評価式を用いて、(52) 式のような評価式が得られるかどうかということを考えてみると、「パラメータに関する微分」という方法について、より良く理解することができるようになるのではないかと思います。

9. Riemann 積分のアイデアとは*

皆さんは、これまでに区分求積法という考え方を通して積分という概念に触れたことがあるのではないかと思います。この演習でも、皆さんがひと通り積分と

いう概念に触れたことがあるということを前提として、積分に対する具体的な感覚を養うということを第一の目標としてきました。そのために積分とは何かということや、どのような関数に対してきちんと積分の値が定まるのかというような問題には触れずに済ましてきました。そこで、ここでは、こうした問題について少し考えてみることにします。

まず、Riemann 積分という考え方に対するイメージを膨らませるために、次のような問題を考えてみます。いま、ロケットに乗って宇宙旅行をしてみるという状況を想像してみます。このとき、地球を出発した時刻を $t = 0$ であると定めて、その後の時々刻々と変化するロケットのスピード・メーターの動きが記録されることになっているものとします。ひとたびロケットが地球を離れてしまうと窓の外にはいつまで経ってもあまり代わり映えのしない景色が続くように思われます。こうして同じような景色を眺めながら時を過ごす内に、自分がどのくらいの距離を旅してきたのか分からなくなることがよくありますが、記録されたロケットのスピード・メーターのデータをもとに、この移動距離を割り出すことができるでしょうか。すなわち、地球を出発した後、時刻 t でのロケットのスピードを表わす $v(t)$ という関数が与えられたときに、時刻 $t = T$ までに移動した距離を表わす $x(T)$ という関数を求めることができるでしょうか。^{*20)}

このような問題に対して、すでに微積分学をある程度理解している皆さんの中の多くの方が、「速度 $v(t)$ というのは移動距離 $x(t)$ の瞬間的な変化率のことだから、 $v(t)$ と $x(t)$ は、

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t) \quad (54)$$

という関係にある。そこで、 $t = 0$ では $x(0) = 0$ であることに注意して、(54) 式の両辺を 0 から T まで積分すると、

$$x(T) = \int_0^T v(t) dt \quad (55)$$

となることが分かるから、時刻 T での移動距離 $x(T)$ を割り出すためには $v(t)$ という関数を 0 から T まで積分すればよい。」と正しく答えるのではないかと思います。もちろん、これは積分というものに対する正しい理解の仕方のわけですが、ここではむしろ、(55)

^{*20)} 相対論によれば時の流れは人によって異なるのではないのかといったことや、ロケットにスピード・メーターなどあるのかといったようなもろもろの疑問は気にしないことにします。

式の右辺に現れた積分 $\int_0^T v(t) dt$ の意味を反省してみるとということが目的なので、もう少し素人っぽく考えてみることにします。

そこで、まず、時刻 $t = T$ での移動距離 $x(T)$ を大まかに見積もってみることにします。いま、ロケットのスピードは連続的に変わるとして、以下では、 $v(t)$ は t に関する連続関数であると仮定することにします。このとき、区間 $[0, T]$ における関数 $v(t)$ の最大値、最小値を、それぞれ、

$$M = \max_{t \in [0, T]} v(t), \quad m = \min_{t \in [0, T]} v(t)$$

と表わすことにします。すると、ロケットの速さは常に M より小さいわけですから、移動した距離 $x(T)$ は、

$$x(T) \leq MT$$

というように、常に最大スピード M で飛び続けた場合よりも小さいはずです。同様に、ロケットの速さは常に m より大きいわけですから、移動した距離 $x(T)$ は、

$$mT \leq x(T)$$

というように、常に最小スピード m で飛び続けた場合よりも大きいはずです。したがって、ロケットの移動距離 $x(T)$ は、

$$mT \leq x(T) \leq MT \quad (56)$$

というように見積もれることが分かります。

そこで、次に、もう少し違った見積もりを得るために、

$$0 < t_1 < T$$

というように、 t_1 という 0 と T の間の時刻を勝手にひとつ選んできて、 $[0, t_1]$ という時間間隔の間にロケットが移動した距離 $x(t_1)$ と、 $[t_1, T]$ という時間間隔の間にロケットが移動した距離 $x(T) - x(t_1)$ とを、それぞれ別々に見積もるとどうなるかということを考えてみます。前と同様に、それぞれの区間におけるロケットの速さの最大値、最小値を、

$$M_1 = \max_{t \in [0, t_1]} v(t), \quad M_2 = \max_{t \in [t_1, T]} v(t)$$

$$m_1 = \min_{t \in [0, t_1]} v(t), \quad m_2 = \min_{t \in [t_1, T]} v(t)$$

と表わすことにすると、それぞれの時間間隔での移動距離が、

$$\begin{aligned} m_1 t_1 &\leq x(t_1) \leq M_1 t_1 \\ m_2(T - t_1) &\leq x(T) - x(t_1) \leq M_2(T - t_1) \end{aligned}$$

このように見積もることができます。したがって、二つの不等式を足し合わせると、全体の移動距離 $x(T)$ が、

$$m_1 t_1 + m_2(T - t_1) \leq x(T) \leq M_1 t_1 + M_2(T - t_1) \quad (57)$$

このように見積もれることが分かります。

以上の考察から、 $x(T)$ に対する (56) 式、(57) 式という二通りの見積もりが得られたわけですが、ここで、これら二通りの見積もりの間の関係を調べてみることにします。いま、 M は区間 $[0, T]$ における $v(t)$ の最大値ですから、勝手な時刻 $t \in [0, T]$ に対して、

$$v(t) \leq M$$

という不等式が成り立ちます。そこで、 t として区間 $[0, t_1]$ での $v(t)$ の最大値 M_1 を与えるようなものを考えると、

$$M_1 \leq M$$

となることが分かります。同様に考えると、結局、

$$m \leq m_1, m_2, \quad M_1, M_2 \leq M \quad (58)$$

となることが分かります。^{*21)} したがって、(58) 式より、

$$\begin{aligned} mT &= mt_1 + m(T - t_1) \leq m_1 t_1 + m_2(T - t_1), \\ M_1 t_1 + M_2(T - t_1) &\leq M t_1 + M(T - t_1) = MT \end{aligned}$$

となることが分かりますから、(57) 式と合わせると、

$$mT \leq x(T) \leq MT$$

となることが分かります。すなわち、 $[0, T]$ という区間を $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, T]$ というように二つに分割して考えることにより、(56) 式という見積もりは (57) 式という見積もりに「改善される」ことが分かりました。

そこで、これらの考察を一般化して考えてみると、次のようになります。いま、

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T \quad (59)$$

となるような実数 $t_i \in [0, T]$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) を、

^{*21)} 皆さん、確かめて下さい。

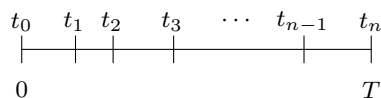


図 10 閉区間 $[0, T]$ を細かい区間に分割する。

勝手にひとつずつ選んで、区間 $[0, T]$ を、

$$[0, T] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n]$$

このように細かい区間に分割してみることにします (図 10 を参照)。ただし、このような分割をいちいち書いていくと大変ですから、(59) 式を満たすような実数 $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ を与えることを区間 $[0, T]$ の分割と呼び、分割点の集合を考えることで、このような分割を、

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

と表わすことにします。^{*22)}

さて、区間 $[0, T]$ の分割 Δ が、勝手にひとつ与えられたときに、それぞれの小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の間でのロケットの移動距離 $x(t_i) - x(t_{i-1})$ を前と同様に見積もると、

$$M_i = \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} v(t), \quad m_i = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} v(t)$$

として、

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq x(t_i) - x(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}) \quad (60)$$

となることが分かります。したがって、

$$x(t_0) = x(0) = 0, \quad x(t_n) = x(T)$$

であることに注意して、(60) 式の各辺で、 i に関する和を取ると、全体の移動距離 $x(T)$ の大きさが、

$$\sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq x(T) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \quad (61)$$

このように見積もれることが分かります。

ここで、(61) 式の両辺に現れる量は、区間 $[0, T]$ の分割 Δ を指定することによって定まる数ですから、これらを、それぞれ、

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}),$$

^{*22)} このとき、それぞれの分割 Δ によって、分割点の数 $n+1$ は異なっても良いと考えることにします。

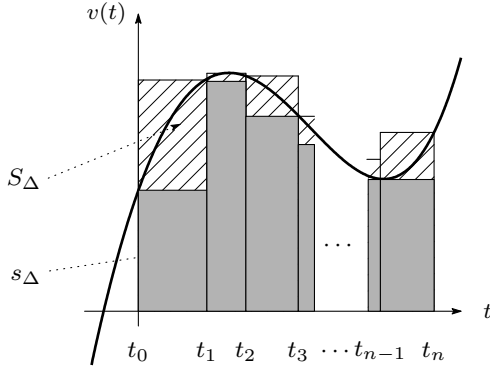


図 11 $[0, T]$ の分割 Δ に対して, S_{Δ}, s_{Δ} は, それぞれ, 上のような面積で与えられる.

$$S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

と表わすことにします (図 11 を参照). すると, 以上の議論から, 区間 $[0, T]$ の分割 Δ を勝手にひとつ与えて, 各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ での移動距離をそれぞれ見積もるという方針をとると, 全体の移動距離 $x(T)$ の大きさが,

$$s_{\Delta} \leq x(T) \leq S_{\Delta}$$

というように評価できることが分かりました.

さて, 前に, 区間 $[0, T]$ を全く分割せずに得た (56) 式という評価式を考える代わりに, 区間 $[0, T]$ を二つに分割して得た (57) 式という評価式を考えることにより, $x(T)$ の大きさに対する見積もりが改善されるということを見ましたが, 一般の分割に対しても全く同様のことが成り立ちます.

いま, $[0, T]$ の二つの分割 Δ, Δ' に対して, $\Delta \subset \Delta'$ となるときに Δ' は Δ の「細分」とであると呼ぶことにします. すなわち, 分割 Δ の細分とは Δ の分割点にさらにいくつかの分割点をつけ加えることによって得られる分割のことです.*23)

このとき, 前と同様にして, 分割を細かくすると $x(T)$ の大きさに対する評価が改善するということ, すなわち,

$$\Delta \subset \Delta' \implies s_{\Delta} \leq s_{\Delta'} \leq x(T) \leq S_{\Delta'} \leq S_{\Delta} \quad (62)$$

となることを確かめることができます. 例えば, 一度に (62) 式を考えるのは面倒ですから, 分割 Δ から分

*23) こうして分割点をつけ加えることによって, 分割がさらに細くなるわけです.

割 Δ' を得るために新たにつけ加えられた分割点を $t'_1, t'_2, \dots, t'_k$ と表わすことにして,

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta, \quad \Delta_1 = \Delta \cup \{t'_1\}, \quad \Delta_2 = \Delta \cup \{t'_1, t'_2\}, \\ &\dots, \quad \Delta_k = \Delta \cup \{t'_1, t'_2, \dots, t'_k\} = \Delta' \end{aligned}$$

という細分の列を補助的に考えて,

$$s_{\Delta} = s_{\Delta_0} \leq s_{\Delta_1} \leq s_{\Delta_2} \leq \dots \leq s_{\Delta_{k-1}} \leq s_{\Delta_k} = s_{\Delta'}$$

$$S_{\Delta} = S_{\Delta_0} \geq S_{\Delta_1} \geq S_{\Delta_2} \geq \dots \geq S_{\Delta_{k-1}} \geq S_{\Delta_k} = S_{\Delta'}$$

となることを数学的帰納法を用いて示すという方針を取ることにすると, それぞれの step は, 前に一点だけ分割点をつけ加えて $[0, T]$ を $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, T]$ と細分したときの議論に帰着できます.*24)

そこで, 区間 $[0, T]$ の分割の細かさを表わす量として, それぞれの小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の大きさの最大値

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$$

を考え, これを分割 Δ の幅と呼ぶことにします.

いま, 区間 $[0, T]$ の分割 Δ が, 勝手にひとつ与えられたときに, Δ に次々と分割点をつけ加えていくことで, 分割の幅がどんどん小さくなるような細分の列 Δ_n を作ることができます. このとき, (62) 式により,

$$s_{\Delta_n} \leq x(T) \leq S_{\Delta_n}$$

という評価は n が大きくなるとともに改善してゆくと考えられます. ここで, さらに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} \quad (63)$$

という等式が成り立つとすると, この極限值としてめでたくロケットの移動距離 $x(T)$ が割り出せることになります. いま, (62) 式から,

$$s_{\Delta_1} \leq s_{\Delta_2} \leq s_{\Delta_3} \leq \dots \leq s_{\Delta_n} \leq \dots \leq S_{\Delta_1}$$

$$S_{\Delta_1} \geq S_{\Delta_2} \geq S_{\Delta_3} \geq \dots \geq S_{\Delta_n} \geq \dots \geq s_{\Delta_1}$$

となることが分かりますから, $\{s_{\Delta_n}\}_{n=1,2,\dots}$ は有界な単調増加数列, $\{S_{\Delta_n}\}_{n=1,2,\dots}$ は有界な単調減少数列となることが分かります. したがって, それぞれの極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}$ は存在することが分かりますから, (63) 式が成り立つということは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n}| = 0$$

*24) 興味のある方は, この方針で (62) 式を証明してみてください.

となることと同じであるということに注意します。すなわち、このことは、 s_{Δ_n} であれ、 S_{Δ_n} であれ、 n が十分大きくなれば、これらの数はすべて同じような数に落ち着くということを意味しているわけです。

また、最初の分割 Δ の取り方やその分割の細分の列 $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\dots}$ の取り方は人によって異なり得ますが、上のような方法で移動距離 $x(T)$ を割り出そうとしたときに、それぞれの人の得た答がバラバラになってしまったのではお話になりません。今の場合、ロケットの移動距離 $x(T)$ というのは、こうした様々な選択の仕方によらずにただひとつの値に定まっているはずであるということは、我々の日常的な経験から直感的には明らかなわけですが、ここで発想を逆転させて、勝手にひとつ関数 $v(t)$ が与えられたときに、 $[0, T]$ の分割 Δ に対して s_Δ や S_Δ のような和を考えると、分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さくなりさえすれば、どのような分割 Δ を取ってこようと、 s_Δ という数であれ、 S_Δ という数であれ、どれもこれも同じような数に落ち着いてしまうということが、関数 $v(t)$ の積分の値がきちんと定まるということであると解釈し、この落ち着き先の数が関数 $v(t)$ の区間 $[0, T]$ での定積分

$$\int_0^T v(t) dt$$

の値であると定めることができそうです。このような形で積分を理解しようというのが Riemann 積分のアイデアです。このような形で積分を解釈すると、10 節で見るように、 $v(t)$ が連続関数とは限らず、グラフを描くことさえもままならないような場合にも、 $v(t)$ の積分がきちんと定まるかどうかといったことを問題にすることができるようになります。

10. 滑らかな関数の積分可能性について *

さて、9 節では、区間 $[0, T]$ の分割 Δ に対して、 s_Δ や S_Δ のような和を考え、分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしていったときの s_Δ や S_Δ の極限として積分の値を捕らえようというアイデアについて説明しました。そこで、次に、分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さくなりさえすれば、分割 Δ の取り方によらずに、 s_Δ も S_Δ も大体同じような数に落ち着くということが本当に成り立つのかということについて考えてみることにします。

まず、問題点をより良く理解するために、例として、

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \text{ のとき} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \text{ のとき} \end{cases}$$

という少し人工的な関数を考えてみます。すると、区間 $[0, T]$ のどのような分割 Δ を取ってきても、 Δ の各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ には有理数も無理数も含まれていますから、常に、

$$m_i = 0, M_i = 1$$

となることが分かります。よって、区間 $[0, T]$ のどのような分割 Δ に対しても、

$$s_\Delta = 0, S_\Delta = T$$

となってしまうことが分かります。^{*25)} したがって、このような関数に対しては、分割の幅 $|\Delta|$ をどんなに小さくしていても、 s_Δ と S_Δ が同じような数に落ち着くということはありませんから、9 節で述べたようなアイデアで積分の値を解釈することになると、積分の値をきちんと定めることができないということになります。このことから、勝手に関数 $v(t)$ を考えたのでは必ずしも積分の値がきちんと定義されるとは限らないことが分かります。

そこで、どのような関数に対して積分の値がきちんと定義されるのかということ一度確認しておく必要がありますが、こうした形でちゃんと積分の値が定義できるような関数の代表的な例が連続関数です。ただし、連続関数の積分といっても、例えば、一番単純な $v(t) = 1$ というような定数関数の積分であっても、積分区間が無限に伸びているときには、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v(t) dt &= \int_0^\infty 1 \cdot dt \\ &= +\infty \end{aligned}$$

というように上手く積分の値が定義できません。また、区間 $(0, 1]$ 上で、 $v(t) = \frac{1}{t}$ という連続関数の積分を考えても、

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t) dt &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \\ &= [\log t]_0^1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

となってしまう、上手く積分の値が定義できません。この例のように、たとえ積分区間が有限な区間であっても、区間の端っこの点で関数 $v(t)$ の値が定義されないような場合には、上手く積分の値が定義できないことがあり得るわけです。積分の値をきちんと定義

^{*25)} 皆さん、確かめてみて下さい

しようとしたときに、一般には、こうした積分区間の性質に起因する問題が起こり得るので、微積分学の教科書では、手始めに、積分区間としてこうした問題の起こらない有界閉区間だけを考えて、いつ積分の値がきちんと定まるのかということが考察されているわけです。したがって、上で積分の値がきちんと定義できるような関数の代表的な例が連続関数であると言いましたが、正確には、連続関数に対しては有界閉区間上の積分の値が常にきちんと定まるといことになります。^{*26)} このように有界閉区間上で連続関数の積分の値がきちんと定まるといことを確かめておいてから、そのことを利用して積分区間が無限に伸びている場合や、積分区間の端っこの点で関数の値が定義されていない場合などを考察するという方針が取られるのが普通です。

そこで、連続関数に対して、9 節のアイデアで積分の値がきちんと定まることを確かめたいわけですが、実際に皆さんが接するような関数は、単なる連続関数というより、何度でも微分できるような滑らかな関数であることが多いでしょうから、ここでは、 $v(t)$ が、 $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ という何度でも微分できる関数であるとして、関数 $v(t)$ の区間 $[0, T]$ 上での積分の値

$$\int_0^T v(t) dt$$

がきちんと定まるということを確認してみることになります。

さて、9 節の結果をまとめると次のようになります。いま、区間 $[0, T]$ の分割 Δ に対して、 Δ の各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における関数 $v(t)$ の最大値、最小値を、それぞれ、

$$M_i = \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} v(t),$$

$$m_i = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} v(t)$$

として、

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

*26) 皆さん良くご存じのように、 $\int_a^b f(x) dx$ という積分の値は、幾何学的には、区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる領域の (符号付きの) 面積という解釈ができます。このとき、上の主張は、直観的には、 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上の連続関数であるとする、すなわち、区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフが繋がっているとすると、このような面積がきちんと確定するだろうということです。

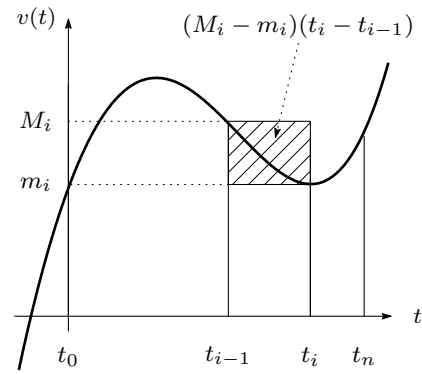


図 12 S_Δ と s_Δ の差は、各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 上では、 $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ で与えられる。

という和を考えると、積分の値「 $\int_0^T v(t) dt$ 」として定義されるべき値 $x(T)$ が、

$$s_\Delta \leq x(T) \leq S_\Delta$$

というように見積もることができるのでした (図 11 を参照). また、分割 Δ の細分 Δ' を取ると、

$$s_\Delta \leq s_{\Delta'} \leq x(T) \leq S_{\Delta'} \leq S_\Delta$$

というように上の見積もりが改善されるのでした。このとき、分割 Δ の幅 $|\Delta|$ が十分小さくなりさえすれば、 s_Δ も S_Δ も同じような値に落ち着くということが、以下で確かめたいことになります。

そのために、まず、勝手にひとつ取ってきた分割 Δ に対して、 s_Δ という数と S_Δ という数の間の距離を見積もることを考えてみます。すると、

$$0 \leq S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

となりますから、それぞれの小区間において、 $M_i - m_i$ という数の大きさを見積もることができればよいことになります (図 12 を参照). このとき、これらの最大値 M_i 、最小値 m_i を与えるような点 $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ をそれぞれ勝手にひとつずつ選んでくると、

$$M_i - m_i = v(\alpha_i) - v(\beta_i)$$

と表わせますから、結局、 $M_i - m_i$ という数の大きさを評価するためには、勝手な実数 $s, t \in [0, T]$ に対して、 $|v(s) - v(t)|$ の大きさが評価できればよいということになります。

いま、 $v(t)$ は微分可能な関数であると仮定しましたから、平均値の定理により、勝手な実数 $s, t \in [0, T]$ に

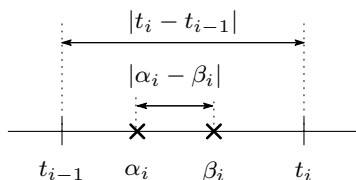


図 13 $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ なので, α_i と β_i の間の距離は t_i と t_{i-1} の間の距離より小さい.

対して,

$$v(s) - v(t) = v'(\theta) \cdot (s - t) \quad (64)$$

となるような実数 $\theta \in [0, T]$ が s と t の間に存在することが分かります. そこで, 区間 $[0, T]$ における関数 $|v'(t)|$ の最大値を,

$$L = \max_{t \in [0, T]} |v'(t)|$$

と表わすことにします. すると, (64) 式から, 勝手な実数 $s, t \in [0, T]$ に対して, $|v(s) - v(t)|$ の大きさが,

$$\begin{aligned} |v(s) - v(t)| &= |v'(\theta)| \cdot |s - t| \\ &\leq L \cdot |s - t| \end{aligned} \quad (65)$$

と評価できることが分かります. 特に, $s = \alpha_i, t = \beta_i$ として, $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ であることに注意すると, (65) 式から, $M_i - m_i$ の大きさが,

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= |M_i - m_i| \\ &= |v(\alpha_i) - v(\beta_i)| \\ &\leq L \cdot |\alpha_i - \beta_i| \\ &\leq L \cdot |t_i - t_{i-1}| \end{aligned}$$

というように見積もれることが分かります.*27) ここで, 分割の幅 $|\Delta|$ を,

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$$

と定義したことを思い出すと, 結局, $M_i - m_i$ の大きさが,

$$0 \leq M_i - m_i \leq L \cdot |\Delta| \quad (66)$$

と評価できることが分かります. したがって, (66) 式から, S_Δ と s_Δ の差が,

$$\begin{aligned} 0 \leq S_\Delta - s_\Delta &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq L \cdot |\Delta| \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= L \cdot |\Delta| \cdot T \end{aligned}$$

と評価できることが分かります.

以上から, 区間 $[0, T]$ の分割 Δ を, 勝手にひとつ取ってきたときに, S_Δ と s_Δ の差が,

$$0 \leq S_\Delta - s_\Delta \leq LT \cdot |\Delta| \quad (67)$$

と見積もることができることが分かりました. これより, 分割の幅 $|\Delta|$ が十分小さければ, S_Δ も s_Δ もほぼ同じような数になることが分かります.

そこで, 次に, 異なる二つの分割 Δ, Δ' に対して, $s_\Delta, s'_{\Delta}, S_\Delta, S'_{\Delta}$ などの値の関係について考察してみることになります. そのためには, s_Δ, S_Δ が, それぞれ,

$$\begin{aligned} s_\Delta &= \sum_{i=1}^n v(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}), \\ S_\Delta &= \sum_{i=1}^n v(\beta_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

と表わせることに注意して, これを一般化した次のような和を考えてみると便利です.

いま, 分割 Δ が勝手にひとつ与えられたときに, 各小区間の代表点 $\gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ を勝手にひとつずつ選んできて, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ と表わすことにします. このとき,

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^n v(\gamma_i)(t_i - t_{i-1})$$

という和を考えてみます (図 14 を参照). これを分割 Δ に対する Riemann 和と呼びます. いま, m_i, M_i の定義から, どのように代表点 $\gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ を取ってきても,

$$m_i \leq v(t_i) \leq M_i$$

となりますから, 分割 Δ に対するどんな Riemann 和も,

$$s_\Delta \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_\Delta \quad (68)$$

という不等式を満たすことが分かります.

そこで, s_Δ, S_Δ など特別な Riemann 和として表わされることに注意して, より一般に, 区間 $[0, T]$ の

*27) 最後の不等式では, 「 $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ なので, α_i と β_i の間の距離は t_i と t_{i-1} の間の距離より小さい」と考えました (図 13 も参照).

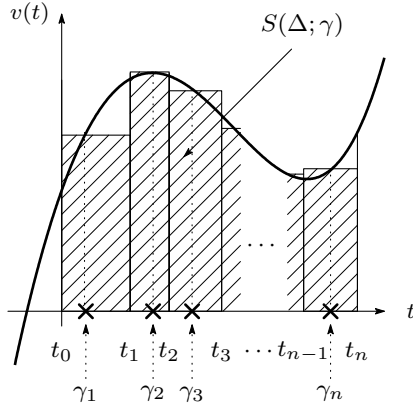


図 14 各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ から、勝手な代表点 γ_i を取ってきたときの Riemann 和は上のような面積で与えられる。

二つの分割 Δ, Δ' に対して、それぞれの分割に付随した勝手な Riemann 和 $S(\Delta; \gamma), S(\Delta'; \gamma')$ の大きさを比べてみることにします。このとき、勝手に与えられた二つの分割を直接比べるのは難しいので、

$$\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$$

という Δ と Δ' の共通の細分を考えて、 Δ'' を仲立ちとして比べることを考えてみます。すると、 $\Delta \subset \Delta''$ となりますから、(62) 式と (68) 式より、

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta''} \leq S(\Delta''; \gamma'') \leq S_{\Delta''} \leq S_{\Delta}$$

となることが分かります。一方、(68) 式より、

$$s_{\Delta} \leq S(\Delta; \gamma) \leq S_{\Delta}$$

となることが分かりますから、 $S(\Delta; \gamma)$ も $S(\Delta''; \gamma'')$ もいずれも s_{Δ} と S_{Δ} の間にある数であることが分かります。したがって、(67) 式と合わせて考えると、

$$\begin{aligned} |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')| &\leq S_{\Delta} - s_{\Delta} \\ &\leq LT \cdot |\Delta| \end{aligned} \quad (69)$$

となることが分かります。^{*28)} 同様に、 $\Delta' \subset \Delta''$ となりますから、上の議論で Δ を Δ' で置き換えると、

$$\begin{aligned} |S(\Delta'; \gamma') - S(\Delta''; \gamma'')| &\leq S_{\Delta'} - s_{\Delta'} \\ &\leq LT \cdot |\Delta'| \end{aligned} \quad (70)$$

となることが分かります。したがって、 $S(\Delta''; \gamma'')$ を

^{*28)} 最初の不等号では、「 $S(\Delta; \gamma)$ も $S(\Delta''; \gamma'')$ も s_{Δ} と S_{Δ} の間にある数なので、 $S(\Delta; \gamma)$ と $S(\Delta''; \gamma'')$ の間の距離は s_{Δ} と S_{Δ} の間の距離より小さい」と考えました。

仲立ちとして考えると、(69) 式、(70) 式から、

$$\begin{aligned} |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta'; \gamma')| &= |(S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')) \\ &\quad + (S(\Delta''; \gamma'') - S(\Delta'; \gamma'))| \\ &\leq |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta''; \gamma'')| \\ &\quad + |S(\Delta''; \gamma'') - S(\Delta'; \gamma')| \\ &\leq LT \cdot |\Delta| + LT \cdot |\Delta'| \end{aligned}$$

となることが分かります。すなわち、勝手な二つの分割 Δ, Δ' に対する Riemann 和の間には、

$$|S(\Delta; \gamma) - S(\Delta'; \gamma')| \leq LT(|\Delta| + |\Delta'|) \quad (71)$$

という見積もりが成り立つことが分かりました。

この (71) 式は、分割の幅 $|\Delta|, |\Delta'|$ がともに小さくなりさえすれば、それぞれの分割に対応した Riemann 和はどれもこれもほぼ同じような値に落ち着くということを意味していますが、そのことをもう少しハッキリとした形で理解するために、(71) 式の右辺に現れる数を具体的な数で置き換えて考えてみることにします。例えば、勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、(71) 式の右辺を $\frac{1}{10^{m+1}}$ で置き換えるには、

$$\begin{aligned} |\Delta|, |\Delta'| &\leq \frac{1}{2LT} \cdot \frac{1}{10^{m+1}} \\ \implies |S(\Delta; \gamma) - S(\Delta'; \gamma')| &\leq \frac{1}{10^{m+1}} \end{aligned} \quad (72)$$

という形にすれば良いことが分かります。このとき、(72) 式の結論は、例えば、

$$S(\Delta; \gamma) - \frac{1}{10^{m+1}} \leq S(\Delta'; \gamma') \leq S(\Delta; \gamma) + \frac{1}{10^{m+1}}$$

と書き直すことができますが、これは、二つの Riemann 和 $S(\Delta; \gamma), S(\Delta'; \gamma')$ の値を十進表示で表わしたときに、少なくとも小数点以下 m 桁までは同じ数字が登場することを表わしています。^{*29)} したがって、例えば、(72) 式で $m = 3$ としてみると、分割の幅 $|\Delta|$ が $\frac{1}{2LT} \cdot \frac{1}{10^4}$ 以下の分割 Δ を取ってきて Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を求めてみると、分割 Δ の取り方や、それぞれの小区間における代表点 γ の取り方によらず、Riemann 和の値は小数点以下 3 桁までは確定してしまうということが分かります。さら

^{*29)} 第 9 回の問 3 のところで見たように、本当は、「 $S(\Delta; \gamma)$ の小数点以下 $(m+1)$ 桁目の数字 * が $* \neq 0, 9$ であれば、」という但し書きが付きませんが、ここでは、こうした繰り上がりや繰り下がりの問題は無視して述べることにしました。

に頑張つて、分割の幅 $|\Delta|$ が $\frac{1}{2LT} \cdot \frac{1}{10^{10}}$ 以下の分割 Δ を取ってきて Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を求めてみると、 $m = 9$ とした (72) 式から、やはり、分割 Δ の取り方や、それぞれの小区間における代表点 γ の取り方によらず、Riemann 和の値は小数点以下 9 桁までは確定してしまうということが分かるわけです。こうしてどんどんどんどん幅の小さな分割に対応する Riemann 和を考えてゆくと、小数点以下上の方からどんどんどんどん数字が確定してゆくということを (72) 式は意味しています。こうして定まる極限を、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

と表わすことにすると、この極限の値を定積分

$$\int_0^T v(t) dt$$

の値の定義として採用することができます。

そこで、一般に、 $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ と各小区間の代表点 $\gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ を勝手にひと組取ってきて、その Riemann 和を、

$$S(\Delta; \gamma) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i)(t_i - t_{i-1})$$

という式によって定めます。このとき、分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしていったときの極限、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

が存在するときに、関数 $f(t)$ は区間 $[a, b]$ において Riemann 積分可能であると言います。また、この極限の値を、

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma) \quad (73)$$

と書いて、関数 $f(t)$ の区間 $[a, b]$ における (定) 積分の値と呼びます。この (73) 式が 9 節のアイデアにもとづいた数学的に曖昧さのない積分の定義式ということになります。^{*30)} すると、この節で見てきたことは、 $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できるような関数 $f(t)$ は、勝手な

^{*30)} 細かいことですが、ここで s_Δ や S_Δ だけでなく勝手な Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を考えることにしたために、 M_i, m_i という各小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における最大値、最小値の存在の問題は気にしなくてもよいことになります。これにより、連続関数とは限らない勝手な関数に対して積分の存在を問題にすることができます。

有界閉区間 $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能であるということになります。

さて、ひとたび $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$ という極限の存在が保証されると、この極限は、 $n \rightarrow \infty$ のときに $|\Delta_n| \rightarrow 0$ となるような分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\dots}$ と代表点の集合の列 $\{\gamma_n\}_{n=1,2,\dots}$ を、勝手にひと組選んできて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n; \gamma_n)$ というように表わすことができます。このとき、どのような分割 Δ_n やどのような代表点の集合 γ_n を取ってきてても、同じ極限値になることが保証されているわけですから、例えば、区間 $[a, b]$ を n 等分した分割 Δ_n を考え、代表点として $\gamma_i = t_i \in [t_{i-1}, t_i]$ を選んでくると、

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

というように表わせることが分かります。これは皆さん良くご存じの区分求積法に他なりません。

ここでは、 $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数 $f(t)$ が勝手な有界閉区間 $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能であることを見ましたが、上の議論を見直すと、滑らか関数 $f(t)$ と積分区間 $[a, b]$ が与えられたときに、

$$L = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|$$

として、勝手な実数 $s, t \in [a, b]$ に対して、

$$|f(s) - f(t)| \leq L \cdot |s - t| \quad (74)$$

が成り立つという性質が、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$ という極限の存在を保証する鍵になっていることが分かります。一回も微分できないような連続関数に対しては、一般には、(74) 式のような不等式は成り立たないのですが、実は、有界閉区間上の連続関数は (74) 式の性質を少し弱くしたような一様連続性という性質を持つことが分かります。^{*31)} (74) 式の代わりに、この一様連続

^{*31)} 論理式を用いて表わすと、一様連続性とは、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\text{s.t. } |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon \quad (75)$$

ということです。すなわち、「 s と t の間の距離が (δ より) 小さくなれば、 s と t が区間 $[a, b]$ 上でどこにいても、 $f(s)$ と $f(t)$ の間の距離は ε より小さくなる」ということです。いま、 $f(t)$ が何度でも微分できる関数であるとする、(74) 式から、与えられた正数 $\varepsilon > 0$ に対して、例えば、 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ と取ること、(75) 式が成り立つことが分かります。一般の連続関数の場合には、与えられた正数 $\varepsilon > 0$ に対して、どのように δ を取ればよいのかということは明示的な形では分からないものの、(75) 式を満たすような δ が存在することを、連続関数の性質を用いて抽象的に議論できるということです。

性という性質を用いることで、この節で行なった議論と全く同様にして、連続関数は勝手な有界閉区間上で Riemann 積分可能であるということを確かめることができます。^{*32)}

11. 微積分学の基本定理について

10 節では、有界閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、区間 $[a, b]$ の分割 Δ とそれに付随した Riemann 和 $S(\Delta; \gamma)$ を考えて、

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta; \gamma)$$

というように、分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を小さくしていったときの Riemann 和の極限として定積分の値を定義しました。これは、無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ というものをきちんと理解するために、部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ は常に値がきちんと定まることに注目して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

というように、部分和からなる数列 $\{S_N\}_{N=1,2,\dots}$ の極限として級数の値を定義したということと似ています。また、被積分関数 $f(t)$ が連続関数であるときには、勝手な有界閉区間 $[a, b]$ 上で、積分の値がきちんと定まることを注意しましたが、これは、第 5 回の問 2 のところで見たような級数の収束判定法を用いて、いつ無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値がきちんと定まるのかということを考えてみたということと似ています。このように数学的に曖昧さのない定義を与えた上で、いつきちんと値が定まるのかということを確認しておくことは、考えている数学的な対象に対するしっかりとした理解を得るための助けにもなりますし、例えば「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めてみる」というような「滑稽なこと」を仕出かせないためにも大切なことです。

さて、級数の場合でも「きちんと級数の値が定まっていることを確かめること」と「その値を求めること」の間には差があるように、積分についても「きちんと積分の値が定まっていることを確かめること」と「その積分の値を求めること」とは別問題です。すなわち、多項式のような極めて特別な場合を除いて、定積分の

値を Riemann 積分の定義に基づいて直接求めることは甚だ困難です。

そこで、積分の値を求めるに当たっては「別な工夫」が必要になります。そのための工夫が、皆さんよくご存じの微積分学の基本定理です。10 節では、有界閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(t)$ の積分

$$\int_a^b f(t)dt$$

を Riemann 和の極限として定義しましたが、微積分学の基本定理のアイデアとは「積分区間 $[a, b]$ をパラメータであると考えて、積分区間を変えたときに積分の値がどのように変化するのかということに注目する」ということにあります。すなわち、例えば、積分区間の下端 a は勝手にひとつ固定してしまっても、上端である $b \in \mathbb{R}$ の値をいろいろと動かすことで、積分の値を「 b の関数」であると見なし、「 b の関数」としての性質に注目するわけです。そこで、積分の下端 a を勝手にひとつ固定して、上端 $b \in \mathbb{R}$ だけを動かして考察するということを強調するために、変数らしく、 b を $b \rightsquigarrow x$ と書き直すことにします。すると、上で述べたアイデアとは、「与えられた関数 $f(t)$ に対して、

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (76)$$

という x の関数の性質を調べてみる」ということになります。

さて、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数である場合には、 $\mathbb{R}$ の勝手な有界閉区間上で $f(t)$ の積分の値がきちんと定まりますから、(76) 式によって、 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ という関数が定まることになります。ここで、 $x < a$ のときには、区間 $[a, x]$ というのは意味が無くなりますが、区間 $[x, a]$ というのは意味がありますから、

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = - \int_x^a f(t)dt$$

と定めることにします。^{*33)}

そこで、いま、 $\mathbb{R}$ 上の点 $x_0 \in \mathbb{R}$ を、勝手にひとつ取ってきて、 x が x_0 の近くを動くときに $F(x)$ という値がどのように変わるのかということを考えてみます。そのために、勝手にひとつ実数 $h \in \mathbb{R}$ を取ってきて、 $F(x_0 + h)$ と $F(x_0)$ の差を考えてみます。すると、この差は、

^{*32)} すなわち、(74) 式の右辺に現われる $L \cdot |s - t|$ という量を「ひとつの量」と考えて、 $L \cdot |s - t| \rightsquigarrow \varepsilon$ と置き換えて議論すればよいわけです。興味のある方は、微積分学の適当な教科書を参照してみてください。

^{*33)} 実は、積分の上端と下端を入れ替えたときにマイナス符号を付けるのは、積分区間 $[a, b]$ の「向き」ということに関係しています。

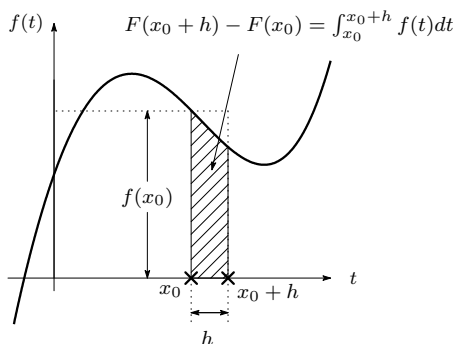


図 15 $F(x_0 + h) - F(x_0)$ は、上のような面積で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\
 &= \left\{ \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \right\} - \int_a^{x_0} f(t) dt \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt
 \end{aligned}$$

と表わされることが分かります (図 15 を参照) 。

いま、被積分関数 $f(t)$ は連続関数であると仮定しましたから、 $t \rightleftharpoons x_0$ のとき、

$$f(t) \rightleftharpoons f(x_0)$$

となることが分かります。いま、 $|h|$ の大きさが十分小さければ、区間 $[x_0, x_0 + h]$ 上の勝手な点 $t \in [x_0, x_0 + h]$ に対して、(あるいは、区間 $[x_0 + h, x_0]$ 上の勝手な点 $t \in [x_0 + h, x_0]$ に対して、)

$$t \rightleftharpoons x_0$$

である考えることができますから、積分区間上の勝手な点 $t \in [x_0, x_0 + h]$ に対して、(あるいは、勝手な点 $t \in [x_0 + h, x_0]$ に対して、)

$$f(t) \rightleftharpoons f(x_0) \quad (77)$$

である考えることができます。したがって、(77) 式の両辺を積分することで、

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \rightleftharpoons \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt$$

と近似できることが分かりますから、 $|h|$ の大きさが十分小さいときには、

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &\rightleftharpoons \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \\
 &= f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} dt \\
 &= f(x_0) \cdot h \quad (78)
 \end{aligned}$$

というように近似できることが分かります。^{*34)} そこで、(78) 式の両辺を h で割ってから、 $h \rightarrow 0$ としてみると、

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dx}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \\
 &= f(x_0) \quad (79)
 \end{aligned}$$

となるはずであることが分かります。

そこで、この期待が正しいということをきちんと確認してみることにします。いま、(79) 式の結論を書き直すと、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = 0$$

ということになります。^{*35)} ここで、 $|\cdot|$ の中身は少し複雑そうな顔をしています、(79) 式を導いたときの直感的な議論を見返すと、

$$\begin{aligned}
 &(F(x_0 + h) - F(x_0)) - f(x_0) \cdot h \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \quad (80)
 \end{aligned}$$

と書き直して考えると良さそうなが分かります。このとき、例えば、 $h > 0$ であるとすると、

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\
 &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \quad (81)
 \end{aligned}$$

と評価できることが分かります。そこで、積分区間 $[x_0, x_0 + h]$ における関数 $|f(t) - f(x_0)|$ の最大値を、

$$M_h = \max_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)| \quad (82)$$

と書くことにすると、(80) 式、(81) 式より、

^{*34)} すなわち、 $|h|$ の大きさが十分小さいときには、 $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ という面積は、底辺が h で高さが $f(x_0)$ の長方形の面積にほぼ等しいだろうということです (図 15 も参照) 。

^{*35)} ここで、(79) 式を「 $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ という数と $f(x_0)$ という数の間の距離が 0 に近づく」と解釈しました。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \\ & \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ & \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} M_h \cdot dt = M_h \end{aligned}$$

と評価できることが分かります。また、 $h < 0$ のときには、積分の上端と下端を入れ替えるときに符号が付くことに注意して、 $h > 0$ のときと同様に議論すると、

$$M_h = \max_{t \in [x_0+h, x_0]} |f(t) - f(x_0)| \quad (83)$$

として、やはり、

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq M_h$$

というように評価できることが分かります。^{*36)}

以上から、区間 $[x_0, x_0 + h]$ において、(あるいは、区間 $[x_0 + h, x_0]$ において、) 関数 $|f(t) - f(x_0)|$ の最大値を与える点 θ_h を、勝手にひとつ取ってくると、

$$M_h = |f(\theta_h) - f(x_0)|$$

と表わせますから、

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq |f(\theta_h) - f(x_0)| \quad (84)$$

というように評価できること分かりました。ここで、 θ_h は x_0 と $x_0 + h$ の間にある数であることに注意すると、 $h \rightarrow 0$ のときに $\theta_h \rightarrow x_0$ となることが分かりますが、 $f(t)$ は連続関数であると仮定しましたから、

$$\begin{aligned} 0 & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} |f(\theta_h) - f(x_0)| \\ & = |f(x_0) - f(x_0)| \\ & = 0 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、(79) 式が成り立つことが確かめられました。

ここで、(79) 式において、 $x_0 \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上のどんな点でも良かったということに注意すると、(79) 式より、勝手な点 $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \quad (85)$$

^{*36)} 皆さん、確かめて下さい。

となることが分かります。皆さん良くご存じのように、(85) 式の事実を微積分学の基本定理と呼びます。

上の議論では、 $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であると仮定しましたが、 $f(t)$ が必ずしも連続関数でなくとも、 $\mathbb{R}$ の勝手な有界閉区間上で積分の値がきちんと定まるような関数であれば、やはり、 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ という関数を考えることができます。例えば、 $f(t)$ が $\mathbb{R}$ 上でいくつか不連続になるような点を持つときや、単調増加関数 (あるいは、単調減少関数) であるときなどがこのような場合に当たります。そこで、上で (79) 式を示すために行なった議論を見返してみると、証明には、本質的に、 $f(t)$ が $t = x_0$ において連続であるということしか用いていないことが分かりますから、このような少し一般的な場合にも、「関数 $f(t)$ が $t = x_0$ で連続ならば、 $F(x)$ は $x = x_0$ において微分可能であり $F'(x_0) = f(x_0)$ となる」ということが分かります。^{*37)}

10 節で見たように、「積分」という概念は「微分」という概念とは独立して考えることができる概念であるわけですが、微積分学の基本定理は被積分関数が連続関数であるという特別な場合には、積分を求める問題を原始関数を求める問題に帰着して考えることができるということを保証してくれるわけです。したがって、よく耳にする微分と積分とはお互いに逆演算であるという主張は、こうした限定された意味で語られていることが分かります。このことは多変数関数に対する積分を考えたときによりハッキリとしてきます。すなわち、多変数関数の場合には「微分と積分とはお互いに逆演算である」という主張はあまり意味をなさないこととなります。

12. 微積分学の基本定理を見直すと *

そこで、多変数関数の場合への「微積分学の基本定理」の自然な拡張とは何であるべきなのかということに対する皆さんのイメージを膨らませるために、最後に、微積分学の基本定理を少し違った形に書き直してみることになります。これまでも何度か登場しましたが、11 節の (85) 式の両辺を区間 $[a, b]$ 上で積分した後で、 $f(t)$, $F(x)$ を、それぞれ $f(t) \rightsquigarrow f'(t)$, $F(x) \rightsquigarrow f(x)$ と書き直してみると、

^{*37)} ただし、このような場合には、(82) 式や (83) 式で与えられるような最大値が存在するとは限りませんから、第 9 回の問 3 のところで紹介したような「 ε - δ 論法」を用いて議論する方がスッキリと議論できます。

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt \quad (86)$$

という式が得られます。いま、積分区間 $I = [a, b]$ という集合の境界 ∂I を考えてみると、 $\partial I = \{a, b\}$ という二点からなる集合になることが分かります。そこで、(86) 式の左辺も関数 $f(t)$ の境界 ∂I 上での「積分」の値であると思なすことができないかということを考えてみます。

例えば、数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ とは自然数の集合 $\mathbb{N}$ 上の $a_* : n \mapsto a_n$ という関数であると考えられますが、このとき $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ から定まる級数を、形式的に、

$$\int_{\mathbb{N}} a_* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

というように「 $\mathbb{N}$ 上の積分」であると解釈することは自然なことに思われます。

そうした観点から、(86) 式の左辺を眺めると、 $-f(a)$ というように $f(a)$ のところにマイナス符号が付いているところが少し気になります。前に、 $a > b$ となるときには、

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad (87)$$

というように約束すると便利であるということと、これは積分区間を「向き」を込めて考えるということに関係しているということに注意しました。ここでは「向き」という概念についての説明は省略しますが、例えば、上の (87) 式の右辺においてマイナス符号が現れるのは、 $a > b$ のときに a から b まで積分する場合には、区間 $[b, a]$ 上に「 $b \rightarrow a$ という (正の) 向き」とは逆の「 $a \rightarrow b$ という (負の) 向き」を考えているからだと解釈したりします。実は、今考えている場合にも、 $I = [a, b]$ の「向き」から定まる ∂I の「向き」ということをきちんと考えることができ、例えば、区間 $I = [a, b]$ に「 $a \rightarrow b$ という向き」を考えると、それに応じて「 $*$ $\rightarrow$ $*$ という向き」の始点である a には「負の向き」が入り、終点である b には「正の向き」が入ると考えると、いろいろと都合の良いことがあるということが分かっています。

そこで、区間 $I = [a, b]$ の境界を「向き」まで考えて $\partial I = -\{a\} \cup \{b\}$ と表わすことにします。すると、どうやら、(86) 式の左辺を、

$$\int_{\partial I} f = \int_{-\{a\} \cup \{b\}} f$$

数学 IB 演習

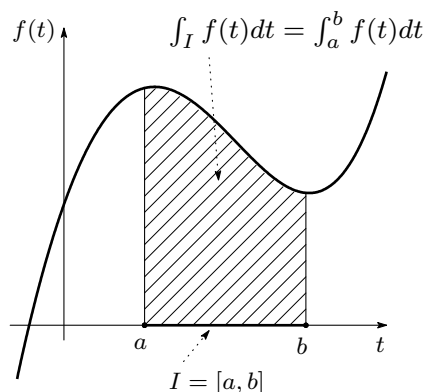


図 16 関数 $f(t)$ の区間 $I = [a, b]$ 上での積分の値 $\int_I f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ とは、区間 $I = [a, b]$ 上で関数 $f(t)$ のグラフと t 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積のことである。

$$\begin{aligned} &= \int_{-\{a\}} f + \int_{\{b\}} f \\ &= - \int_{\{a\}} f + \int_{\{b\}} f \\ &= -f(a) + f(b) \end{aligned}$$

というように解釈できるのではないかと想像されます。皆さん良くご存知のとおり、関数 $f(t)$ の区間 $I = [a, b]$ 上での積分の値 $\int_I f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ とは、区間 $I = [a, b]$ 上で関数 $f(t)$ のグラフと t 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積のことでした (図 16 を参照)。そこで、関数 $f(t)$ の一点 $\{a\}$ 上での積分の値 $\int_{\{a\}} f = \int_{\{a\}} f(t)$ を、一点 $\{a\}$ 上で関数 $f(t)$ のグラフと t 軸により挟まれた線分の (符号付きの) 長さのことであると解釈してみようというわけです (図 17 を参照)。

一方、(86) 式の右辺に現われる積分の中身である $f'(t) dt$ を、第 6 回の問 2 のところで説明したような関数 f の全微分であると解釈して

$$df = f'(t) dt$$

と表わすことにすると、結局、(86) 式という形での微積分学の基本定理は、形式的に、

$$\int_{\partial I} f = \int_I df$$

と表わすことができます。このように解釈すると、微積分学の基本定理とは、微分と積分が逆演算であるということを表わしているというよりは、一次元の集合 I 上の積分とその境界である零次元の集合 ∂I 上の積分

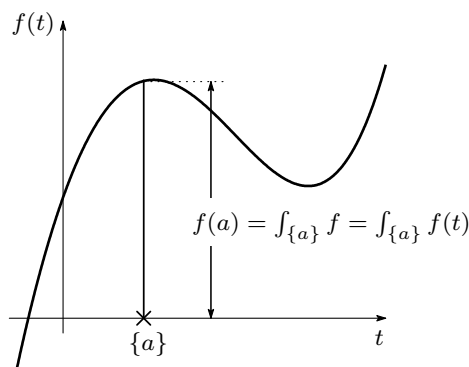


図 17 関数 $f(t)$ の一点 $\{a\}$ 上での積分の値 $\int_{\{a\}} f = \int_{\{a\}} f(t)$ を、一点 $\{a\}$ 上で関数 $f(t)$ のグラフと t 軸により挟まれた線分の (符号付きの) 長さのことであると解釈してみる。

とを結びつけているものであると理解することができます。ここで、積分領域において境界を取る操作「 ∂ 」と、積分の中身において微分を取る操作「 d 」とが上手く対応していることに注意して下さい。実は、このような観点から、一般に、

$$\int_{\partial M} * = \int_M d* \quad (88)$$

というように、 n 次元の集合 M 上の積分と M の境界である $(n-1)$ 次元の集合 ∂M 上の積分を結びつけるという形で、多変数関数の場合に微積分学の基本定理を拡張できるということが知られています。近い将来に皆さんも、例えば、ベクトル解析などを通して、こうした拡張の具体例に触れることになるのではないかと思います。

さて、現在の数学では、こうした拡張が非常に一般的な形で行なわれており、「積分されるもの」である「 $*$ 」や「 $d*$ 」は「微分形式」という概念を導入することで統一的に理解されています。また、微積分学も $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ というような Euclid 空間上にとどまらず、球面やドーナツの表面のような「曲がった空間」上で展開できるということが分かっています。例えば、球面やドーナツの表面のような空間は曲がってはいますが、どんな点を取ってきてもその点の十分近くだけを考えると、Euclid 空間のように見えます。^{*38)} このような場合には空間の点を「局所的に」パラメータ表示することができるので、このパラメータ表示を通して微積分をし

てみることができるわけです。例えば、第 7 回の問 2 や問 3 のところでは「陰関数定理」や「条件付きの極値問題」ということに触れましたが、そこではこうした局所的なパラメータ表示を用いて微積分をしてみるとということの一端が現われています。

そこで、こうした「曲がった空間」上で微積分を考えると、実は、「穴の空き具合」といったような「空間の形」と「微積分の様子」とが密接に関係していることが分かります。例えば、第 9 回の問 1 のところで、「代数関数の積分」を変数変換することで「有理関数の積分」に帰着できることと、対応する「(複素)代数曲線」がドーナツの表面のような穴の空いた形ではなく、「Riemann 球面」のような穴の空いていない形をしていることが実は関係しているということに注意しました。このような観点から眺めると、実は、(88) 式も「空間の形」と「微積分の様子」との間には密接な関係があるということを端的に表わしている式であるというように見えてきたりもします。皆さんの中の多くの方が、高校生の頃に初めて微積分学の基本定理に出会われたのではないかと思います。当たり前のように教えられている微積分学の基本定理も、その意味するところを深く考えてゆくと実に奥深い数学的な真実に繋がっているわけです。数学では、円や球面などのように、局所的にパラメータ付けをすることで微積分をしてみることができるような空間のことを「多様体」と呼ぶのですが、こうした「曲がった空間」上の微積分学や微分形式などに興味を持たれた方は、第 6 回の問 3 のところで触れた逆関数定理や第 7 回の問 2 のところで触れた陰関数定理などの主張していることの意味や、第 7 回の問 3 のところで触れた条件付きの極値問題の意味していることなどをしっかりと理解した上で、多様体論の教科書に挑戦してみるとよいのではないかと思います。

*38) 地球の表面も皆さんの近くだけを眺めると平面のように見えるわけです。